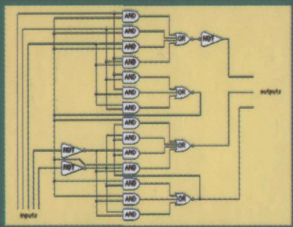
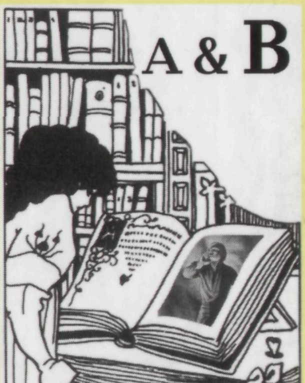


ОБЛЕГЧЕННОЕ ИЗЛОЖЕНИЕ МАТЕРИАЛА

К. К. ЖОЛЬ

ЛОГИКА В ЛИЦАХ И СИМВОЛАХ

Учебник для вузов



Чем занимается логика? Какова ее история и кто ее творцы? Что такое математическая логика? В чем заключается практическая ценность логической науки? Как научиться пользоваться логическим языком?

На эти и другие вопросы в увлекательной популярной форме отвечает предлагаемый учебник, рассказывающий о драматических сторонах научных исканий, объясняющий связь логики с гуманитарными, естественными, техническими и математическими науками, помогающий понять значение логики для программного обеспечения современных компьютеров, вооружающий элементарными основами логической грамотности.

ВОСТОК ЗАПАД

ЛОГИКА
В ЛИЦАХ
И СИМВОЛАХ

Учебное пособие для вузов

BIBLIOTHECA STUDIORUM

ОТВЕТСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

А. Е. Конверский доктор философских наук, профессор

СПРАВКА ОБ АВТОРЕ

Жоль Константин Константинович 1949 г. рождения, доктор философских наук, дважды лауреат Всесоюзных конкурсов молодых ученых-обществоведов (1978, 1981), лауреат Всесоюзного конкурса на лучшее произведение научно-популярной литературы (1989), автор книг: Сравнительный анализ индийского логико-философского наследия. К.: Наукова думка, 1981. 208 с.; Мысль, слово, метафора. Проблемы семантики в философском освещении. К.: Наукова думка, 1984. 304 с.; Наука, религия, общество. К.: Политиздат Украины, 1986. 160 с. (В соавторстве); Куда бредет пилигрим: Восточные религии, культура, молодежь. К.: Молодь, 1988. 232 с. (В соавторстве); Язык как практическое сознание. (Философский анализ). К.: Выща школа, 1990. 240 с.; Под знаком вечности. К.: Молодь, 1991. 320 с.; Информация, общественные науки, управление: Философско-экономический анализ. К.: Наукова думка, 1991. 282 с. (В соавторстве); Введение в современную логику. К.: Выща школа, 1992. 126 с. (На укр. яз.); Философия для любознательных. М.: Просвещение, 1993. 192 с.; Логика в лицах и символах. М.: Педагогика-Пресс, 1993. 256 с.; Философия и социология права. К.: Юринком Интер, 2000. 480 с.; Методы научного познания и логика (для юристов). К.: Атика, 2001. 288 с.; *Индуизм в истории Индии*. К.: Bibliotheca Studiorum, 2001. 368 с.; *Методы научного познания и логика (для юристов*). К.: Атика, 2001. 288 с.; *Логика*. М.: Юнити-Дана, 2004. 399 с.; *Социология*. М.: Юнити-Дана, 2004. 431 с.; *Введение в философию*. М.: Юнити-Дана, 2004. 351 с.

К. К. ЖОЛЬ

ЛОГИКА В ЛИЦАХ И СИМВОЛАХ

Учебное пособие для вузов

Издание третье, исправленное и дополненное

ББК 87.4
Ж 79

РЕЦЕНЗЕНТЫ

А. Т. Ишмуратов доктор философских наук,
ведущий научный сотрудник НАН Украины (Киев);
С. Б. Крымский доктор философских наук,
ведущий научный сотрудник Института философии
НАН Украины (Киев);
В. С. Швырев доктор философских наук,
профессор (Москва)

Жоль К. К.
Ж 79 Логика в лицах и символах. .:, . 351 с.: ил.
ISBN

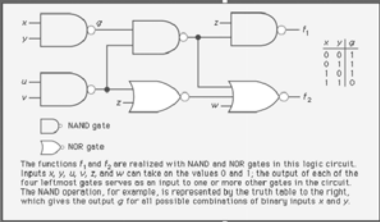
Чем занимается логика? Какова ее история и кто ее творцы? Что такое математическая логика? В чем заключается практическая ценность логической науки? Как научиться пользоваться логическим языком?

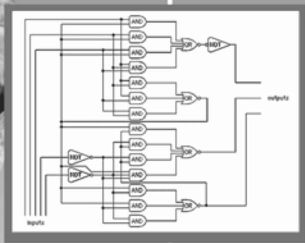
На эти и другие вопросы в увлекательной популярной форме отвечает предлагаемая книга, вводящая читателя в мир драматических научных исканий, объясняющая связь логики с гуманитарными, естественными, техническими и математическими науками, помогающая понять значение логики для программного обеспечения современных компьютеров, вооружающая элементарными основами логической грамотности.

Для студентов, аспирантов, преподавателей, научных работников и широкого круга читателей, интересующихся современной логикой.

ББК 87.4

ISBN





...ум заключается не только в знании,
но и в уменьи прилагать знания на деле...

АРИСТОТЕЛЬ

СОДЕРЖАНИЕ

К ЧИТАТЕЛЮ

Однажды кто-то резонно заметил: развитие современной математики затрудняется не столько тем, что тяжело освоиться с новыми идеями, сколько тем, что нелегко отказаться от старых. Очевидно, это можно сказать не только о математике, но и о любой другой науке, включая логику.

Не так давно традиционная логика, сонно почивавшая если не на обветшавших лаврах, то на страницах пыльных и ужасно скучных фолиантов, была внезапно и бесцеремонно потревожена. Нашлись смельчаки, обуреваемые крамольным желанием подвергнуть тщательной ревизии основной логический инструментарий. Штурм логических твердынь увенчался успехом. Оказалось, ряд базисных идей, доминирующих целевых ориентиров и методов логических рассуждений были возмутительно неверны. В драматической борьбе за восстановление авторитета старая логика быстро сдала свои позиции, уступив напору новаторов и потребностям времени.

Я не стремился раскрыть эту драму идей во всем ее объеме, равно как не претендовал на то, чтобы предлагаемая книга вызывала восторг неофитов и тем самым, безусловно, оказывала существенное влияние на рост интереса к логике. Тем не менее драма есть драма; она поучительна и назидательна. Если отказаться от утомительного морализаторства и отдать предпочтение познавательной поучительности научных конфликтов, то живоописание их способно воспламенить интерес даже к самым неинтересным вещам, точнее, к тому, что кажется обыденному сознанию безжизненно-абстрактным и маловразумительным. Вот почему в моей книге читатель познакомится не только с символами и формулами логики, но и с теми, кто их изобретал, ими оперировал и придавал им глубокий научный смысл.

Эта книга написана для неспециалистов, интересующихся логикой, ее связями с математикой и техникой. Подобная авторская позиция объясняется просто: современная логика, которую часто называют математической, возникла из решения довольно специфических задач, касающихся укрепления основ математики, а не из бесплодных попыток научить всех желающих правильно мыслить и красиво рассуждать.

Я буду искренне рад, если данная книга поможет молодому читателю и его старшим наставникам изменить свое отношение к предметам хотя и абстрактным, но весьма практически полезным. С этой целью мной не только подробно разъясняется то, что профессионалу покажется банальным, но и применяется прием повтора, т. е. некоторые вещи рассматриваются по нескольку раз и в разных контекстах. Наиболее любознательным предлагаются в конце разделов упражнения, позволяющие проверить понимание излагаемого материала и тренирующие логическую память.

Итак, уважаемый читатель, в добрый путь.

Киев, 19 июня 1990 г
Киев, 1 сентября 2004 г.
КиевЮ, 30 июня 2006 г.

1

ОБ ОШИБКАХ СТРЕЛОЧНИКОВ, ОТВЕТСТВЕННЫХ РЕШЕНИЯХ И ЛОГИКЕ

ГЛАВА 1
ОБ ОШИБКАХ СТРЕЛОЧНИКОВ, ОТВЕТСТВЕННЫХ РЕШЕНИЯХ И ЛОГИКЕ

Чем оборачивается нерасторопность стрелочников? Управление техническими системами для повышения эффективности принимаемых решений. Что стоит за французским словом «реле» и кто является изобретателем клопфера? Релейные устройства и логика. Кое-что о компьютерах и системах счисления. Об алгебре контактных цепей, Джордже Буле и его вкладе в логическую науку. Автор метода диаграмм. Полезные сведения о теории множеств. Упражнения.

В старые времена скорость движения поездов была смехотворно мала. Поэтому стрелочники не отличались особой расторопностью. Лишь в силу исключительных обстоятельств они могли демонстрировать резвость и прыть — качества, присущие в той или иной мере всему живому. Чаще всего эти качества проявлялись в Новом Свете, где в прериях пошаливали индейцы и одичавшие ковбои, неожиданно путающие планы стрелочников своими хулиганскими выходками. Чтобы не быть голословным, сошлюсь на рассказ человека, заслуживающего полного читательского доверия.

Было это ближе к вечеру. «Вечерний экспресс» остановился у водокачки набрать воды. Пользуясь удобной возможностью, Боб Тидбол, «Акула» Додсон и индеец-метис по прозвищу Джон Большая Собака мгновенно влезли на паровоз и показали машинисту три круглых отверстия своих карманных артиллерийских орудий. Естественно, это произвело на машиниста такое сильное впечатление, что он тут же вскинул обе руки вверх, как это делают при восклицании: «Да что вы! Быть того не может!»

Нет, уважаемые, такое вполне может быть. Поверьте моему слову, бывает и хуже. Например, непроспавшийся после вчерашнего возлияния стрелочник пускает, безо всякого к тому понуждения, мчащийся стрелой экспресс в тупик или навстречу товарному. Элементарная управленческая задача решается этим прохвостом самым дьявольским образом.

Откровенно говоря, ни для кого не секрет, что любая система управления, включая управление железнодорожным транспортом, создается с тем, чтобы существенно повысить эффективность принимаемых решений. Решение же   это всегда выбор оптимального пути движения к намеченной цели. Надежность выбора зависит от надежности прогнозов.

А если без прогнозов?

Увы, вас ждет печальная судьба. Решения, принимаемые вслепую или с опорой на капризную интуицию, чреваты самыми неприятными последствиями. Не так ли?

Элементарный жизненный опыт подсказывает: да, действительно, это именно так.

Может ли быть решение решением вне выборов вариантов решения задач?

Весьма сомнительно. Если решение можно свести к однозначному выбору наиболее оптимального варианта, то здесь вовсе не требуется лицо, принимающее решения. Такая задача решается чисто техническими средствами, например с помощью компьютера. От лица же, принимающего ответственные решения, ожидают выбора именно тогда, когда решение нельзя считать до конца однозначным. По мнению специалистов, существо принятия решений состоит в том, что в нем должны заключаться несоизмеримые величины, трудно согласуемые факторы. Подобные управленческие задачи не по силам не только стрелочникам, но и современным электронно-вычислительным машинам. Что же делать?

Прежде всего не следует впадать в пессимизм. Необходимо попытаться разделить управленческие задачи на рутинные и нетривиальные. Рутинные задачи могут моделироваться по образцу конструируемых простых и сложных релейных устройств. Изучением этих устройств мы сейчас и займемся, и пусть слова «рутина», «рутинное» не повергают любознательного читателя в уныние. Весь фокус в том, что мы должны научиться проникать глубже явлений, лежащих на поверхности и раскрашенных в серый цвет повседневности.

Наше погружение в суть вещей начнем со словаря иностранных слов. Листая его, мы узнаем, что слово «реле» французского происхождения. Оно образовано от слова «relayer», обозначающего *сменить, заменить*. Но это нам мало что говорит. Тогда обратимся к техническим словарям и учебникам.

В научном смысле реле   это устройство для механического, электрического и другого управления и контроля за соответствующими техническими системами. Сегодня наиболее распространенным типом релейного устройства является электромагнитное реле, состоящее из релейного элемента с двумя состояниями устойчивого равновесия и группы электрических контактов, которые замыкаются или размыкаются при изменении состояния релейного элемента.

Что-то замыкается и размыкается, сменяется, заменяется. Ба-а! Так вот откуда словечко «реле», ставшее термином, появилось в нашем лексиконе. Своим значением оно указывает на изменения в состояниях какого-то технического устройства. Запомним это и пойдем дальше, впившись взглядом в объект, называемый *электромагнитным реле.*

История электромагнитных реле связана со строительством больших железных дорог, надежность работы которых во многом зависит от быстрой передачи сообщений на дальние расстояния. Тогда-то и было обнаружено, что, замыкая и размыкая электрическую цепь, можно возбуждать магнитные силы притяжения. Установление этого факта навело на мысль использовать электромагнетизм для передачи сообщений на огромные расстояния за ничтожно малое время. На горизонте замаячил телеграф.

В первой конструкции телеграфная система состояла из батареи, проводящей цепи, сигнального ключа

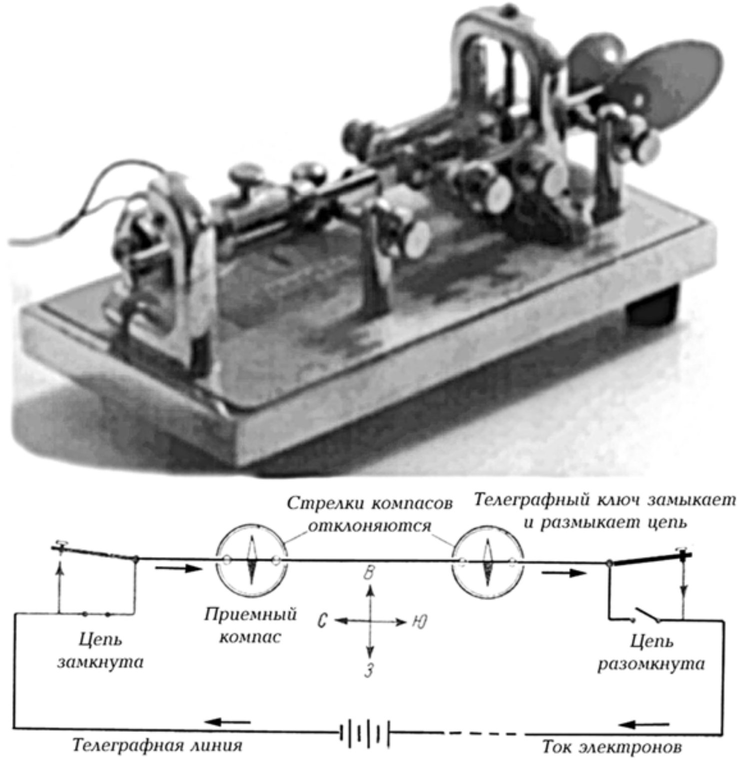


Рис. 1

и компаса (рис. 1), который располагался либо над, либо под телеграфным проводом. Когда ключ замыкал цепь, стрелка компаса отклонялась от своего обычного направления. При размыкании цепи стрелка возвращалась в исходное положение. Легко догадаться, что такой танец компасной стрелки мог служить основой разработки кода для передачи сообщений.

Время шло, техника развивалась, и вот наступил знаменательный момент, когда американский художник и изобретатель С. Ф. Б. Морзе (1791 1872) продемонстрировал в первой половине XIX столетия приёмник, названный *клопфером*, и систему сигнализации, известную ныне как *азбука Морзе.*

Сэмюэль Финли Бриз Морзе родился 27 апреля 1791 г. в Чарлзтауне (штат Массачусетс). Учился в Йельском университете, где прослушал курс лекций по новой тогда области физики электричеству. В 1811 г. отправился в Англию, где изучал живопись в Королевской академии художеств. Возвратившись в 1815 г. в Америку, он намеревался писать картины на исторические и религиозные темы, однако не нашел заказчиков и занялся портретной живописью. В 1824 г. поселился в Нью-Йорке, где получил заказ на портрет маркиза М. Ж. де Лафайета (1757 1834), французского политического деятеля и участника Войны за независимость в Северной Америке, совершавшего в это время поездку по Америке.

В 1829 г. Морзе вновь отправился в Европу, чтобы изучать творения старых мастеров. Он надеялся получить заказ на написание исторических панно для четырех еще пустующих панелей ротонды в здании Капитолия. В Европе Морзе пришла в голову мысль написать картину, которая заинтересовала бы американцев, никогда не видевших шедевров мирового искусства. Так появилась наиболее известная его картина под названием «Галерея Лувра», на заднем плане которой изображено в миниатюре столько шедевров, сколько смогло вместить полотно. В 1832 г. Морзе вернулся в Америку и получил место профессора рисунка и живописи Нью-Йоркского университета.

Как полагаю историки, интерес к электричеству и телеграфии возник у Морзе в то время, когда он возвращался из Европы. На борту судна зашел разговор об опытах известного английского физика Майкла Фарадея (1791 1867) по электромагнетизму «извлечению искр из магнита». Морзе пришло в голову, что сочетание искр можно использовать как код для передачи сообщений. Во время месячного плавания он сделал несколько предварительных чертежей, а по прибытии в Америку построил электромагнитный телеграфный аппарат. В 1837 г. это изобретение было продемонстрировано в Нью-Йоркском университете. В 1838 г. Морзе разработал специальный код (*азбуку Морзе*) и послал первое телеграфное сообщение: «Чудны дела твои, Господи!»

Умер Морзе в Нью-Йорке 2 апреля 1872 года.

Чем интересна для нас эта *азбука Морзе*? Имеет ли она отношение к проблемам логики?

Разберемся с этими вопросами, приняв к сведению, что *азбука Морзе* была в некотором смысле чем-то совершенно новым по сравнению с давно известными кодами, основное назначение которых заключалось в засекречивании соответствующих сообщений.

Первыми секретными кодами были *криптограммы* (тайнописи). Кстати, изобретение тайных шифров считалось весьма достойным занятием для философов и математиков. По-видимому, увлечение философствующих мужей искусством шифрования настолько укоренилось в традиции философствования, что до сих пор многие с испугом прислушиваются к витиеватым словесам магистров, бакалавров, доцентов и профессоров. Над созданием тайных шифров трудился выдающийся английский философ Фрэнсис Бэкон (1561 1626), личность более чем загадочная. До сих пор еще бытует легенда, что произведения У. Шекспира (1564 1616) принадлежат перу Бэкона. Любопытно, не правда ли? Своим усердием на поприще тайных шифров также отличался известный французский математик Франсуа Виет (1540 1603), числившийся юристом при дворе Генриха IV (1553 1610). Бывший гугенот Генрих Наваррский, ставший католиком Генрихом IV, благоволил к ученым и поощрял ученость. Законник и математик Виет ценил это и старался помогать королю Франции всем, что было в его силах. В те дремучие времена короли особенно высоко ценили мастеров шифрования. Почему бы не предположить, что именно искусство шифрования способствовало разработке начал элементарной алгебры придворным юристом?

Хвала Виету за то, что он применил правила числовой алгебры своих предшественников к уравнениям, связывающим какие угодно величины, которые обозначались им буквами. С тех пор математический анализ становится преимущественно алгебраическим, а слово «анализ» становится синонимом слова «алгебра». Алгебраический код во многом рассекретил тайны математики.

Вместе с искусством шифрования развивалось искусство *криптоанализа* (дешифровки). Но мы не станем вникать в рецепты этой загадочной кухни и не будем тревожить персонажей многоуважаемой англичанки Агаты Кристи (1890 1976) или других мастеров детективного жанра. Обратимся к кодированию, связанному с проблемой передачи сообщений по линиям связи.

В задачу кодирования по типу *азбуки Морзе* не входит засекречивание сообщений. Главная цель таких кодов состоит в быстрой и надежной передаче сообщений. Реализация поставленной цели осуществляется специальным кодирующим устройством, которое сопоставляет символы передаваемого текста и определенную комбинацию сигналов, называемую *кодом*. *Кодирование* это операция переводов сообщений в последовательность сигналов. Обратная операция называется *декодированием*.

Коды, использующие два различных элементарных сигнала (например, электрический импульс и пауза), называются *двоичными*. Обычно эти сигналы обозначаются математическими символами 0 и 1. Указанных символов вполне достаточно для кодирования любого множества сообщений.

Остановимся и поразмыслим. Интуиция подсказывает, что между двоичными кодами и релейными устройствами, работающими на принципе *двоичности* (замкнуто разомкнуто), существует нечто общее. В чем же это общее заключается? Приближает ли нас ответ на предыдущий вопрос к проблемам логики?

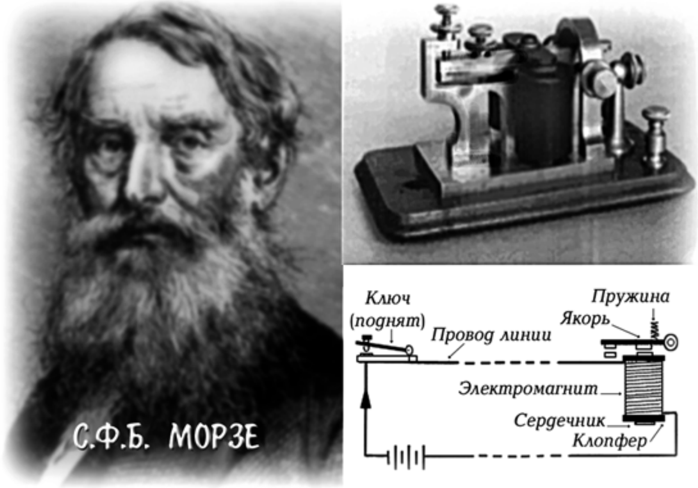


Рис. 2

Повнимательнее рассмотрим *клопфер Морзе*. Схема этого клопфера представлена на рис. 2. Когда ключ замкнут, ток, идущий по цепи, намагничивает сердечник электромагнита, который притягивает вниз якорь из мягкого железа, создавая щелчок. Когда ключ разомкнут, сердечник размагничивается и якорь оттягивается обратно пружинкой, издавая при этом вновь щелчок. Сообщения обычно посылаются в виде последовательности точек и тире.

Схема простейшего релейного устройства очень похожа на схему первых телеграфных систем. Реле работает только как ключ, замыкающий и размыкающий электрическую цепь, в которую входят батарея и клопфер, берущий энергию не из телеграфной линии, а от местного источника питания.

Таким образом, электрическое реле состоит из электромагнита и якоря, на котором закреплены подвижные контакты. Реле также включает в себя и неподвижные контакты, прикасаясь к которым подвижные контакты могут замыкать цепь. Когда через катушку электромагнита проходит электрический ток, якорь притягивается к электромагниту. Что при этом происходит в структуре релейного устройства?

Одна группа подвижных контактов отходит от соответствующих неподвижных контактов, размыкая тем самым цепь. Одновременно другая группа подвижных контактов соприкасается с соответствующими неподвижными контактами, замыкая цепь.

В 30-е гг. XX в. реле и другие составные части телеграфной и телефонной техники были применены для создания сложного вычислительного устройства, которое могло складывать, вычитать, умножать и делить комплексные числа.

Существенным шагом в повышении скорости вычислительных машин было создание сразу вскоре после 2-й мировой войны вычислительной машины на электронных лампах, а затем последовал новый импульс, когда вместо ламп стали применяться транзисторы.

Транзисторы справедливо считаются нервными клетками современных компьютеров. Столь высокую оценку они заслужили благодаря своему быстродействию и надежности. Блокируя и пропуская ток, они дают возможность логическим схемам компьютеров работать в двоичной системе 1 (включение) и 0 (выключение). На этой системе основана обработка информации во всех современных компьютерах.

Германиевые кристаллы величиной с булавочную головку помогли электронике начать движение в сторону все усиливающейся миниатюризации. Это позволяло конструкторам уменьшать габариты машин и внедрять электронно-вычислительную технику в ранее недоступные для нее области.

Хотя изобретение транзистора было выдающимся научным достижением, он не сразу был освоен промышленностью и рынком. Трудности в его производстве приводили к высокой цене продукта. Только к середине 50-х гг. стоимость транзисторов резко снизилась, чему способствовало их изготовление из кремния.

Следующий барьер, который преодолела электроника, связан был с тем, что транзисторы, как и электронные лампы, приходилось вручную соединять и припаивать. Решение проблемы пришло тогда, когда стало ясно: резисторы (сопротивления) и конденсаторы можно делать из того же полупроводникового материала, что и транзисторы, а все компоненты изготавливать на одной и той же полупроводниковой основе. Так была заложена материальная база создания знаменитых интегральных схем. Кремниевый кристалл стал рассматриваться как специфическое «цифровое» устройство, которое реагирует на информацию, передаваемую только в виде двоичных разрядов.

В 1962 г. две американские фирмы начали массовое производство интегральных схем, вскоре прозванных *чипами* (англ. chip *щепка*). «Микрочип», или микропроцессор, это крошечное вычислительное устройство, выгравированное на поверхности кремниевого кристалла. Работой «микрочипа» управляют электрические импульсы, которые открывают и запирают его цепи тысячи и даже миллионы раз в секунду. Каждое открывание или запирание представляет собой единицу информации, закодированную в виде 1 или 0.

Автоматизация производственных процессов является ведущей тенденцией в развитии современной техники. Большую роль в этом развитии играют релейные устройства. Еще совсем недавно они использовались лишь в узкой области техники. Прежде всего это касалось централизации и блокировки на железнодорожном транспорте, а также телеграфных и телефонных станций. В основе подобной техники лежали контактные релейные элементы. Во второй половине XX в. получили широкое применение релейные устройства, основанные на бесконтактных релейных элементах. Развитие электронно-вычислительных машин рельефно выделило ту роль, которую играют релейные устройства в современной технике.

С точки зрения быстродействия релейные устройства этих машин наиболее совершенны.

Сегодня релейные устройства содержат колоссальное количество элементов. Поэтому интуитивные методы их технологического объединения совершенно непригодны. Как быть в этом случае?

Спасение следует искать в математике и логике. Почему?

Сделаем экскурс в историю. Методы математического исследования релейных устройств появились сравнительно недавно. Одним из первых важный вклад в эту область науки сделал американский ученый Клод Элвуд Шеннон (1916 2001) своей статьей, опубликованной в 1938 г. Он построил *исчисление* («исчисление» метафора, ибо математики-теоретики не занимаются калькуляцией), основанное на ряде постулатов, которые описывают основные идеи теории релейных цепей. Кроме того, было показано, что это исчисление вытекает из некоторых элементарных для логики, но пока не для нас положений исчисления высказываний, которое обязано своим происхождением алгебре логики, разработанной в XIX столетии англичанином Джорджем Булем (1815 1864).

Трудами Шеннона и других ученых был заложен фундамент логического синтеза релейных устройств. Ранее же интересные релейные устройства проектировались и строились не на основе хорошо разработанной теории, а благодаря технической смекалке талантливых инженеров и ученых.

Ну а теперь полезно запомнить следующее: проблема релейных устройств не является чисто технической проблемой.

Как это понимать? удивится читатель.

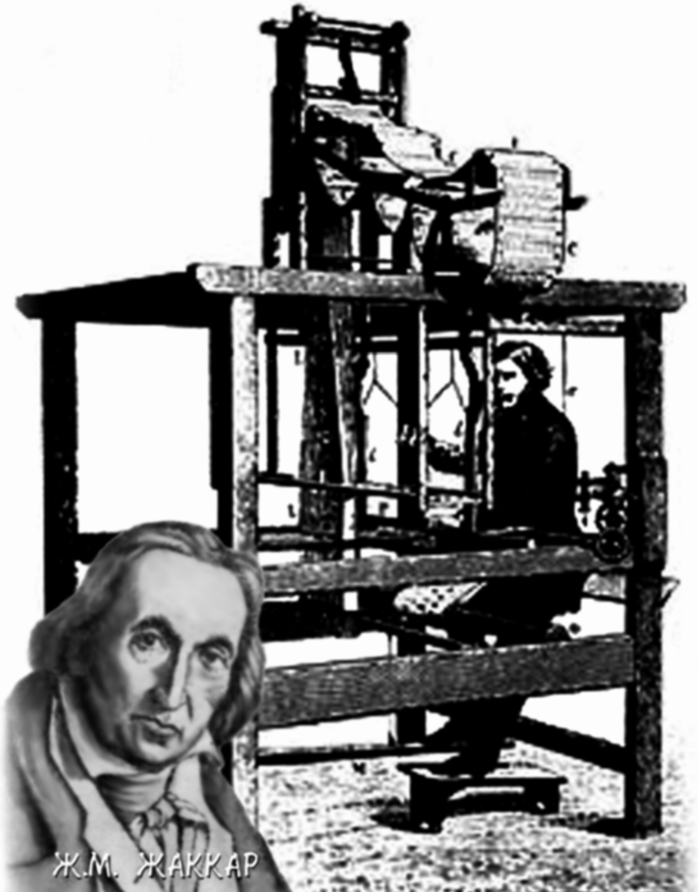
Я отнюдь не оговорился. Все дело в том, что основная функция релейных устройств состоит в оказании помощи человеку, который должен быстро принимать ответственные решения. А ответственные решения вещь нешуточная.

Одно из первых релейных устройств, используемое для сигнализации и блокировки на железных дорогах, не только повысило скорость движения поездов, но и помогло избежать многих аварий, которые были бы неизбежны при работе стрелочника в условиях большой интенсивности движения и наличия сложных пересечений железнодорожных путей. Сегодня человек имеет значительные возможности для решения такого рода задач благодаря релейным устройствам в виде цифровых электронно-вычислительных машин.

Как и благодаря чему действуют подобные машины?

Первые машины этого семейства действовали при помощи инструкций, вводимых последовательно с использованием длинной *перфорированной* (лат. perforare *пробуравливать*; перфорация система отверстий на бумажной ленте или листе картона, расположение которых соответствует коду записываемой информации для ввода ее в цифровую вычислительную машину) бумажной ленты. Закодированная на этой ленте программа предписывала, над какими числами и в какой последовательности нужно выполнять операции.

СТАНОК ЖАККАРА



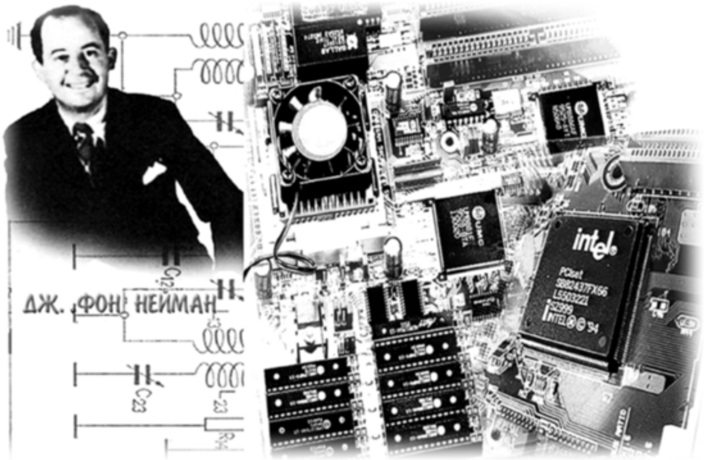
Идея перфорации при своем зарождении не имела ничего общего с механическими вычислительными устройствами. Вообще-то надо заметить, что многие из устройств, которые впервые использовались для ввода и вывода данных, были изобретены задолго до появления компьютеров. Ярким примером служат перфокарты, применявшиеся еще в XVIII столетия для автоматизации ткацкого производства. Если говорить более точно, то все началось с экспериментов по усовершенствованию механизмов, управляющих ткацким станком при помощи перфорационной ленты, перфорационных карт или деревянных барабанов. Во всех трех системах нить поднималась и опускалась в соответствии с наличием или отсутствием отверстий, благодаря чему создавался желаемый рисунок ткани. В 1804 г. французский инженер Жозеф Мари Жаккар (1752 1834) построил полностью автоматизированный станок, способный воспроизводить сложнейшие узоры. Работа станка программировалась колодой перфокарт. Переходя к новому рисунку, оператор заменял одну колоду перфокарт другой.

Вызвав настоящую революцию в ткацком производстве, новый станок сыграл важную роль при создании программ для электронно-вычислительных машин. Этому предшествовали разработки английского математика XIX в. Чарльза Бэббиджа (1791 1871), который решил воспользоваться перфокартами Жаккара для программирования парового механизма, названного *Аналитической машиной*. Однако подлинным отцом современной компьютерной перфокарты является американский изобретатель и предприниматель Герман Холлерит, который в 1890 г. разработал систему табуляции перфокарт, используемых для обработки данных по переписи населения Соединенных Штатов Америки. Позднее он основал компанию по производству табуляционных машин. Со временем эта компания, слившись с несколькими другими фирмами, превратилась в гиганта современной компьютерной индустрии в знаменитую на весь мир корпорацию ИБМ (IBM).

Традиционная перфокарта представляла собой прямоугольник из довольно жесткой бумаги. Информация фиксировалась на карте в виде небольших отверстий, которые располагались в строки и столбцы.

Первой робкой альтернативой перфокартам стала перфорационная бумажная лента. Преимущество этой ленты заключалось в том, что закодированные данные записывались на непрерывный носитель. Однако и бумажная лента имела серьезные недостатки, главным из которых был тот, что она рвалась, особенно при высокой скорости считывания данных.

Большим подспорьем в решении нелегких задач по вводу-выводу данных явилась магнитная лента, применявшаяся ранее в некоторых калькуляторах до создания цифрового компьютера. Правда, нашлись ретрограды, усомнившиеся в эффективности магнитных лент. Они указывали на то, что проверка магнитной ленты требует специальной аппаратуры, тогда



как перфокарты можно проверять вручную. Впрочем, на это унылое ворчание горстки замшелых консерваторов мало кто обращал внимание. Научно-технический прогресс нарастал, и к середине 50-х гг. XX в. специалисты уже вплотную занимались разработкой магнитных дисков для хранения информации. Компьютер становился все более и более «задумчивым».

Следующим шагом в «одушевлении» машины был шаг, связанный с принятием машиной самостоятельных решений. Для этого необходимо было заставить машину возвращаться к более ранней части программы или использовать вспомогательную ленту для помощи в вычислениях.

Можно ли заставить бездушную машину принять решение, а затем действовать на основе этого решения?

Можно, но для этого ее надо запрограммировать соответствующим образом. К сожалению, бумажная лента существенно ограничивает возможности программирования и, следовательно, суживает диапазон решений, принимаемых машиной. Потребовалось изменить машинную память, что и было сделано Джоном (Иоганном) фон Нейманом (1903 1951), одним из самых блестящих умов XX столетия, круг интересов которого включал: анализ проблем теории множеств и математической логики, вопросы квантовой механики и статистической физики, теории автоматов и вычислительной техники, экономической науки и социологии. Нейман предложил вводить программу не на отдельную бумажную ленту, а прямо в память машины, чему благоприятствовал сам принцип функционирования электронно-вычислительных машин, где каждая цифра так называемого двоичного числа отображалась намагничиванием маленького магнитного сердечника. Память вычислительной машины состоит из групп таких сердечников, с помощью которых она может запоминать сотни и тысячи двоичных чисел, увеличивая тем самым возможности принятия самостоятельных решений. Последующий технологический прогресс привел к резкому увеличению объема машинной памяти, что позволило перейти к решению более сложных задач, связанных с принятием решений в неординарных ситуациях. Последнее для нас наиболее значимо.

Наше время по праву может быть названо временем компьютерной революции. Однако компьютеры создаются не ради них самих, а для решения жизненно важных проблем, волнующих человека. К числу таких проблем относится проблема управления сложными производственными и социальными процессами, ранее казавшаяся недоступной рутинному интеллекту машины. Вот вам и деление на рутинные и нетривиальные управленческие задачи. Нетривиальное делается рутинным, а в оценке экстраординарного повышается планка. Все меняется на глазах. Привычные критерии становятся размытыми. Поэтому не стоит слишком задирать нос, наивно полагаясь на хитрость человеческого разума, якобы способного обойтись без технических инструментов в решении самых жгучих управленческих проблем.

Всякому здравомыслящему менеджеру ясно, что современная система управления так или иначе связана с использованием компьютеров. В последние десятилетия в сферу научного осмысления проблем управления и планирования все настойчивее вторгается математика. Это обусловлено широким применением современных технических средств управления. Примером такого рода тенденций в научном менеджменте (теории управления социально-экономическими, научно-техническими и культурными процессами) служит исследование проблем организации и управления, получившее название *исследование операций*. Это исследовательское направление сформировалось под влиянием кибернетики и практики использования ее достижений в управленческой деятельности. Важное место здесь отводится построению математических моделей управления. Поэтому данный тип исследований рассматривается некоторыми учеными в качестве особого раздела прикладной математики.

Какое отношение имеет сказанное к нашей теме?

Самое прямое. Релейные устройства частный случай технической системы управления. Следовательно, теория логического синтеза релейных устройств вносит свою лепту в развитие теории управления и может представлять интерес не только для кибернетиков, но и для теоретиков менеджмента.

Необходимо иметь в виду, что релейное устройство допустимо рассматривать как некоторый преобразователь, который получает информацию одного вида и выдает информацию другого вида. Релейное устройство в качестве преобразователя информации должно функционировать в соответствии с определенными правилами, которые закладываются в него проектировщиком. Иными словами говоря, в задачу проектировщика входит установление некоторой системы строгих формальных правил, что, между прочим, является отличительной чертой формальной логики.

Правильно спроектированное релейное устройство есть своего рода *логическое устройство*, которое реализует логические соотношения между входами и выходами, установленными проектировщиком.

В постулатах и теоремах так называемой *алгебраической логики* релейных цепей цифры и переменные подчиняются правилам, которые в большинстве случаев совпадают с правилами обычной алгебры и арифметики. Однако существует ряд выражений, которые не подчиняются обычным правилам. Почему?

Увы, но переменные в алгебре релейных цепей не имеют численного значения. Впрочем, это и к лучшему. Инженер всегда может твердо сказать, что цепь замкнута или разомкнута, не философствуя при ответах на вопрос о том, насколько она замкнута или насколько она разомкнута. Вот почему алгебра релейных цепей является не алгеброй чисел, а *алгеброй состояний*. Пусть читатель не удивляется, но используемые в данном случае цифры 0 и 1 не выражают количественных соотношений. Они символизируют только два возможных состояния проводимости цепь либо замкнута, либо разомкнута. Цифру 0, равно как и 1, можно использовать и для представления разомкнутого состояния цепи, и для представления замкнутой цепи. Кому как нравится. Привязанность к стереотипам мышления в данном случае только мешает понять самые простые вещи, а именно: бездушной машине в высшей степени безразлично, какой смысл люди вкладывают в свои цифры.

Познакомимся теперь детальнее с методами, которыми пользуются теоретически мыслящие инженеры. Открыв соответствующий учебник, читатель узнает, что простыми методами записи условий работы релейных устройств являются так называемые *таблицы* (*матрицы*) *состояний*. Что это такое и как они составляются?

Таблица состояний это своего рода градусник. С помощью такого «градусника» каждая из n (многочисленных) входных переменных может принимать два и только два значения 0 или 1 (разомкнуто или замкнуто). Соответственно, число возможных комбинаций переменных будет равно 2^n. Эти комбинации удобно записывать в виде таблицы, используя 1 для представления наличия входного воздействия и 0 для его отсутствия.

Рассмотрим с помощью таблицы состояний возможные комбинации трех переменных x, y и z, составленные из цифр 0 и 1 и расположенные в виде последовательности возрастающих двоичных чисел (табл. 1).

Таблица 1

x	y	z
0	0	0
0	0	1
0	1	0
0	1	1
1	0	0
1	0	1
1	1	0
1	1	1

Данная табличная запись включает в себя все возможные комбинации трех входных переменных. Однако для полного описания условий работы релейного устройства необходимо добавить еще один столбец, отражающий технологическую взаимосвязь указанных переменных. В дополнительном столбце следует указать, какое значение (1 или 0) релейной функции проводимости соответствует каждой из строк таблицы. Полная табличная запись называется *таблицей состояний релейного устройства.*

Существенной особенностью таблицы состояний является то, что она обеспечивает проектировщику автоматическую проверку полноты описания работы релейного устройства. Эта таблица позволяет анализировать контактную технологическую структуру путем записи в систематическом порядке состояний ее выходов для всех возможных состояний входов. Что из этого следует?

Из этого следует весьма важный вывод, а именно: технические проекты должны базироваться на прочном теоретическом фундаменте, каковым в нашем случае является математическая логика, ибо явно просматривается аналогия между законами функционирования контактных электрических цепей и законами логики. Различные ученые независимо друг от друга пришли к выводу, что в решении электроинженерных задач можно использовать аппарат современной математической логики. Время не только подтвердило эти выводы, но и возвело логику в ранг дисциплины, без использования которой невозможно представить современный научно-технический прогресс.

Хотя логика зародилась в недрах философии и много веков считалась неотъемлемой частью спекулятивного философского знания, но сейчас книги по логике меньше всего напоминают трактаты философов. Я не хочу умалять заслуги философов прошлого, используя слово «спекулятивное». В данном случае подчеркивается лишь тот факт, что философия была созерцательной наукой, адепты которой не обременяли себя утилитарными целями. Между прочим, если читатель не поленится и покопается в исторических справочниках, то узнает, что исходным значением слова «спекуляция» было *наблюдение*, *размышление*. В словарях это значение всегда ставится на первое место. Например, в «Оксфордском словаре» под словом «спекулировать» понимается *проводить исследование, размышлять, создавать теорию* или *гипотезу*.

Но я отвлекся от главного. Главным же является то, что причинами всевозрастающего значения математической логики в глазах инженеров и всех тех, кто имеет дело с современной вычислительной техникой, служат стремительное развитие автоматики, потребности теории и практики создания компьютеров и различных управляющих устройств, не говоря уже об интересах «чистых» математиков. Особую роль играет прогресс в области кибернетики, которая стимулирует математиков на решение сложных технических задач.

Вследствие этого, как считают специалисты, произошел своеобразный ренессанс доньютоновской математики, ориентированной на конечные математические объекты, а не на поиск теоретических основ математического знания. Доньютоновская, или, как еще говорят, *конечная математика* наиболее близка технологии цифровых электронно-вычислительных машин, работа которых имеет дискретный (!) характер. Правда, не стоит слишком увлекаться сравнениями, забывая, что современная конечная математика имеет мало общего с разработками предшественников И. Ньютона (1643 1727). Наши современники совершенно по-новому решают старые задачи. В этом деле большую помощь им оказывает аппарат математической логики.

Отвлекаясь от частностей, можно сказать, что электронно-вычислительная машина (ЭВМ) представляет, в сущности, систему переключателей, имеющих два состояния *закрытое* и *открытое*. Эти два состояния соответствуют числовым значениям. Поскольку таких состояний только два, постольку необходимо найти способ преобразования чисел из десятичной системы в двоичную систему, в которой только и может работать нынешняя ЭВМ.

Известная всем нам система счисления называется *позиционной*. Почему она так называется?

В данной системе счисления каждая цифра занимает строго определенную позицию. Если какая-то цифра сдвигается на один знак влево, то увеличивает свое значение в 10 раз. Эта же цифра, будучи сдвинутой на один знак вправо, составляет лишь $^1/_{10}$ от своего предыдущего значения.

Десятичная система использует 10 цифр: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

С математической точки зрения наиболее удобной является двоичная система счисления, оперирующая только двумя цифрами 0 и 1.

Число различных цифр, используемых в любой системе счисления, называется *основанием системы*

ТАБЛИЦА 2: ДВОИЧНАЯ И ДЕСЯТИЧНАЯ СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ

Система счисления	Двоичная	Десятичная
Основание	2	10
Используемые цифры	0, 1	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9
Запись чисел	00000	0000
	00001	0001
	00010	0002
	00011	0003
	00100	0004
	00101	0005
	00110	0006
	00111	0007
	01000	0008
	01001	0009
	01010	0010
	01011	0011
	01100	0012
	01101	0013
	01110	0014
	01111	0015
	10000	0016
	10001	0017
	10010	0018
	10011	0019
	10100	0020
	10101	0021
	10110	0022
	10111	0023
	11000	0024

счисления. Например, в десятичной системе основание равно 10, а в двоичной   2.

В каждой системе счисления цифры упорядочены определенным образом в соответствии с их значениями (позициями). Продвижением цифры принято называть замену ее следующей по величине. Так, в десятичной системе продвинуть цифру 0   значит заменить ее цифрой 1, продвинуть цифру 1   значит заменить ее цифрой 2 и т. д. В двоичной системе продвижение 0 означает замену его на 1, а продвижение 1 означает замену ее на 0.

Места слева от первой цифры всякого числа можно считать заполненными нулями в любом удобном для нас количестве. Математики условились считать, что в каждой системе счисления первым целым числом является число 0000. Применяя принятое правило счета, они утверждают, что второе целое число в любой системе счисления записывается в виде 0001. Следующие после 0001 целые числа в разных системах счисления имеют разные значения. Так, в десятичной системе это будет 0002, а в двоичной   0010.

Из приведенной таблицы (табл. 2) видно, что число 10101 в двоичной системе равно числу 21 в десятичной системе. Это можно записать, используя внизу цифр индексы для обозначения основания системы счисления, следующим образом: $10101_2 = 21_{10}$.

Кроме таблиц существует простой метод перевода чисел из одной системы в другую. Так, чтобы перевести любое целое число, записанное в некоторой системе счисления, в эквивалентное ему целое число в десятичной системе, нужно представить данное целое число в виде многочлена, являющего собой сумму степеней основания (записанного в десятичной системе) с коэффициентами, которыми служат цифры исходного числа, и сложить члены этого многочлена по правилам сложения чисел в десятичной системе счисления. Чтобы сказанное сделать более ясным, обратимся к примерам.

Пусть *а*, *б*, *в*, ... , *к*   цифры, используемые в некой системе счисления с основанием *р*. Тогда, например, число *бгдабжбар* будет выглядеть в десятичной системе следующим образом:

$б \cdot р^{7} + г \cdot р^{6} + д \cdot р^{5} + а \cdot р^{4} + б \cdot р^{3} + ж \cdot р^{2} + б \cdot р^{1} + а \cdot р^{0}$.

Правила сложения, вычитания, умножения и деления применимы к различным позиционным системам счисления. Например, таблицы сложения и умножения выглядят в двоичной системе следующим образом:

$0 + 0 = 0$	$0 + 1 = 1$	$1 + 0 = 1$	$1 + 1 = 10$
$0 \cdot 0 = 0$	$0 \cdot 1 = 0$	$1 \cdot 0 = 0$	$1 \cdot 1 = 1$

В кибернетических устройствах используются помимо двоичной системы счисления и другие виды числовых кодов. Основная причина, по которой в вычислительной технике используется двоичный код (когда отверстие, пробитое на определенном участке перфоленты, представляет собой запись единицы, а его отсутствие   запись нуля), заключается в той относительной легкости, благодаря которой можно аппаратно реализовать всего лишь два различных состояния.

В уже упоминавшейся бинарной булевой алгебре, имеющей непосредственное отношение к анализу электрических схем, роль переменных могут играть контакты, которые мы обозначим малыми буквами латинского алфавита (*a, b, c, ...*). Каждая из переменных может принимать одно и только одно значение (из двух возможных) (см. рис. 3).

Произведением двух контактов (*a, b*) назовем схему, полученную в результате их последовательного соединения. Тогда будем иметь следующее: схема замкнута (равна 1) только в том случае, когда оба контакта замкнуты (равны 1) (рис. 4), т. е. цепь $a \cdot b$ пропускает ток лишь в том случае, если пропускают ток оба ее звена a и b.

Суммой двух контактов (*a, b*) назовем схему, образованную при их параллельном соединении. В результате

Рис. 3

Рис. 4

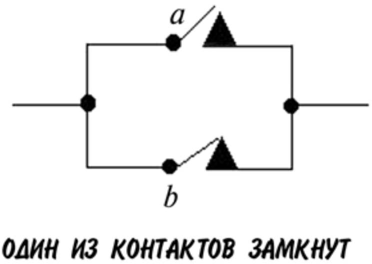


Рис. 5

будем иметь следующее: схема замкнута (равна 1) только в том случае, когда замкнут (равен 1) хотя бы один из образующих схему контактов (рис. 5), т. е. сумма $a + b$ пропускает ток только в том случае, если пропускает ток хотя бы один из элементов (a или b).

Основной задачей алгебры контактных схем является задача разыскания схем, логически эквивалентных данной схеме. Это необходимо для того, чтобы выбрать из всех возможных вариантов наиболее простой. Поскольку универсального критерия простоты схемы не существует, постольку в качестве одного из критериев простоты принимается следующий: схема будет самой простой среди всех логически ей эквивалентных, если соответствующее ей алгебраическое выражение содержит наименьшее по сравнению с остальными число вхождений букв (переменных). Тем самым задача упрощения схем сводится к задаче упрощения их переключательных функций.

Условимся считать две контактные схемы эквивалентными (равными), если при одних и тех же значениях входящих в них контактов они будут одновременно замкнуты или разомкнуты. Говоря иначе, две схемы эквивалентны тогда и только тогда, когда эквивалентны представляющие их переключательные функции.

Рассмотрим на конкретном примере, как используется логико-алгебраический инструментарий для анализа и построения контактных схем (рис. 6, 7, 8).

Применяя известный нам со школьной скамьи дистрибутивный закон (вынесение за скобки) к выражению $ac + ad + bc + bd$, мы получим выражение $a\ (c + d) + b\ (c + d)$, изображаемое более простой схемой (рис. 7), логически эквивалентной первой (рис. 6).

Вынося за скобки $(c + d)$, получим выражение $(a + b) \cdot (c + d)$, которому соответствует схема (рис. 8), самая простая из всех трех логически эквивалентных схем.

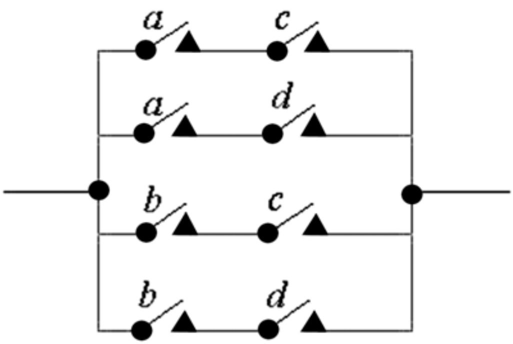


Рис. 6

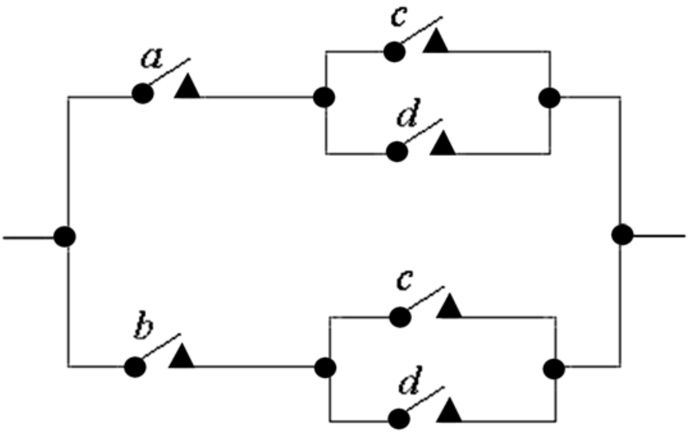


Рис. 7.

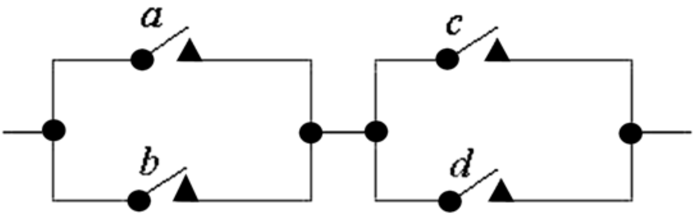


Рис. 8

Практическое использование логики при проектировании цепей состоит не в деталировке схемы, а в выборе *структуры контура*. Поэтому главная задача логического исчисления (если говорить языком математической логики) заключается в выявлении структуры взаимоотношений между членами некоторого множества.

К этому загадочному слову «множество» мы, уважаемый читатель, вернемся еще не раз, а сейчас вооружимся следующим знанием. Необходимая для проектирования цепей *алгебра множеств* во многом отлична от традиционных алгебраических систем. Дело в том, что ряд законов обычной алгебры теряет силу при переходе к алгебре множеств. В связи с этим операции над множествами часто называют не суммой или произведением множеств, а *объединением* и *пересечением*, обозначая эти операции специальными знаками $\cup$ и $\cap$, которые не подсказывают аналогий с операциями над числами.

По имени математика, впервые рассмотревшего алгебраические системы, подобные алгебре множеств, указанные системы называют *алгебрами Буля*. Познакомимся с этим талантливым математиком и логиком.

Джордж Буль (1815 1864), автор всемирно известных произведений «Математический анализ логики» (1847) и «Исследование законов мысли» (1854), родился в городе Линкольне (Англия) в семье мелкого торговца.

Об Англии того времени можно сказать словами английского литератора Ч. Диккенса (1812 1870), писавшего, что бедный человек с маленькими заработками и большой семьей чувствует себя неуютно под капризным английским небом, денег ему хватает в обрез, только чтобы утолить голод сегодня, о завтрашнем дне он не в состоянии позаботиться.

Материальное положение родителей Джорджа было неблагополучным, и они не смогли дать своему сыну систематического образования. Ученичество ограничилось начальными классами школы для детей бедняков. В этих школах учителя смотрели на учеников как на своих исконных и природных врагов.

Несмотря на угрюмый быт бедняцкой школы, Джордж изо всех сил стремился получить образование. Влекомый этой целью, он самостоятельно овладевает латынью и греческим. В двенадцать лет он уже печатает в местных изданиях свои переводы сочинений древнеримского поэта Горация (65 г. до н. э.   8 г. до н. э.).

Трудовой путь Буля начался рано. После длительных мытарств ему удалось открыть небольшую начальную школу. Учительствовать в те времена было непросто. В обществе на школьного учителя часто смотрели как на неудачника, которому в жизни не повезло ни на богатого родственника с его многообещающим завещанием, ни на тепленькое место канцелярского чиновника.

Буль стойко нес свой крест, стараясь не замечать высокомерных усмешек и пренебрежительных взглядов. Страсть к науке делала его невосприимчивым к ухмылкам глупцов. Им все больше овладевала мысль постичь тайны математического знания. И вот он уже штудирует труды Пьера Симона Лапласа (1749 1827) и Жозефа Луи Лагранжа (1736 1813). Так закладывался фундамент нового взгляда на связь математики с логикой.

Оригинальные математические идеи Буля были по достоинству оценены основателем «Кембриджского математического журнала» Д. Грегори и талантливым кембриджским математиком А. де Морганом (1806 1871), который глубоко интересовался вопросами логического обоснования математики. Благодаря их поддержке Буль стал в 1849 г. профессором математики католического колледжа в ирландском городе Корк, где провел последние пятнадцать лет своей жизни.

В 1854 г. вышло в свет главное произведение Буля под названием «Исследование законов мысли, на которых основаны математические теории логики и вероятностей». В этой книге представлена та алгебраическая система, которую сегодня называют *алгеброй высказываний*.

Что же такое булева алгебра и каково ее отношение к логике?

Изучение оснований математики, интенсивно проводимое в XIX столетии, не могло бы успешно развиваться без усилий, направленных на систематизацию тех частей логики, которые касаются сцепления математических выражений в их доказательную последовательность. Поэтому историю теории множеств, включая булеву алгебру множеств, и формализации математики нельзя отделить от истории математической логики. Такова разделяемая мной точка зрения группы математиков, в большинстве французских, выступивших в свое время в научной литературе под общим псевдонимом Н. Бурбаки.

Знакомясь с историей вопроса, мы узнаем, что развитие алгебры делало очевидной аналогию между правилами формальной логики и правилами алгебры. Эта аналогия базировалась на том общем для данных наук свойстве, которое состоит в ориентации логического и алгебраического анализов на некие объекты, от природы которых можно спокойно отвлечься. Характерно, что с XVII в., когда алгебраические обозначения приняли свою окончательную форму, начались попытки использования символических записей для выражения логических операций. Наиболее многообещающей из них была попытка выдающегося немецкого философа и математика Г. В. Лейбница (1646 1716). Он стремился создать символическую логику для формализации языка и научного мышления с целью безошибочного получения различных теорем науки. Однако Лейбницу не удалось полностью освободиться от груза традиции. Поэтому алгебра логики им так и не была создана.

И тем не менее, очень не просто устроен этот «лучший из миров».

В январе 1689 г. Лейбниц в качестве придворного историографа направился в Рим, где его приняли с почетом. Антикварий и папский секретарь Фабретти показал ему христианские катакомбы и хранившуюся в сосудах кровь мучеников.

На папский двор Лейбниц произвел такое благоприятное впечатление, что ему предложили занять должность хранителя ватиканской библиотеки. Эта должность часто служила ступенью к кардинальскому сану. Предложение было чрезвычайно заманчиво, но неосуществимо, так как от Лейбница-лютеранина требовался переход в лоно римской церкви.

Полугодичное пребывание в Риме расширило круг знакомств Лейбница и обогатило его научными сведениями. Он имел возможность пользоваться ватиканской библиотекой, стал членом Римского физико-математического общества, познакомился с иезуитским патером Клавдием Филиппом Гримальди, недавно возвратившимся из Китая.

Еще до знакомства с Гримальди Лейбниц живо интересовался Китаем. От патера он узнал о древнем китайском счислении. Рассказы миссионера навели его на мысль изобрести новую арифметику, в которой достаточно двух цифр 1 и 0. Эта двоичная система счисления настолько понравилась философу, что он усмотрел в ней нечто глубоко символическое. По его мнению, двоичная система показывает как бы воочию, что единицы (монады) достаточно для построения полной картины Вселенной, ибо комбинации единицы и нуля, дающие всевозможные числа, это символический аналог комбинаций монад и небытия, дающих всевозможные миры.

Гений Лейбница заявил о себе и в этот раз, наметив философско-теоретический путь к решению сложных кибернетических задач.

И все же несомненным создателем современной *символической логики* считается именно Буль. Основная идея его заключалась в том, что в логике надо иметь дело не с конкретными значениями высказываний, а с абстрактными множествами неких объектов в качестве весьма своеобразного смыслового (скорее потенциального, а не актуального) содержания теоретических высказываний. Вследствие этого форма высказываний лишается своей специфики, обусловленной, например, использованием выражений естественного языка, и приобретает алгебраический вид.

Недостатком логических построений Буля было не движение от математики (алгебры) к логике, а отсутствие обратного движения от алгебры логики к математике. Очевидно, он недопонимал пользу от применения полученных логических результатов к анализу основ и проблем математики. Этот недостаток был вскоре исправлен другими логиками и математиками, которые попытались приспособить построение логических формализмов именно к математической науке. На данном поприще одними из первых отличились немецкий математик и логик Готлоб Фреге (1848 1925), основоположник так называемого *логицизма* и *логической семантики*, и американский ученый Чарльз Сандерс Пирс (1839 1914). Они, независимо друг от друга, ввели в логику употребление переменных величин и кванторов (особых логических операторов). Что касается Фреге, о котором разговор будет впереди, он четко ориентировал логику на анализ оснований математики. В частности, с помощью символической логики он стремился обосновать арифметику.

Как понятие множества входит в логику?

Данное понятие издавна использовалось в логике, хотя и не подвергалось точному анализу. Так называемые объемы терминов (понятий в традиционной логике) это множества предметов, обозначенных данными терминами (подпадающих под данные понятия). Отношения между объемами терминов это отношения между множествами или классами.

С понятием «класс» связаны *процедуры классификации*.

Любая классификация, или *разбиение на классы*, предполагает наличие классифицируемой предметной области, т. е. предполагает наличие совокупности классифицируемых предметов, обладающих определенными признаками (свойствами).

Классификацию можно осуществлять несколькими способами. Одним из таких способов является *родовидовая классификация* предметов. В этом случае берется некий универсальный (всеобщий) класс всех предметов и выбираются из него те предметы, которые обладают только им присущими свойствами (признаками), т. е. обладают отличительными особенностями. Класс всех предметов по отношению к выделенному классу предметов с определенными свойствами является *родом*, а выделенный класс по отношению к классу всех предметов является *видом*. Присущие более узкому классу отличительные особенности называются его *видовыми отличиями*.

Проиллюстрирую сказанное на следующем примере. Допустим, из универсального класса всех реально существующих предметов мы выбрали только те, которые обладают свойством «философски мыслить, рассуждать и учить философии». Тем самым образуется класс «философов». В этом случае универсальный класс всех реально существующих предметов будет рассматриваться как род, класс «философов»   как вид, а «философски мыслить, рассуждать и учить философии»   как видовое отличие класса «философов».

В принципе, можно отвлечься от атрибута реального существования. Тогда классы будут делиться на *непустые* и *пустые*.

Возвращаясь к примеру с философами, предложенную классификацию можно проиллюстрировать так. В случае замены видовой отличительной характеристики непустого класса «философски мыслить, рассуждать и учить» на видовую отличительную характеристику «сумбурно мыслить, сквернословить и бездельничать» мы получим пустой класс «философов, сумбурно мыслящих, сквернословящих и бездельничающих».

Кроме непустых и пустых классов существуют еще классы, содержащие всего лишь один элемент. Эти классы называются *единичными*. Например, класс «всех планет Солнечной системы, населенных людьми» содержит лишь один элемент   планету Земля, и поэтому является единичным.

Подобные классификации сыграли исключительно важную роль в развитии теоретико-множественных идей и методов, без использования которых невозможно представить себе ни современную математику, ни современную логику, а также невозможно конструктивно решать вопросы, касающиеся теории абстракции. Поэтому вкратце охарактеризую теорию множеств.

Раздел математики, в котором изучаются свойства множеств, называется *теорией множеств*.

Хорошо известно, что логики используют такие базисные для своей науки понятия, как «все», «ни один», «некоторые», «существует». Рассмотреть эти понятия нам еще предстоит. Сейчас же только отмечу, что с помощью слова «все» мы можем построить следующее высказывание: «Все x, для которых определена функция f (x) (например: «x умеет играть в покер»), образуют множество». В данном случае утверждается, что имеется область определения так называемой *пропозициональной функции f.*

Что такое пропозиция и пропозициональная функция?

Этот вопрос несколько уводит нас в сторону, но, тем не менее, я считаю необходимым ответить на него здесь, чтобы потом не отвлекаться от главного.

По словам современного английского лингвиста Дж. Лайонза, термин «пропозиция» используется в английском языке в смысле *предложения*, или *утверждения.* В результате некоторые авторы отождествляют пропозицию с повествовательным видом предложения, а другие с различного рода утверждениями.

Что понимает сам Лайонз под пропозицией?

По его мнению, пропозиция это то, что выражается с помощью повествовательного предложения для утверждения чего-либо.

Различные предложения данного языка могут выражать одну и ту же пропозицию. Бывает и наоборот, когда одно предложение выражает несколько пропозиций (например, писатель выражает одно, а читатели понимают другое).

В более широком контексте пропозицию можно рассматривать как некоторую *теоретическую конструкцию*, как некоторую *инвариантную сущность*, которая не меняется при изменении языковых систем.

Приблизительно такая же характеристика будет дана понятию «высказывание», когда мы займемся вопросами так называемой *логики высказываний*. Но уже сейчас, чтобы избежать в дальнейшем путаницы, можно сказать: «высказывание» и «пропозиция» синонимы. Поэтому понятие «пропозициональная функция» соответствует понятиям «функция-высказывание» (А. Тарский), «высказывательная функция» (В. Зегет).

Пропозициональная функция это выражение, содержащее переменный символ *x*. Чтобы такое выражение обрело смысл, вместо *x* следует подставить что-то более определенное, как-то: *Иван, птичка-синичка, 13, яблоко* и т. д. Например, пропозициональной функцией может быть выражение «*x* умеет играть в покер». Если вместо *x* подставить имя *Иван*, получится вполне осмысленное высказывание (истинное или ложное).

Таким образом, благодаря понятию пропозициональной функции в сферу логики проникает понятие множества. Для нас, ищущих связь логики с математикой, это самое главное.

Возникновение и развитие теории множеств связано с исследованием бесконечных множеств. Создателем этого раздела математики был немецкий ученый Георг Кантор (1845 1918).

Родился Кантор 3 марта 1845 г. в Санкт-Петербурге. Его отец, Георг Вольдемар Кантор, был еврейским торговец из Дании, принявшим протестантство, тогда как мать, Мария Анна Бем, принадлежала к римско-католической церкви; отец Марии Бем, давно обрусевший иноземец, служил капельмейстером Императорской оперы в Петербурге. В столице Российской империи Георг Вольдемар владел фирмой посреднических услуг и выступал в роли брокера на Петербургской фондовой бирже.

Семейство Канторов прожило в России одиннадцать лет, пока состояние здоровье отца не вынудило их покинуть Петербург с его скверным климатом и перебраться в 1856 г. в Германию, где они поселились во Франкфурте-на-Майне.

Все дети Канторов были по-своему талантливы, талантлив был и Георг, рано проявивший себя в математике. Его отец радовался этому подарку судьбы, но, будучи прагматиком, пытался направить Георга на инженерную стезю. Георг нисколько не был счастлив от подобной жизненной перспективы. Обладая мягким характером, он какое-то время не решался противиться пожеланиям отца. И все же, незадолго до окончания школы, Георг набрался храбрости и принялся умалять отца разрешить ему стать математиком. В конце концов Кантор-старший смилостивился и пошел навстречу просьбам сына.

В 1862 г. Георг Кантор поступил в Цюрихский университет, а в следующем году, после смерти отца, перебрался в Берлинский университет. В Берлине он изучил математику, философию и физику, слушал лекции таких крупных математиков, как Л. Кронекер (1823 1891) и К. Т. В. Вейерштрасс (1815 1897). После защиты докторской в 1867 г. Кантор не смог найти сносно оплачиваемую работу и вынужден был некоторое время читать неоплачиваемые лекции в качестве приват-доцента.

С 1869 по 1905 г. Кантор преподавал в университете немецкого города Галле, с 1972 г. как адъюнкт-профессор этого университета, а с 1979 г. как профессор.

В 1874 г. он женился. Женитьба принесла ему шестерых детей.

Вынужденный отстаивать в крайне острой и непрекращающейся полемике с коллегами свою теорию множеств, Кантор перенес ряд тяжелых нервных срывов, первый из которых датируется 1884 г. Эти психические потрясения, нарастая и накапливаясь, тормозили творческую активность и заставляли ученого много времени тратить на лечение в психиатрических учреждениях. В результате научная и преподавательская работа с 1905 г. почти полностью прекратилась.

Слишком поздно пришел к первопроходцу научный триумф, чтобы можно было им ясно и осознанно насладиться. В 1904 г. Кантора наградило медалью Лондонское Королевское Общество (Лондонская Академия наук); он стал членом Лондонского Математического Общества и Общества Наук в Гёттингене.

Умер Кантор в психиатрической больнице 6 января 1918 г.

Научные публикации Кантора начались в 1870 г. Первые работы были посвящены тригонометрическим рядам. В ходе этих исследований он создал теорию иррациональных чисел, получившую широкое признание. В 1874 г. доказал, что множество всех действительных чисел является несчетным, а в 1878 г. сформулировал понятие *мощности множества*. В работах 1879 1884 гг. Кантор изложил принципы своего учения о бесконечности, основанного на представлении о существенном различии между понятиями *потенциальной* и *актуальной бесконечности*, из которых первая означает переменную конечную величину, возрастающую неограниченно, тогда как вторая   фиксированную, постоянную величину, которая превосходит все конечные величины». Основываясь на концепции актуальной бесконечности, Кантор построил теорию трансфинитных кардинальных чисел и обстоятельно изложил ее в работе «Основы общего учения о многообразиях» (1883).

Теоретико-множественные рассуждения Кантора, как считают специалисты, явились продолжением давних схоластических спекуляций по поводу природы бесконечного. Кантор не только знал это, но и отстаивал признание актуальной бесконечности Блаженным Августином (354 430), известным христианским богословом и крупным церковным деятелем. Правда, сам Кантор должен был напряженно защищаться от яростных нападок многих математиков, которые отказывались принять бесконечное иначе, как *процесс*, т. е. как *потенциальную бесконечность*, выражаемую значком ∞.

Любопытно отметить, что иезуиты использовали канторовскую теорию множеств, базирующуюся на понятии «актуальная бесконечность», чтобы доказать существование Бога и Святой Троицы. Однако Кантор, будучи превосходным знатоком богословия, быстро дистанцировался от такого рода «доказательств».

Здесь вполне уместно сообщить читателю, что математики до Кантора ужасно недолюбливали понятие бесконечности. Даже великий К. Ф. Гаусс (1777 1855) заявлял, что понятие бесконечности не должно использоваться как серьезная математическая ценность.

Большинство математиков послушно следовало его советам. Кантор же оказался весьма строптив. Он рассмотрел бесконечные множества не как потенциально осуществимые (скажем, какое бы большое число вы не назовете, всегда можно назвать еще большее), что было интуитивно ясно и привычно, но как вполне законченные и самобытные сущности, имеющие актуальное, хотя и бесконечное число членов. Ученый назвал эти актуально бесконечные числа *трансфинитными числами*, т. е. числами, находящимися за пределами конечного. За свою теорию трансфинитных кардинальных чисел он получил статус полного профессора в 1879 г.

Как правило, смелые новаторские идеи и теории часто встречаются в штыки научным сообществом. Не избежала этой участи и канторовская теория множеств. Многие современные Кантору математики не приняли его инновационные идеи, разрушающие привычные математические представления, покушающиеся на «безоблачный математический рай». Например, известный французский математик, физик и философ Ж. А. Пуанкаре (1854 1912), выражая неодобрение математиков-традиционалистов, заявлял, что теория множеств Кантора будет рассматриваться будущими поколениями как «болезнь, с которой в конце концов справились». Тем не менее он был более «любезен», нежели другой критик канторовской теории множеств, Леопольд Кронекер, считавший, что единственно подлинными числами в границах математики являются целые числа, а отрицательные и особенно иррациональные числа не имеют никакого научного статуса. На съезде математиков в Берлине в 1886 г. он заявил: «Целые числа сотворил Господь Бог, а все прочее дело людских рук». Используя свой авторитет в качестве профессора Берлинского университета, Кронекер сделал все, чтобы не только дискредитировать идеи Кантора, но и поломать его карьеру. Например, при активном участии Кронекера тормозились или вовсе не публиковались работы Кантора и его последователей,

прочно блокировался переход Кантора в Берлинский университет.

Однако не все математики были антагонистами Кантора. Некоторые великие ученые типа Карла Вейерштрасса и Ю. В. Р. Дедекинда (1831 1916) поддержали его идеи и парировали нападки Кронекера.

Хотя работы Кантора встретили сопротивление со стороны многих современных ему математиков, считавших, что бесконечность никогда не войдет в состав точных математических понятий, но, тем не менее, теория множеств продолжала развиваться и вскоре стала основной математической дисциплиной, получившей широкое применение в различных разделах математики.

Возникновению и развитию канторовской теории множеств предшествовала разработка некоторых теоретико-множественных понятий в алгебре множеств Буля.

Алгебра Буля служит для описания операций над множествами и высказываниями. Правда, операции над множествами были введены не им, а Кантором. Сопоставление же операций Буля над высказываниями с операциями Кантора над множествами показало: операции над высказываниями и множествами обладают общими свойствами, к числу которых относятся **коммутативность** (*переместительность*), **ассоциативность** (*сочетательность*), **дистрибутивность** (*распределительность*). Оказалось также, что некоторые свойства этих операций не похожи на свойства операций над числами. Кстати, Буль первым высказал мысль о том, что операции с числами или величинами не характеризуют существо математики. По его мнению, возможны такие разделы этой науки, которые не имеют дела с числами и величинами. Примером подобного рода служит теория множеств, разрабатываемая как своеобразная алгебра, где переменные не означают ни чисел, ни величин. Эти идеи не были до конца реализованы их автором, так как Буль разрабатывал свою алгебру логики в форме, обычной для алгебры того времени, а не в форме дедуктивной системы.

Современные математики разделяют взгляды Буля. Ошибочно считается, говорят они, что вычисление главное, чем занимаются математики. На самом же деле в «чистой» математике вычисления встречаются крайне редко. Чаще всего математические вычисления имеют место там, где собственно математическая работа закончена и речь идет лишь о том, чтобы, руководствуясь известными правилами, выполнить определенный объем сугубо механической работы.

Элементами булевой алгебры множеств являются не числа, а некоторые объекты, природа которых игнорируется. Существенно, что все элементы алгебры, называемые множествами, и являются частями одного и того же множества. Это исходное множество называется *универсальным множеством* и часто обозначается большой латинской буквой U (первая буква латинского слова «universalis» *общий, всеобщий*). В естественном языке универсальное множество выражается словами «все», «всякий», «любой», «никакой».

В различных науках имеются свои универсальные множества изучаемых предметов. Так, например, в арифметике натуральных чисел универсальным множеством является множество всех натуральных чисел.

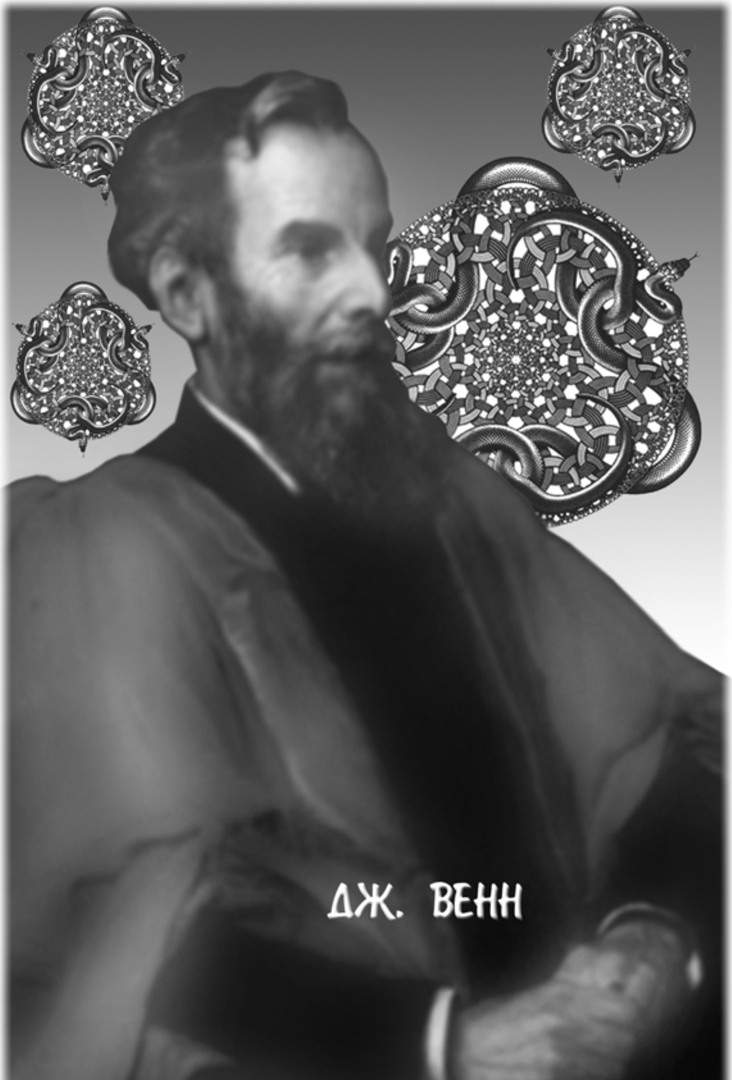
Геометрическим символом универсального множества является прямоугольник. Некоторые формулы алгебры множеств графически выражаются с помощью этого прямоугольника и кругов. Графический метод проверки формул алгебры множеств называется *методом диаграмм Венна*, где множества, за исключением универсального множества, символизируются с помощью кругов.

Этот метод диаграмм назван по имени его автора, англичанина Джона Венна (1834 1923), родившегося 4 августа 1834 г. в Драйпуле, близ Халла (графство Йоркшир). Получив строгое англиканское воспитание, Джон по воле родителей и своей собственной в 1853 г. был зачислен в духовный колледж Кембриджского университета, стены которого он покинул в 1857 г., чтобы стать викарием в Мортлайке.

В 1862 г. Венн возвращается в Кембридж и начинает читать моральную философию в университете. Однако его все больше тянет не к этике, а к логике и математике. Он увлекается булевой математической логикой и пытается ее развить на свой манер, закладывая основы популярного в будущем метода диаграмм. В 1866 г. им была написана «Логика случайности» («Logic of Chance»), которую известный английский экономист Дж. М. Кейнс (1883 1946) оценивал очень высоко и считал, что она оказала сильное влияние на развитие теории статистики. В 1881 г. Венн публикует «Символическую логику», а в 1889 г. «Принципы эмпирической логики».

В 1883 г. Венн был избран членом Лондонской Академии наук. Примерно в этот же период он все больше времени уделяет историческим изысканиям и пишет биографическую историю Кембриджского духовного колледжа начиная с 1349 г. Затем переключается на написание истории Кембриджского университета, которая увидела свет в 1922 г.

История была не единственным увлечением Венна. Не менее страстно он увлекался живописью, а также конструированием машин и механизмов. В частности,


ДЖ. ВЕНН

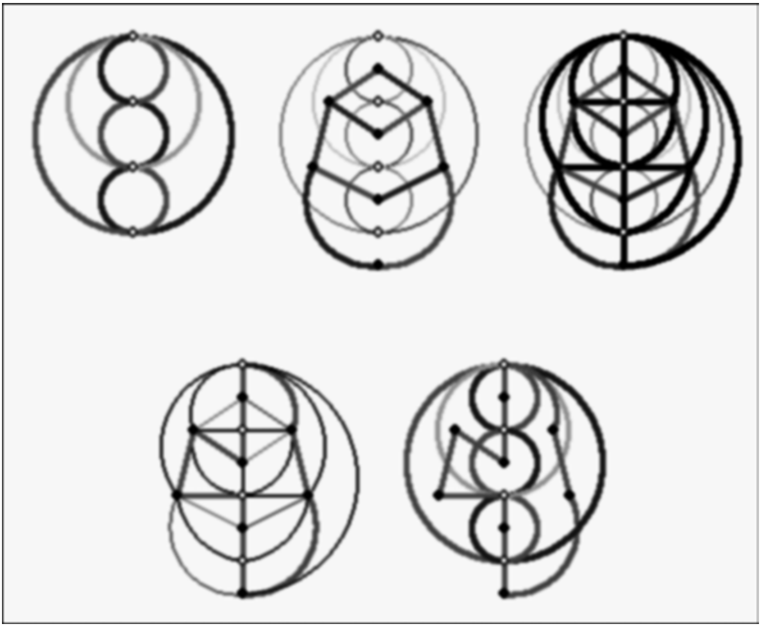


Рис. 9

им была создана машина для подачи крикетных шаров, которая своей работой привела в полный восторг членов австралийской команды по крикету, посетивших Кембридж в 1909 г.

Умер Венн 4 апреля 1923 г. в Кембридже.

Вот таким оригиналом был старина Венн, сделавший большой вклад в развитие логико-математической науки. К сожалению, в русскоязычной литературе ему, как и Кантору, мало уделено внимания, хотя Венн и Кантор, несомненно, заслуживают большего.

Что такое *диаграммы Венна*?

Допустим, что $C = \{C_1, C_2, C_n\}$ это совокупность замкнутых кривых, частным случаем которых являются круги. Если пересечения представляют собой конечное множество пересечений, тогда C и есть тем, что называется *диаграммой Венна* или *n-Venn диаграммой*, т. е. *n-Venn диаграмма* это конечное число замкнутых кривых в диаграмме, где переменная *n* указывает на число замкнутых кривых в данной диаграмме (см. рис. 9)

Как уже ранее отмечалось, поскольку множество может содержать любое число членов, оно может состоять и из одного-единственного элемента. Такое множество называется *единичным*.

Множество, каждый член которого не обладает каким-либо определенным свойством, является множеством, где нет членов, обладающих данным свойством. Такое множество называется *нулевым* или *пустым* и обозначается символом $\varnothing$ (или O).

Существуют различные способы выделения подмножеств из универсального множества, число элементов которого может быть как конечным, так и бесконечным. Одним из таких методов является полный перечень членов множества. Можно также выделять определенное множество как совокупность всех объектов, удовлетворяющих какому-то конкретному требованию.

Когда мы определяем множество, мы не можем знать заранее, содержит ли оно хотя бы один элемент. Поэтому полезно рассматривать и множества, не содержащие ни одного элемента, т.е. пустые множества.

Множество полностью определено, если можно сказать относительно любого предмета, является или не является он элементом этого множества.

Обычно множества обозначаются прописными курсивными буквами латинского алфавита (*A, B, C, D,...*), а их члены строчными курсивными буквами того же алфавита (*a, b, c, d, ...*).

Над элементами булевой алгебры можно производить определенные операции. Результатом всякой такой операции, произведенной над множествами (элементами алгебры), будет также множество (элемент алгебры). Этим обстоятельством определяется название булевой алгебры *алгебра множеств.*

Правильное понимание связей между множествами является базой всех без исключения логических построений. Поэтому если преподаватель логики обходит угрюмым молчанием вопрос о множествах, их связях и отношениях, то строптивые мальчишки и девчонки вправе считать его, мягко говоря, дилетантом, маскирующимся под знатока логической науки.

Основным понятием теории множеств является понятие **принадлежности** элемента множеству. Например, говорят: *число 2 принадлежит множеству всех натуральных чисел*.

В качестве обозначения того, что предмет a принадлежит множеству A, пишут: $a \in A$, где $\in$ символ принадлежности. Иногда эта формула читается: *множество А содержит элемент а*.

Вместо выражений «a не является элементом A», «множество A не содержит элемент a», «элемент a не принадлежит множеству A» пишут: $a \notin A$, где $\notin$ символ отсутствия принадлежности.

Другим важным отношением является отношение *быть включенным в*, или *содержатся в*, или *быть подмножеством*. Например, множество всех русских писателей содержится в (во) множестве (или включено в множество, или является подмножеством множества) всех писателей мира.

Таким образом, отношение между множествами, когда члены одного множества одновременно являются членами другого множества, называется **включением**. Для включения не обязательно, чтобы одно множество было меньше или больше другого множества, так как тождественные множества также могут включаться друг в друга или включать одно другое.

Понятие включения множеств является фундаментальным принципом всех отношений между множествами.

Существует пять возможных типов включения множеств:

1) взаимное включение, или тождество;
2) полное включение меньшего множества в большее;
3) частичное включение одного множества в другое;

$A \wedge B;\ A \cap B;\ A \times B$

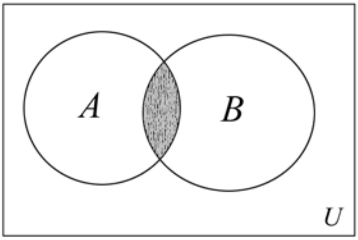


Рис. 10

4) полное включение двух или более множеств в одно большое множество, т. е. сумма двух или более множеств образует одно множество;
5) полное взаимное исключение множеств.

Частичное включение представляет особый интерес для инженеров. На рис. 10 изображены два пересекающихся круга. Если считать, что один круг означает множество *A*, а другой множество *B*, то очевидно, что существует область, включающая элементы *A* и *B*. Это означает, что существует по крайней мере один элемент, принадлежащий одновременно множеству *A* и множеству *B*. Элементы множества, входящие одновременно в оба множества *A* и *B*, представляют собой так называемое *произведение A* и *B*, что, как мы уже знаем, важно учитывать при выборе структуры электропроводящего контура.

Логики записывают частичное включение одного множества в другое так: A & B (читается: «*A* и *B*»), где & символ так называемой конъюнкции. Математики предпочитают пользоваться выражением $A \cap B$, где $\cap$ символ пересечения множеств. Инженеры обычно имеют дело с выражениями $A \cdot B$ или $A \times B$, где $\cdot$ и $\times$ символы умножения.

Говоря о произведении двух множеств, специалисты имеют в виду, что произведение двух множеств является формализацией наших представлений о

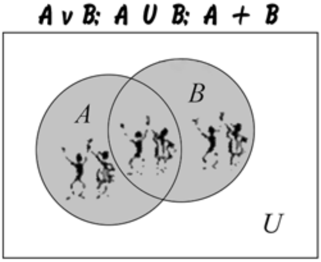


Рис. 11

классификации предметов в соответствии с одним или несколькими признаками.

Частичное включение двух или более множеств на примере с кругами показывает, что два или более пересекающихся кругов могут образовывать новое множество, включающее те элементы, которые являются членами множества A, членами множества B и членами обоих множеств одновременно.

Множество (рис. 11) называется **объединением** (или суммой) множеств A и B. В математике объединение нескольких множеств обозначается символом $\cup$.

Операция объединения имеет ряд свойств, близких к свойствам арифметической операции сложения. В логике эта операция называется дизъюнкцией и записывается так: $A \vee B$ (читается: A или B), где $\vee$ символ так называемой дизъюнкции.

Множество A содержится в множестве B (или A включено в B) обозначается через $A \subset B$, где $\subset$ символ включения. Множество A не содержится в множестве B (или A не включено в B) и обозначается через $A \not\subset B$, где $\not\subset$ символ отрицания включения.

$A \subset B$ означает, что каждый предмет a, принадлежащий A, принадлежит и B. Иными словами, для каждого a из $a \in A$ следует, что $a \in B$.

Если $A \subset B$, но не $A = B$, то A называют *собственным подмножеством* B.

С помощью определенных операций из двух данных множеств A и B можно образовать: (а) их **объединение** ($A \cup B$); (б) **пересечение** ($A \cap B$); (в) **разность** ($A \setminus B$).

$A \cup B$ есть результат совместного рассмотрения обоих данных множеств в качестве одного множества. $A \cap B$ есть общая часть данных множеств. $A \setminus B$ есть результат удаления из множества A элементов, принадлежащих множеству B.

Операции $\cup$ и $\cap$ подчиняются следующим законам:

1. **Коммутативность** операций $\cup$ и $\cap$:

$$A \cup B = B \cup A; \; A \cap B = B \cap A.$$

2. **Ассоциативность** операций $\cup$ и $\cap$:

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C); \; (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C).$$

3. **Дистрибутивность** операций $\cup$ и $\cap$:

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C); \; (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C).$$

Законы ассоциативности гласят, что в выражениях вида $A \cup B \cup C$ и $A \cap B \cap C$ расположение скобок не играет роли. Здесь скобки можно спокойно опускать. Напротив, в таких выражениях, как $(A \cup B) \cap C$ или $A \cup (B \cap C)$, расположение скобок играет существенную роль.

Как уже отмечалось, указанные законы очень похожи на обычные законы арифметики, относящиеся к операциям сложения (вместо $\cup$ пишется $+$) и умножения (вместо $\cap$ пишется $\times$ или $\cdot$). Лишь для закона дистрибутивности нет соответствующего арифметического закона.

Исключительно важную роль в теории множеств играет понятие «отображение». Данное понятие является обобщением понятия «функция».

Рассмотрим два числовых множества, одно из которых обозначим X, а другое Y. Установим закон, по которому каждому числу x, принадлежащему X, ставится в соответствие вполне определенное число y, принадлежащее множеству Y. Такое соответствие принято называть *функциональной зависимостью* между независимой переменной x и зависимой y. Эту функциональную зависимость можно записать в виде формулы $y = f(x)$, где буква f служит обозначением функциональной зависимости. Величина $f(x)$ меняется, как и зависимая переменная, в зависимости от переменной x. Говоря иначе, величина $f(x)$ обозначает тот элемент y множества Y, который поставлен в соответствие элементу x множества X при данной функциональной зависимости f.

Буква f сама по себе не означает определенной функциональной зависимости. Лишь однозначно определив соответствие между значениями независимой переменной x и зависимой переменной y, обозначаемое нами буквой f или любой другой буквой, мы придаем данной букве определенный научный смысл.

Попытаемся обобщить сказанное, использовав понятие «отображение». В связи с этим рассмотрим следующий пример. Пусть A множество всех велосипедов, B множество всех людей; f сопоставляет каждому велосипеду его владельца. Под отображением f множества A в множество B понимается некоторое правило, посредством которого каждому элементу a множества A сопоставляется единственный для данного a элемент b множества B. Это отношение между a из A и b из B обозначается посредством уже известной нам формулы $b = f(a)$. Здесь a есть переменная, значения которой пробегают все множество A, а каждый b из B является образом соответствующего a. Что же касается f, то он является символом, обозначающим данное конкретное отображение.

Отображение f множества A в множество B называется *отображением множества A на множество B* (или *накрывающим отображением*), если каждый элемент множества B является образом некоторого элемента из A. Короче говоря, f является накрытием, если каждый элемент множества B имеет по крайней мере один прообраз в множестве A.

Отображение f множества A в множество B называется *взаимно однозначным* (или *одно однозначным*) отображением, если различным элементам множества

A сопоставляются различные образы множества *B*, т. е. *f* *взаимно однозначно*, если каждый элемент множества *B* имеет не более одного прообраза в множестве *A*.

Эти краткие сведения о теоретико-множественном понятии «отображение» пригодятся нам позднее, когда речь пойдет о так называемой булевой функции.

Заканчивая данный раздел, хочу обратить внимание читателей на то, что алгебра Буля имеет интерпретацию во многих различных теориях. По мнению ученых, это и составляет ее наибольшую теоретическую и практическую ценность.

Что имеется в виду, когда говорится: некоторая теория может быть интерпретирована в другой теории?

Рассмотрим следующий пример. Пусть x_1, ..., x_n исходные термины некоторой теории *X*, а y_1, ..., y_n исходные термины другой теории *Y*. Если аксиомы теории *X* в результате замены в них символов x_1, ..., x_n символами y_1, ..., y_n становятся аксиомами или теоремами теории *Y*, то говорят, что теория *X* имеет интерпретацию в теории *Y*. Другими словами, теория *X* имеет интерпретацию в теории *Y*, если аксиомы теории *X* останутся истинными высказываниями, когда входящим в них исходным терминам придается смысл терминов теории *Y*.

Таким образом, если теория *X* имеет интерпретацию в теории *Y*, то всякая теорема теории *X* имеет аналог среди теорем теории *Y*. Следовательно, результаты, полученные в *X*, можно автоматически переносить в любую теорию, в которой *X* имеет интерпретацию. Что касается алгебры Буля, то в свете сказанного можно утверждать: в любой теории, в которой может быть интерпретирована данная алгебра, существует фрагмент, с формальной точки зрения не отличающийся от этой алгебры.

Ярким примером интерпретации алгебры Буля служит теория электрических цепей. Ясно, что эта интерпретация имеет исключительно большое практическое значение.

Кому-то все сказанное может показаться слишком абстрактным и далеким от жизни. Кто-то без особого энтузиазма согласится с тем, что авторские рассуждения действительно имеют отношение к технике, но добавит несколько фраз о слишком узком выходе в практику, не открывающем простор для естествоиспытателей и гуманитариев. Попытаюсь переубедить этого унылого скептика.

Известный советский математик с широким философским кругозором Софья Александровна Яновская (1895 1966), много сделавшая для развития математической логики в нашей стране, в своем докладе на научном симпозиуме в Варшаве (1965) подчеркивала, что проблематика введения и исключения абстракций теснейшим образом связана с отыскиванием моделей (интерпретации) для соответствующей теории. Что это значит? Это значит следующее: чтобы наука могла эффективно служить людям, ученые должны уметь применять научные законы на практике. Для этого требуется хорошо знать технологию замены абстрактных объектов (абстракций) их конкретными представителями. Такая замена называется в науке *исключением абстракций*.

Каждому нормальному человеку понятно, что нельзя съесть абстрактный плод (например, образ яблока или яблоко вообще), можно съесть только конкретный объект, подпадающий под это общее понятие. Тем не менее в науке часто «питаются» абстрактными объектами. И если это действительно наука, а не околонаучная демагогия, то польза от такой странной «пищи» будет несомненной.

Неужели такое бывает?

Да, такое бывает, но только в том случае, когда абстракции становятся не самоцелью, а способом познания не видимых простым глазом вещей. Чтобы увидеть, точнее, понять суть неочевидного и вооружиться соответствующими теоретическими знаниями с целью дальнейшего продвижения вперед по пути научно-практического освоения действительности, нам следует связать со всяким абстрактным понятием правила его *введения* и *исключения*.

Для простейших абстракций типа «плод», «мебель» или «млекопитающее» способы их введения и исключения не представляют особых трудностей. Многие делают это неосознанно на каждом шагу. Например, когда мы идем в мебельный магазин с вполне определенными намерениями, то нас интересует, естественно, не мебель вообще, а конкретный кухонный стол, конкретный диван для гостиной и т. д. Однако «стол» или «диван» это тоже довольно абстрактные понятия. Ведь столы и диваны бывают разной формы, сделанными из разного материала и т. д. Поэтому данные интуитивные понятия нуждаются в наполнении более конкретным содержанием. Этим содержанием мы наполняем их, войдя в мебельный магазин и пройдя по его залам. Так незаметно для самих себя мы исключаем абстракции и делаем это в повседневной жизни регулярно. Ученые, заметив такого рода закономерности, попытались придать им более определенный наукообразный вид.

В науке правила введения и исключения абстракций стали, в частности, предметом анализа в рамках современных теории определений, где различают правила введения новых абстрактных объектов по определению (например, так называемые *определяющие аксиомы*) и правила их исключения (например, правило так называемого *сведения* (*редукции*) *по определению*).

Особенно важным для теоретической науки является поиск соответствующей *интерпретации* (*модели*), примером чему служит интерпретация алгебры Буля в различных теориях. По словам Яновской, применение теории на практике может происходить не прямо, а через другую теорию или последовательность теорий, основанных на отказе от соответствующих огрубляющих допущений. Это необходимо учитывать, так как в науке не всякую абстракцию можно исключить, хотя и следует иметь в виду, что теории, из которых ни при каких обстоятельствах не могут быть исключены разумным образом входящие в нее абстракции, не вправе претендовать на название подлинно научных теорий, ибо на практике они неприменимы. И все же не всякая абстракция исключается. Это связано с тем обстоятельством, что введение абстракций всегда представляет собой некоторое огрубление, упрощение, некоторую идеализацию действительности.

Какой же выход из этой ситуации?

Увы, но я должен разочаровать нетерпеливого читателя и присоединиться к словам Яновской, честно заявившей, что не существует палочки-выручалочки, с помощью которой относительно легко можно было бы устанавливать, применима некая абстрактная теория в данных условиях или не применима. Это не следует понимать как поражение научно-теоретической мысли. Просто путь науки   это путь трудного поиска, и ученому часто приходится искать обходные пути, даже тогда, когда, казалось бы, цель близка.

Тот, кто решится сделать выбор в пользу науки, должен отдавать себе ясный отчет в том, что за ее темным языком, мудреными символами и витиеватыми формулами скрывается радость общения с Истиной, радость понимания новых ценностей окружающего нас мира, фантастически мерцающего сквозь абстрактные конструкции математиков, логиков и представителей других научных дисциплин.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Что такое реле? Расскажите об устройстве клопфера Морзе.

2. Является ли проблема релейных устройств чисто технической проблемой? В чем заключается основная функция релейных устройств в системе человек   машина!

3. Существует ли связь между релейными устройствами и логикой?

4. Можно ли отнести цифровые электронно-вычислительные машины к разряду релейных устройств?

5. Какой числовой код наиболее широко используется в кибернетических устройствах?

6. Расскажите о характерных признаках десятичной и двоичной систем счисления.

7. Почему в названии алгебра логики присутствует слово алгебра? Кто превратил логику в алгебру логики?

8. Что можно сказать об элементах булевой алгебры множеств?

9. Назовите основные понятия теории множеств.

10. Введение и исключение абстракций. Что это такое?

11. Пусть A множество всех словоохотливых людоедов, B множество всех словоохотливых вегетарианцев, C множество всех молчаливых экстрасенсов, питающихся энергией людоедов.

а) изобразите с помощью кругов отношения между этими множествами.

б) выразите символическим языком булевой алгебры отношения между этими множествами.

в) в каких отношениях находятся шарлатаны-экстрасенсы и шарлатаны-астрологи?

2

В ГОСТЯХ У ШЕРЛОКА ХОЛМСА

ГЛАВА 2
В ГОСТЯХ У ШЕРЛОКА ХОЛМСА

О способностях к аналитическому мышлению, дедуктивном методе и теории доказательств.   От Гаусса к Гильберту.   Неочевидное вероятно и действительно.   Специфика аксиоматического метода.   Интерпретация аксиоматических систем.   Термины или термы?   Борьба с психологизмом в логике.   Упражнения.

Возможно, вы правы, Ватсон,   сказал Холмс.   Но мой мозг бунтует против безделья. Дайте мне дело! Дайте мне сложнейшую проблему   и я вам покажу, на что способен мой интеллект.

Доктор Ватсон, чей организм еще не вполне оправился после недавней колониальной кампании, задумчиво сидел в кресле у камина и покачивал больной ногой, пробитой пулей афганского снайпера.

Скажите, Холмс,   начал Ватсон,   вы не переоцениваете свой метод?

Нисколько,   ответил знаменитый сыщик, не спеша набивая отменным табаком любимую эпиковую трубку.   Расследование преступления   точная наука, в основе которой лежит умение наблюдать и делать выводы.

А мне казалось, что умение наблюдать и умение делать выводы   почти одно и то же,   вопросительно заметил Ватсон.

Нет, это разные вещи. Вот, например, наблюдение показало мне, что утром вы были на Уигмор-стрит, а умение логически мыслить позволило сделать вывод, что вы ходили туда посылать телеграмму.

Поразительно!   воскликнул Ватсон.   Я действительно заходил на почту. Ваши аналитические способности фантастичны!

Если я прошу отдать должное моему искусству, то это не имеет отношения ко мне лично, оно   как бы вне меня. Преступление вещь повседневная, логика редкая. Аргументы, которые я выдвигаю в своих рассуждениях, ведут от посылок к заключению. С помощью аргументов я стремлюсь заставить рационально мыслящего человека принять заключение, коль скоро он принимает посылки.

Ватсон открыл было рот, но в дверь громко постучали, и в комнату вошла хозяйка, неся на медном подносе визитную карточку.

Вас спрашивает инспектор Скотланд-Ярда мистер Крейг, пришедший с двумя своими друзьями, обратилась она к Холмсу.

Мистер Крейг говорите вы. Хм, это имя мне хорошо знакомо. Миссис Хадсон, пригласите их войти.

Инспектор Крейг вошел в комнату упругой походкой. Вслед за ним вошли и его друзья.

Я пришел именно к вам, мистер Холмс, начал инспектор, надеясь, что вы поможете распутать одну загадочную для моего понимания задачку.

Холмс потер руки, и глаза у него заблестели. Он подался вперед, его резко очерченные, ястребиные черты приняли выражение самого напряженного внимания.

Изложите условия вашей задачки, сказал он деловым тоном.

Итак, друзья, у меня нет крыльев, но я иногда люблю парить в высотах теоретических наук. Это моя слабость, гордо произнес инспектор.

Холмс одобрительно кивнул головой.

Я с детства мечтал посвятить себя алгебраической логике, грустно вздохнул Крейг. Вы, конечно, знаете о существовании такой дисциплины.

О, алгебраическая логика! воскликнул Ватсон. И тут же осекся, поймав на себе укоризненный взгляд Холмса.

Обладая упорным характером, а натурой увлекающейся, я решил разгрызть этот орешек. Так ваш покорный слуга оказался студентом Оксфордского университета, где познакомился с присутствующим здесь Норманом МакКаллохом. И тогда и сейчас он выдумывал и выдумывает всякого рода технические курьезы. Позднее состоялось наше знакомство с Малькольмом Фергюссоном, ныне видным специалистом по логике и математике, который собственноручно построил несколько логических машин. Он любезно согласился присутствовать при нашем разговоре. Я полагаю, что мои друзья помогут нам разобраться в некоторых логических проблемах, включая проблемы дедукции.

Дедукция дело тонкое, крякнул многозначительно Ватсон.

Да-а, присоединился к доктору Холмс, сопя потухшей трубкой. Кстати, в переводе с латинского слово «дедукция» означает «выведение». Любое дедуктивное рассуждение, заключающееся в том, что мы из каких-то известных нам заранее предпосылок делаем те или иные выводы, по существу, сводится к преобразованию исходных данных по правилам логики.

Вы правы, мистер Холмс, сказал МакКаллох. Я лишь добавлю, что во всякой дедуктивной системе некоторые предложения, называемые теоремами, доказываются или выводятся шаг за шагом из множества исходных предложений, состоящих из аксиом и определений. Аксиомы не доказываются, а принимаются без доказательства в качестве первоначальных посылок. Принятие таких посылок совершенно необходимо, поскольку доказательство всякой теоремы обязательно и осуществляется из чего-то твердо установленного ранее. По этой же причине не могут быть определены все встречающиеся в данной системе понятия. Некоторые из этих понятий не определяются, а считаются исходными, тогда как все остальные определяются с помощью введенных ранее. Таким образом, всякая дедуктивная система основывается на некоторых недоказуемых предложениях и неопределяемых терминах.

МакКаллох замолчал, и в разговор вступил Фергюссон.

Я расскажу вам интересную и весьма поучительную историю, случившуюся с одним студентом на экзамене по геометрии, начал Фергюссон. Этот студент оказался чрезвычайно любознательным. Преподаватель попросил его доказать теорему Пифагора. Студент старательно выполнил задание и был крайне удивлен, когда увидел на своей работе пометку преподавателя: «Это не доказательство». Молодой человек пошел к преподавателю и сказал: «Как вы можете доказать, что оно не является доказательством?!»

Блестяще! воскликнул Ватсон, захлопав в ладоши. Этот юноша далеко пойдет.

Разумеется, согласился Фергюссон.

Должен признаться, сказал Шерлок Холмс, хмурясь, что на месте этого преподавателя я не хотел бы очутиться.

Что-о-о?! почти вскричал Ватсон, потрясенный откровением своего друга.

Да, вы не ослышались, Ватсон, холодно сказал Холмс.

Если бы меня попросили доказать не теорему Пифагора, а дать строгое определение собственно доказательства, то есть определить природу доказательства как такового, я тоже оказался бы в весьма затруднительном положении. Поэтому, инспектор Крейг, мне придется вас разочаровать. В конце концов я всего-навсего мыслящий сыщик, а не теоретик математики или логики. Поймите меня правильно.

В этом нет ничего удивительного, заметил Фергюссон.

Во многих случаях математики и такие талантливые сыщики, как вы, мистер Холмс, и многоуважаемый инспектор Крейг, могут распознать правильность или неправильность доказательства, однако ни вы, ни они не в состоянии дать точное определение доказательству. Нас же, логиков, интересует прежде всего само понятие «доказательство».

Не будет ли это игрой в слова? пожал плечами Ватсон.

— Нет, и вот почему, — улыбнулся Фергюссон. — В истории математики часто случалось, что какие-то основные понятия интуитивно использовались задолго до того, как им были даны строгие определения. Но как только это делалось, обнаруживалось, что мы по-новому должны оценивать многие привычные истины, ибо горизонт наших знаний существенно расширялся. В этом смысле не является исключением и понятие «доказательство». Для меня и других теоретиков важно иметь точно определенное доказательство тогда, когда нужно установить, что данное математическое утверждение недоказуемо в той или иной системе аксиом.

В этом месте я позволю себе прервать мистера Фергюссона и говорящего его устами американского математика и логика Р. М. Смаллиана, автора ряда интересных работ по занимательной математике и логике, чтобы сообщить читателю следующее.

До начала XIX в. ученые наивно считали, что все математические постулаты и базисные определения являются абсолютно достоверными и самоочевидными, т. е. интуитивно ясными. Современные же математики и логики отвергают положение о самоочевидной истинности постулатов и определений, предлагая рассматривать их как условно выбранные предложения. Это делает их более свободными при выборе постулатов и определений. В свое время в результате такого раскрепощения научного мышления на свет появились неевклидовы геометрии и булева алгебра.

Строгое формальное описание булевой алгебры имеет аксиоматический характер. Это означает, что мы имеем дело с дедуктивной системой, а во всякой дедуктивной системе теоремы доказываются на основе аксиом и определений.

Каким требованиям должна отвечать система аксиом?

В результате отказа от ставки на интуитивную очевидность некоторых истин математики и логики обнаружилось, что в формальном плане, где нет места образному мышлению, аксиома должна отвечать требованиям **непротиворечивости**, **полноты** и **независимости**.

1. *Система аксиом называется непротиворечивой, если из этих аксиом нельзя сделать два взаимно исключающих друг друга вывода.*

2. *Система аксиом называется полной, если она допускает лишь одну-единственную реализацию, т. е. если две любые модели этой системы аксиом совпадают, или, как говорят, изоморфны.* Две модели аксиоматической системы называются изоморфными, если между образующими эти модели элементами можно установить взаимно однозначное соответствие. Иными словами, две изоморфные модели представляют собой один и тот же абстрактный математический объект, только описанный на разных языках.

3. *Система аксиом называется независимой, если ни одну из аксиом этой системы нельзя вывести из других аксиом, т. е. доказать как теорему, базируясь на всех остальных аксиомах системы.*

Главным стимулом распространения аксиоматического метода в современной математике и математической логике следует считать революционные изменения в математике, начало которым было положено трудами Николая Ивановича Лобачевского (1792 1856) и Яноша Бояи (1802 1860). Эти два выдающихся математика обнаружили, что можно построить непротиворечивую геометрию исходя из аксиом, не кажущихся очевидными в отличие от евклидовых. Так на смену интуитивно очевидному пришли необычные формы доказательств, которые не

нуждались в наглядности, но зато нуждались в хорошей памяти на абстрактные определения и формулы, а также в новых типах логического мышления.

Виновником революции в математическом мышлении был вопрос о том, является ли постулат о параллельных Евклида независимой аксиомой или же он может быть выведен из других аксиом. Этот вопрос волновал математиков в течение двух тысяч лет.

Первым ответил на столь каверзный вопрос Карл Фридрих Гаусс, но его не услышали по той причине, что он сам не захотел быть услышанным.

Великий немецкий математик родился в 1777 г. в небольшом немецком городке Брауншвейге в семье поденщика. Свою одаренность Гаусс проявил чрезвычайно рано, когда ему не было еще и трех лет. Как-то раз его отец составлял платежную ведомость для рабочих. Закончив расчеты, он вдруг с удивлением услышал: «Папа, вычисления неверны, должно быть...» Проверка показала, что малыш был прав. Впоследствии Гаусс любил шутить, что научился считать раньше, чем говорить.

В семилетнем возрасте Гаусс пошел в школу, где сотню мальчиков запугивал и обучал бездарный учитель. Впрочем, сердце учителя не было черствым. Когда на десятом году жизни наш вундеркинд почти мгновенно решил длинную задачу на сложение, предполагающую знание арифметической прогрессии, учитель был настолько ошеломлен и взволнован, что проникся уважением к мальчугану и даже подарил ему учебник по арифметике. Большего он не мог дать талантливому школяру. Дальше Гауссу помогали семнадцатилетний помощник старого учителя Иоганн Мартин Бартельс (1769 1836), впоследствии учитель Лобачевского, бескорыстно влюбленный в математику. Они подружились и сохранили верность этой дружбе до конца жизни Бартельса.

Гауссу едва исполнилось двенадцать лет, а он уже с большим сомнением смотрел на теоретический фундамент евклидовой геометрии. Спустя четыре года эти сомнения приобретут форму идеи геометрии, отличной от евклидовой.

Слава об одаренном мальчике, распространению которой содействовал Бартельс, дошла до Брауншвейгского герцога, который, познакомившись с застенчивым гением, помог зачислить его в Коллегиум Каролинум в Брауншвейге и платил за обучение, пока оно не завершилось.

В Коллегиуме Гаусс познакомился с трудами швейцарского математика и астронома Леонарда Эйлера (1707 1783), французского математика и механика Жозефа Луи Лагранжа (1736 1813), гениального английского физика Исаака Ньютона и других выдающихся ученых. Тогда же он начал те исследования по высшей арифметике, которые обессмертили его имя.

В октябре 1795 г. Гаусс поступает в Геттингенский университет, не решив окончательно, что выбрать математику или филологию.

Да, уважаемый читатель, не удивляйся. Такой выбор имел место и был не случаен. Дело в том, что в школьные годы Гаусс очень увлекался филологией и достиг больших успехов в изучении классических языков. Он обладал особой способностью к усвоению языков. Гаусс всегда считал, что для развития гибкости ума полезно овладевать новыми языками. Уже в преклонном возрасте он начал изучать русский язык. Отчасти это было связано с желанием читать в оригинале труды Лобачевского. Через два года после начала занятий Гаусс уже бегло читал русскую прозу и поэзию, а также вел переписку со своими петербургскими друзьями. Между прочим, Петербург всерьез интересовался, не захочет ли Гаусс стать преемником Эйлера в России. В свободное время Гаусс любил читать современную ему европейскую литературу и классиков античности. Больше всего его внимание привлекала английская и русская литература. Из английской литературы он особенно выделял приключенческие романы блестящего английского сочинителя Вальтера Скотта (1771 1832).

Только спустя три года после поступления в университет Гаусс сделал окончательный выбор в пользу математики, но изучение языков осталось на всю жизнь его любимым занятием.

Во время учебы в университете Гаусс подружился с Вольфгангом (Фаркашем) Бояи, чей сын Иоганн (Янош) внес бесценный вклад в создание неевклидовой геометрии.

В 1795 г. Гаусс замыслил большое сочинение по теории чисел, которое через несколько лет приняло вид трактата под названием «Арифметические исследования», прославившего его автора.

Увлечение математикой не мешало Гауссу следить за развитием современной ему философской мысли. Однажды он сказал: «Существуют проблемы, решению которых я придал бы неизмеримо большее значение, чем решению проблем математики, например касающиеся этики или нашего отношения к Богу, нашей судьбы и нашего будущего, но их решение нам не по силам, и оно полностью лежит за пределами естествознания».

Высоко оценивая философию, Гаусс не мог не замечать непростительные промахи ряда современных ему философских звезд. В частности, он без смущения критиковал выдающихся представителей классической немецкой философии И. Канта (1724 1804) и Г. В. Ф. Гегеля (1770 1831). Право на такую критику давала ему математика. Овладев идеей неевклидовой геометрии, он с усмешкой воспринимал кантовские сентенции о пространстве и геометрии, а также безапелляционные гегелевские утверждения о том, что планет должно быть ровно семь, не больше и не меньше. Именно математика помогла ему вычислить орбиту Цереры, первой в семействе малых планет.

Благодаря вычислениям Гаусса Церера была переоткрыта точно в том месте, которое он теоретически предсказал, опровергнув спекулятивно-философские постулаты Гегеля.

Гаусс не только внес вклад в математику и астрономию, но и заложил основы математической теории электромагнетизма, а также изобрел электрический телеграф.

23 февраля 1855 г. Гаусс ушел из жизни, так и не заявив во всеуслышание, что наши представления о пространстве определяются жизненным опытом, а не врожденными идеями.

Поскольку эмпирический опыт изменчив, как изменчивы и теоретические знания, полученные на основе его, постольку нет смысла держаться предрассудков о внеопытном характере евклидова пространства. Следовательно, логически возможны другие геометрии, основанные на другом выборе аксиом, нежели аксиомы Евклида. Публично эта еретическая идея была заявлена только Лобачевским и Бояи, ибо Гаусс не захотел скандальной славы.

Николай Иванович Лобачевский родился 1 декабря (20 ноября) 1792 г. в семье мелкого чиновника в Нижнем Новгороде. Когда мальчику исполнилось семь лет, умер отец, и мать осталась одна с тремя маленькими детьми на руках. Вскоре последовал переезд в Казань, где дети были приняты в гимназию на казенное содержание. Обучаясь в гимназии, Коля продемонстрировал значительные успехи в математике и в древних языках.

В 1807 г. он поступил в Казанский университет.

В гимназии и в университете Лобачевский имел хороших наставников, одним из которых был Г. И. Карташевский, талантливый математик и педагог, а другим профессор И. М. Бартельс, который познакомил юношу с трудами Эйлера, Лагранжа, Лапласа.

Через четыре года после поступления в университет Лобачевский был произведен, минуя степень кандидата, в магистры, а в 1814 г. его назначают адъюнктом по математике в Казанском университете, и он приступает к чтению лекций. Еще через два года ему присваивают звание профессора. До 1846 г. Лобачевский читал все основные курсы по математике, а также механику, астрономию, физику.

Несколько лет Лобачевский работал деканом физико-математического факультета, а с 1827 по 1846 г. ректором университета. Под его руководством было сделано многое: привлечены к преподавательской деятельности лучшие ученые Казани, реорганизована библиотека с целью улучшения учебного процесса, построены механические мастерские для изготовления научных инструментов, основана и оборудована обсерватория.

В 1842 г. по ходатайству Гаусса Лобачевский избирается членом-корреспондентом Геттингенского Королевского Общества за создание неевклидовой геометрии. Первое публичное сообщение по этой теме им было сделано в 1826 г. на физико-математическом факультете Казанского университета. Через шесть лет с аналогичной идеей выступил Бояи.

В июле 1846 г. исполнилось 30 лет работы Лобачевским в звании профессора. Согласно уставу того времени должна была последовать отставка. Совет университета возбудил перед министром просвещения ходатайство об оставлении Лобачевского на кафедре еще на пять лет, с тем чтобы он мог сохранить за собой пост ректора. Однако министерство отказало в просьбе. Коллеги ученого протестовали против этого бездушного, казенного решения, но ничего не добились.

Отстранение от любимого дела и смерть старшего сына пагубно отразились на здоровье Лобачевского. В последний год жизни он ослеп и свою предсмертную работу «Пангеометрия» не писал, а диктовал. Скончался Лобачевский 24 февраля 1856 г.

С самого начала своей научной карьеры Лобачевский занимался аксиоматикой геометрии. Сперва он пытался доказать V постулат Евклида, но, убедившись в тщетности этих попыток, решил идти совершенно иным путем, выделив в геометрии Евклида все то, что не зависит от данного постулата. В результате ему пришла в голову мысль заменить V постулат другим, а именно: через точку на плоскости вне лежащей на этой плоскости прямой можно провести не только одну параллельную этой прямой. Казалось бы, должно возникнуть противоречие, но противоречия не обнаружилось, зато получилась новая геометрическая система. В XX столетии физики установили тесную связь неевклидовой геометрии с теорией относительности.

Популярно разъясняя смысл неевклидовой геометрии, выдающийся французский математик, физик и философ Жюль Анри Пуанкаре предложил *метод словаря*. Суть этого метода состоит в ином понимании некоторых терминов геометрии. Речь идет прежде всего о терминах «прямая» и «плоскость», которые гипотетический неевклидовец понимает весьма своеобразно. Скажем, под прямой этот неевклидовец понимает полуокружность, которая пересекает прямую под прямым углом. Выражение же «вся плоскость» трактуется им как верхняя полуплоскость, расположенная над прямой.

Неевклидовец легко договорится с евклидовцем о смысле всех аксиом геометрии, кроме V постулата. Что касается этого злосчастного постулата, то неевклидовец упорно будет отвергать его, утверждая, что две разные *прямые* x и y параллельны одной и той же *прямой* z и проходят через точку K (рис. 12).

Если евклидовец начнет протестовать, то спору не будет конца. Если же евклидовец захочет чисто логически вывести V постулат из остальных аксиом геометрии, то неевклидовец окажется в более выгодном положении, ибо, будь данный постулат логическим следствием известных аксиом геометрии, он должен был бы выполняться и для искривленных неевклидовых прямых, для которых справедливы все эти аксиомы.

В итоге можно сказать: напрасно искать в аксиомах математики что-то наглядное, очевидное, не вызывающее никаких сомнений у жителя Земли, для

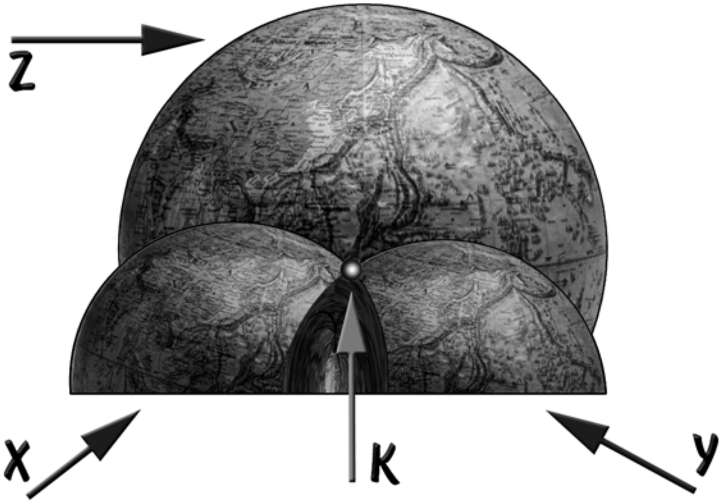


Рис. 12

которого Солнце всходит и заходит. Математические аксиомы истинны лишь в той мере, в какой удается доказать вытекающие из них теоремы. Если бы V постулат удалось доказать, то его нельзя было бы отбросить. Отбрасывать и вводить можно только аксиомы, но отнюдь не теоремы.

Интересно отметить, что принципу очевидности в познании был нанесен чувствительный удар не только математиками, но и психологами XIX XX вв. Об этом стоит сказать особо.

В конце XIX столетия наблюдалось бурное развитие экспериментальной психологии. В числе лидеров этого направления исследований были немецкие психологи Вюрцбургской школы экспериментальной психологии. Свои исследования они начали с изучения восприятия значений слов, исходя из допущения, что в состав значений слов обязательно входят наглядные представления, иначе слова естественного языка не могут быть поняты. При этом в качестве аргументов фигурировали ссылки на Аристотеля, заявлявшего, что мысли не могут существовать без некоторого чувственного опыта, выражаемого посредством образов. Однако эксперименты свидетельствовали о противоположном.

Оценивая экспериментальные данные, один из ученых этой школы писал, что вплоть до XIX в. слово не принималось за слово, если ему не хватало наглядности, благодаря которой и получило оно будто бы свой конкретный смысл. Во многих педагогических сочинениях наглядность оценивалась как альфа и омега всякого душевного развития. Кант называл идеи без наглядности пустыми, а известный немецкий философ Артур Шопенгауэр (1788 1860) хотел всю математику обосновать на конкретно-образных началах и полностью изгнать формальные доказательства из геометрии.

Экспериментальная психология мышления Вюрцбургской школы решительно порвала с каноном наглядности мышления, тем самым вступив в борьбу с ассоцианистской психологией и подвергнув критике постулат зависимости мысли от чувственных образов. Вюрцбуржцы настаивали на том, что мысль это вполне самостоятельная интеллектуальная деятельность.

Исследуя понимание слов и предложений испытуемыми, они пришли к выводу, что это понимание в ряде случаев не только не нуждается в наглядном содержании, но, более того, иногда возникновение наглядных представлений только мешает пониманию.

Став в оппозицию к императиву обязательной наглядности, образности мышления, вюрцбуржцы нашли в лице выдающегося немецкого философа Эдмунда Гуссерля (1859 1938) мощную теоретическую поддержку. Теперь для характеристики абстрактно-понятийного мышления достаточно было указать, как это делал Гуссерль, на его предрасположенность к ориентации на некую возможную предметность.

Исследование психических процессов мышления привело немецких психологов к выводу, что смыслообразующая деятельность мышления совершенно отлична от механизма функционирования ощущений и представлений, что законы, управляющие течением и связью мыслей, иные, чем те, которым подчинены в своей смене ощущения и представления.

По словам известного русского психолога и философа Георгия Ивановича Челпанова (1862 1936), ценность этих исследований заключается в следующем: тема (задача для мыслительной деятельности) может оказывать направляющее действие, сама не будучи наглядно-чувственной по содержанию.

В 30-е гг. XX в. видный советский философ Константин Романович Мегрелидзе (1900 1944) повторит примерно то же самое, но в ином, более конструктивном смысле. Им будет сказано: «Если мы отдадим себе отчет в том, что собственно разумеем под понятиями «причина», «цель», «сила» и т. д., то никакого конкретно-образного содержания в нашем сознании не найдем. Мы обнаружим только, что в подобных случаях наше сознание стремится принять известное общее расположение, направление, но при этом в нем отсутствует определенное эмпирическое содержание, нет никаких образов и наглядных представлений».

Придерживаясь этой точки зрения на работу сознания и функционирование абстрактных понятий, Мегрелидзе так охарактеризует математику и ее задачи: математика должна заботиться не о согласовании с действительностью, а о том, чтобы не противоречить самой себе, своим основным постулатам и определениям. Всякая чисто математическая дисциплина представляет систему условных рассуждений, взаимно связанных не смыслом реальной действительности, а смыслом, который мы им приписываем по тем или иным соображениям. Поэтому в математике нет истин в философском значении, а есть только *формально-гипотетические истины.*

Лишив многие научные понятия их наблюдаемого или интуитивно очевидного содержания, мы не сделали их беднее, по крайней мере в плане операционального их использования. Более того, даже самые высокие абстракции перестали быть бессодержательными, ибо неочевидное сделалось очевидным: нам открылась ослепительная темнота Бесконечного.

Все познается в сравнении. Сегодня эта истина кажется банальной, но... Когда мы сравниваем ограниченные в пространстве и во времени вещи, то обнаруживаем сходное и различное в этих вещах. В данном случае конечное познается конечным, т. е. метод сравнения в известном смысле антропоморфен, ограничен человеческой чувственностью и произвольной игрой воображения. А как быть с бесконечностью? Ведь ее не увидишь, не потрогаешь. Но как хочется проникнуть в святая святых и ухватить Бесконечность за ее бесконечную бороду (пространственную и временную).

Рассказывают, что один скупердяй обратился как-то к Богу:

Господи, ты велик и всемогущ! молвил скупердяй. Что для тебя тысяча лет?

Один миг, ответил Бог.

А тысяча золотых?

Один грош.

Так подари мне его.

Хорошо, подожди один миг.

Миновал миг. Глядит Бог по сторонам да затылок чешет. Нет скупердяя, один тлен остался. Мораль? С бесконечностью следует обходиться очень и очень деликатно.

Не раз случались недоразумения оттого, что люди пытались перенести на бесконечность принципы и методы, почерпнутые из конечного мира. Но, как заметил один не лишенный юмора математик, Бесконечность всякий раз взвивалась на дыбы и опрокидывала самые хитроумные теории. И все-таки нашелся один смельчак, попытавшийся если не обмануть Бесконечность, то хотя бы краешком глаза взглянуть на нее. К тому предрасполагало открытие неевклидовых геометрий. Этим смельчаком был уже известный нам математик Георг Кантор, который в последней четверти

XIX столетия создал новый раздел математики *теорию множеств*. Данная теория была признана краеугольным камнем всей математики, связующим звеном между логикой и математикой. Многие современные ученые усматривают в теории множеств *схему всякой дедуктивной теории*.

Канторовская теория множеств   это наука о множест-вах самой произвольной природы. Синонимом «множества» являются: «совокупность», «набор», «класс» и т. п.

Еще раз напомню: до Кантора математики если и говорили о бесконечности, то только как о потенциальной бесконечности, бесконечности **становящейся**, которая может стать меньше или больше любой заданной величины, но которая в то же время сама всегда остается величиной конечной, как только мы называем или пытаемся назвать какую-либо огромную величину. Короче, потенциальная бесконечность   это вечно незавершенный процесс, а из незавершенного трудно делать что-то завершенное, пригодное для практических целей.

Теория множеств Кантора имеет дело с актуальной бесконечностью, соответственно чему автором данной теории делается попытка создать математический аппарат для описания актуально бесконечных множеств. Но самое важное для нас в этой теории то, что в ней на операции с множествами и подмножествами не накладывается никаких ограничений, обусловленных природой объектов, составляющих множества. В таком случае понятия теории множеств сближаются с понятиями математической логики.

Все было бы хорошо для математики и логики, если бы в теории множеств довольно быстро не были обнаружены некоторые вредные изъяны, вызванные парадоксами или антиномиями (неразрешимыми противоречиями). Чем были вызваны эти неразрешимые противоречия?

Обычно само множество не является одним из своих собственных элементов. Например, элементы множества всех ныне здравствующих бездарных писак не множества, а конкретные индивидуальности. Кажется ясным, что само множество не может принадлежать к числу своих собственных элементов. Множество писателей не есть писатель. Правда, мы сплошь и рядом имеем дело с такими множествами, элементами которых являются также множества. Скажем, в армии основными структурными элементами батальона являются роты, т. е. определенные множества солдат. Если рота является структурным элементом батальона, то каждый такой элемент множество. И все же само множество (батальон) не может быть отнесено к своим собственным элементам.

Теперь объединим в единое множество все возможные множества. Получится нечто в высшей степени странное, а именно: мы будем иметь множество, которое является своим собственным элементом.

Вы никогда не кусали себя за ухо? Попробуйте. Интересно, что получится?

Вам встречался этакий писатель-гулливер, чьи мозги состоят из множества писателей-лилипутов? Наверное, такое может привидеться только в бреду. А что говорят по этому поводу математики?

Математики скорбно мычат, что упорядоченное множество не может обладать столь абсурдным свойством, ибо упорядоченным считается множество лишь в том случае, если оно не является ни одним из своих элементов. На это им могут невежливо возразить академики и лаборанты, задав ужасно каверзный вопросец: является ли множество всех упорядоченных множеств упорядоченным?

Если подобное множество упорядоченное, оно должно находиться в одном ряду с прочими вполне и пристойно упорядоченными множествами, т. е. находиться среди своих элементов (упорядоченных множеств). Но тогда оно перестает быть тем, на что претендует, множеством всех упорядоченных множеств. Чтобы не затеряться в толпе множеств, оно непременно должно уподобиться совершенно голому королю, т. е. вынуждено перестать быть упорядоченным. Однако это слишком дорогая цена за банальную королевскую корону.

Всё же допустим, что такое возможно. Что тогда?

Если множество всех упорядоченных множеств не является упорядоченным, оно не может быть отнесено к разряду своих собственных элементов упорядоченных множеств. Но ведь именно в этом случае мы и называем множество упорядоченным, так как под упорядоченным множеством понимается множество, которое не является ни одним из своих элементов.

Стоп! Мы попали в какой-то замкнутый круг: если множество упорядоченное, то оно не упорядоченное, а если оно не упорядоченное, то оно упорядоченное. Боже, что делать?!

Увы, здесь ничего сделать нельзя.

Но если теория множеств ошибочна, то в математике не остается ничего неуязвимого?

Вроде бы и так, а вроде бы и не так. Крупный венгерский математик Роза Петер, успокаивая взбудораженного читателя в своей блестящей книге «Игра с бесконечностью», писала, что до сих пор не удалось полностью заделать трещины, появившиеся в здании математики после столь сильной встряски. И все же нет оснований для удручающих выводов. Это тоже парадокс, но парадокс объяснимый. И пусть Бесконечность, лукаво подмигивающая любознательным дуралеям, не пытается обвести нас вокруг своего бесконечного пальца. Мы тоже не лыком шиты.

Судите сами. Одна из грандиозных проблем канторовской теории множеств связана с так называемой *гипотезой континуума* (*континуум-гипотеза*). Что собой представляет эта гипотеза?

Если элементы двух множеств можно построить парами так, что ни один элемент какого-либо множества не останется без партнера, то мы говорим, что эти два множества имеют одинаковую мощность. А если эти множества бесконечны?

Начну с примера. Натуральные числа представляют собой лишь часть множества рациональных чисел. Это понятно. Непонятно другое, а именно: мощность множества всех рациональных чисел равна мощности множества всех натуральных чисел. Подобный феномен объясняется тем, что логические принципы и понятия ведут себя достаточно самобытно, т. е. они опираются не столько на опыт и наблюдения, сколько на свои внутренние законы, которым безразлично, что часть равна целому.

Приближаясь к рассмотрению континуум-гипотезы, обратимся в качестве примера к множеству всех действительных чисел. Они расположены на числовой прямой непрерывно и словно слипаются. Поэтому мощность множества действительных чисел называют *мощностью континуума*, где под словом «континуум» понимается непрерывность.

По отношению к бесконечным мощностям можно сформулировать вопрос: существует ли для каждой мощности мощность, непосредственно за ней следующая? Да, существует. Для такого утвердительного ответа Кантор обобщил понятие обычного числа и получил понятие трансфинитного (трансконечного; выходящего за пределы конечного) числа.

Трансфинитные числа (бесконечные мощности) ведут себя так же, как и натуральные числа. Наименьшей бесконечной мощностью является мощность множества натуральных чисел.

Велика ли пропасть, разделяющая счетную и континуальную (непрерывную) бесконечность?

Вопрос с большим подвохом. Будем внимательны! Посмотрим, что творится в мире между любыми соседними числами натурального ряда. В этом мире располагается бесконечное множество точек числовой прямой. Следовательно, пропасть между счетным множеством и континуумом бесконечно велика. Согласиться с этим можно, но остается вопрос: существуют ли в этой зияющей пропасти промежуточные бесконечности?

Кантор считал, что бесконечных множеств с промежуточной мощностью не существует. А может быть, все-таки существуют? Проблема!

Называется она *проблемой континуума*. Эта проблема связана с вопросом о так называемой *аксиоме выбора*. Что вызвало к жизни данную аксиому?

Исходные положения канторовской теории множеств не удовлетворяли одному из основных требований математической логики   непротиворечивости системы аксиом, о чем свидетельствуют выявленные в ней противоречия.

Выход из этого кризиса ученые увидели в том, чтобы построить такую аксиоматику, которая давала бы всё, что нужно, и ничего лишнего. И такая аксиоматика была построена. По имени своих авторов она получила название системы аксиом Цермело Френкеля. Для успешной борьбы с противоречиями эти авторы ввели специальную ограничительную аксиому, запрещающую существование таких множеств, которые приводят к неразрешимым противоречиям. Из данной аксиомы следует справедливость утверждения Кантора об отсутствии промежуточных мощностей между счетным множеством и континуумом.

Противоречит или не противоречит аксиома выбора другим исходным аксиомам теории множеств?

Отвечая на этот вопрос, австрийский ученый Курт Гёдель (1906 1978) показал, что, принимая истинность континуум-гипотезы, мы не введем никаких противоречий в теорию множеств.

Все вышесказанное относится скорее к логической реконструкции истории теории множеств, а теперь я попытаюсь вместе с вами, читатели, вжиться в эту историю на примере биографии одного выдающегося ученого XIX XX вв.

Друг выдающегося немецкого математика и логика Давида Гильберта (1862 1943), почетного члена АН СССР (1934), взяв в руки книгу миссис Констанс Рид, посвященную жизни и творчеству Гильберта, был вначале преисполнен скепсиса. Он сомневался в возможностях кого-либо, не очень хорошо знакомого с математикой, написать приемлемую книгу об одном из великих математиков своего времени. Тем не менее при чтении книги его скепсис исчез, уступив место восхищению успехом автора.

Не пересказывая ее детально, ибо это дело совершенно неблагодарное, я все же предлагаю вечно торопящемуся куда-то читателю вместе со мной бегло перелистать страницы этого пухлого тома, обратив основное внимание на эволюцию логико-математических идей. Это занятие полезно тем, что мы начинаем видеть и понимать рассматриваемые логиками вопросы в их драматическом движении. Понимание делает нас смелыми, и мы можем безбоязненно, но не бесцеремонно принимать к сведению существующую трактовку логических понятий и законов, не считая эти трактовки истинами в последней инстанции.

Итак, 23 января 1862 г. вблизи Кенигсберга (нынешний Калининград) в семействе Гильбертов появился первенец, названный Давидом.

Столица Восточной Пруссии возникла в середине XIII в., когда рыцари Тевтонского ордена, сокрушая огнем и мечом пруссов, коренных жителей этих прибалтийских земель, воздвигли свой замок на холме в пойме реки Прегель, впадающей в Балтийское море.

Дом Гильбертов на Кирхенштрассе стоял в нескольких кварталах от реки, на маленьком острове которой находился старинный собор. У стен этого собора покоится прах основоположника классической немецкой философии Иммануила Канта.

В приготовительной школе Королевской Фридрихсколлегии Давид получил знания, необходимые для поступления в гуманитарную гимназию. Гимназия Фридрихсколлегии, выпускником которой был Кант, в XIX столетии не была лучшим учебным заведением Кенигсберга. Здесь изучали латинский и греческий языки, математику. Естественные науки в гимназии не преподавались. Языковые классы составляли основную часть учебной программы.

Давид не блистал способностью заучивать наизусть тексты. По словам одного из его друзей, языковые классы вызывали у него больше грусти, чем радости. Его любимым предметом была математика, которая, как вспоминал позднее Гильберт, не требовала усилий для запоминания, ибо достаточно было овладеть основными ее положениями и законами, чтобы без особых трудностей решать конкретные задачи.

Осенью 1879 г. Гильберт перешел из Фридрихсколлегии в Вильгельм-гимназию, где уделялось значительно больше внимания математике.

Данная Гильберту характеристика на обратной стороне удостоверения об окончании гимназии заканчивалась следующими словами: «Что касается математики, то здесь он всегда проявлял живой интерес и глубокое понимание: он самым лучшим образом овладел всем материалом, проходившимся в школе, и научился применять его с уверенностью и изобретательностью».

Когда осенью 1880 г. Гильберт поступил в Кенигсбергский университет, один из прославленных университетов Германии, еще был жив Франц Нейман, организатор первого немецкого института теоретической физики, и вовсю гремела слава бывшего учителя провинциальной гимназии, выдающегося математика Карла Вейерштрасса.

Вопреки желаниям отца Гильберт записался не на юридический, а на математический курс, относившийся в то время к философскому факультету.

Надо заметить, что в те годы университетская атмосфера резко отличалась от строгой дисциплины гимназий. Здесь царил дух свободы и уважительного отношения к личности студента. Со стороны преподавателей, самостоятельно выбиравших предметы, которым они хотели обучать, не было никаких особых требований к бесшабашной студенческой братии. В частности, отсутствовала перекличка, не ставились баллы за успеваемость, не было никаких экзаменов, но только до тех пор, пока не наступала пора получать степень.

Начало университетских занятий Гильберта совпало с периодом, когда профессор из Галле по имени Георг Кантор интенсивно занимался разработкой оригинальной и смелой математической теории теории множеств.

В 1883 г. Гильберт сближается с Германом Минковским (1864 1909), которому предстоит в будущем дать геометрическую интерпретацию специальной теории относительности (знаменитое *пространство Минковского*), а в восемнадцать лет он получит высшую премию Парижской Академии за конкурсную работу по математике.

Окончив университетский курс, необходимый для получения докторской степени, Гильберт начал готовиться к защите диссертации.

Проблема, которую предложили Гильберту для диссертации, касалась вопросов модной тогда теории алгебраических инвариантов. Хотя проблема была довольно трудной, но диссертант блестяще справился с ней.

Декабрьским днем 1884 г. был сдан устный экзамен, а спустя два месяца в актовом зале университета состоялся публичный выпускной экзамен. На этом экзамене Гильберт защищал два тезиса. Первый тезис касался экспериментального способа определения абсолютного электромагнитного сопротивления. Второй тезис имел философский характер, воскрешавший идеи Канта.

Кант, читавший в университете родного города лекции по философии и математике, утверждал, что человек обладает некоторыми понятиями, имеющими доопытный (априорный) характер, в отличие от понятий, получаемых опытным путем (апостериори). На логику, арифметику и геометрию философ указывал как на образцы априорного знания.

Открытие в XIX столетии неевклидовой геометрии сделало в высшей степени сомнительными идеи Канта, ибо неевклидова геометрия подчеркивала тот факт, что знания, заложенные в аксиомах Евклида,

являются не априорными, а апостериорными, т. е. опытными.

Защищая свой тезис, Гильберт доказывал: то, что справедливо для геометрии в свете открытия неевклидовой геометрии, не распространяется на арифметику. Поэтому возражения против теории Канта об априорной природе базисных арифметических понятий необоснованны.

По окончании диспута Гильберту была присуждена степень доктора философии.

Учитывая трудности университетской карьеры и неопределенность в оплате преподавательского труда, молодой доктор философии начал готовиться к сдаче государственного экзамена, дающего право быть учителем гимназии. Этот экзамен был успешно сдан весной 1885 г.

В том же году Гильберт начал обдумывать план своего научного путешествия. Первым пунктом планируемого путешествия должен был стать Лейпциг, где трудился известный всему математическому миру тридцатишестилетний Феликс Клейн (1849 1925), прославившийся своей Эрлангенской программой, которая составила целую эпоху в математике. Кстати, женат он был на дочери Гегеля.

В Лейпциге Гильберт посещал лекции Клейна и принимал активное участие в работе его семинара. Клейн высоко оценил способности молодого доктора из Кенигсберга.

Наступила весна 1886 г., и неутомимый Гильберт предпринимает путешествие в Париж, где наносит рекомендованные Клейном визиты к математикам. Следуя наставлениям Клейна, он стремится завязать дружеские отношения с Анри Пуанкаре.

Летом Гильберт возвращается в Кенигсберг, где становится после сдачи соответствующих экзаменов доцентом университета.

Светская жизнь новоиспеченного доцента не была скучной. По словам друзей, Гильберт был веселым молодым человеком с репутацией энергичного танцора и обворожителя. Он неутомимо флиртовал со многими кенигсбергскими девицами, но особенно много внимания уделял дочери городского торговца Кете Ерош, которая стала впоследствии его женой. Их свадьба состоялась 12 октября 1892 г.

Через три года после свадьбы чета Гильбертов покидает Кенигсберг и переезжает в Геттинген, где находится известный всей научной Германии университет, свято хранится научная традиция Карла Фридриха Гаусса.

Как мы знаем, Гаусс был первым математиком, которому пришла в голову мысль, что отрицание евклидова постулата о параллельных прямых не приводит к противоречию и, следовательно, возможны неевклидовы геометрии.

Хотя после Лобачевского и Бояи большинство математиков признали возможность строить различные неевклидовы геометрии, часть из них так и не смогли понять того, что другие аксиомы Евклида также являются в известном смысле произвольными предположениями. И все же росло число ученых, решившихся на эксперимент с математикой. Один из них немецкий математик Мориц Паш (1843 1930), отказавшись от дурной привычки к наглядности, попытался свести геометрию к упражнениям в логическом синтаксисе, а другой итальянский математик Джузеппе Пеано (1858 1932), перевел работу Паша на изобретенный им язык символической логики, занявшись исчислением соотношений между логическими переменными.

Не остался в стороне от новых веяний в математике и Гильберт, объяснявший своим студентам и коллегам, что прямая, точка и плоскость, как их определял Евклид, не имеют жестко закрепленного за ними смысла. Более того, свой строгий математический смысл они получают только в связи с теми аксиомами, которые для них выбираются.

Таким образом, Гильберт доводит воззрения в духе Паша и Пеано до их логического завершения. Он безбоязненно утверждает, что даже названия основных понятий математической теории могут быть выбраны произвольно. Эту мысль он остроумно сформулировал своим друзьям на вокзале в Берлине: «Следует добиться того, чтобы с равным успехом можно было говорить вместо точек, прямых и плоскостей о столах, стульях и пивных кружках». Что Гильберт имел в виду?

Если заменить слова «точка», «прямая» и «плоскость» словами «стол», «стул» и «пивная кружка», в геометрии как абстрактно-теоретической науке ничего не изменится, ибо, независимо от названий, мы будем иметь дело с абстрактными объектами, для которых справедливы соотношения, выражаемые аксиомами.

Подобные новаторские идеи существенно затрагивали основу основ математики, радикально меняя воззрения на природу математических объектов, которые долгое время ассоциировались с величинами и геометрическими фигурами. Математики второй половины XIX в. начинают соглашаться с тем, что в сфере их науки вполне правомерно рассуждать об объектах, не имеющих никакой наглядной интерпретации. Выражая эти настроения, вернее, опережая их, Дж. Буль писал еще в 1854 г.: «В природе математики не заложена необходимость заниматься идеями числа и величины».

Новые взгляды на объекты математики способствовали широкому применению в ней аксиоматического метода, а вместе с ним и символической логики. Задачу математики многие начинали видеть в том, чтобы создать учение об отношениях между абстрактными объектами, о которых ничего не известно, кроме описывающих их некоторых свойств, аксиоматически полагаемых в основание теории.

В Геттингене были опубликованы знаменитые лекции Гильберта под названием «Основания геометрии». В этих лекциях был ясно намечен подход к ключевым проблемам математики, получивший название *метаматематики* (буквально: *за пределами математики*).

Метаматематика это своеобразная *сверхматематика*, главной задачей которой является доказательство непротиворечивости формализованных теорий, рассматриваемых как бы извне, как бы сверху, с высоты полета логико-математической мысли. Естественно предположить, что ее методы должны быть в известном смысле сверхформализованными, сверхжесткими для проникновения в гранит формализованных теорий.

Но вот было доказано, что процесс формализации бесконечен, что метаматематика это еще не высшая инстанция для оценки формализованных теорий. Каков же выход из создавшейся ситуации?

Выход предложил ассистент Гильберта, талантливый молодой логик Герхард Генцен (1909 1945), который нашел соответствующий инструмент для метаматематики. Этим инструментом оказалась так называемая *математическая индукция*. С ее помощью была осуществлена мечта Гильберта доказательство непротиворечивости арифметики. Однако предложенное доказательство существенно снижало требования, первоначально предъявляемые Гильбертом к метаматематике. Впрочем, все это произошло гораздо позднее того периода творчества, на котором мы остановились.

Разрабатывая метаматематику, Гильберт настаивал на том, чтобы его система аксиом удовлетворяла уже известным нам требованиям. Данная система должна быть, во-первых, **полной**, во-вторых, **независимой**, в-третьих, **непротиворечивой**.

Особое значение Гильберт придавал требованию непротиворечивости аксиом, так как при новом понимании математической теории как системы теорем, выводимых дедуктивно из множества произвольно выбранных аксиом, понятие непротиворечивости теории было единственно эффективной заменой интуитивно очевидных математических истин.

Удивителен и тревожен мир математики. Не успели прозвучать вещие слова, предрекавшие бурный

расцвет математической логики, а уже начали сгущаться грозовые тучи над головами математиков и логиков. Доцент Геттингенского университета Эрнст Цермело (1871 1953), которого высоко ценили Гильберт и Минковский и который предпочитал виски любой компании, указал Гильберту на досадный парадокс в теории множеств. Аналогичным образом поступил молодой английский логик и философ Бертран Рассел (1872 1970), указавший на этот же парадокс талантливому немецкому математику Готлобу Фреге (1848 1925) в тот самый момент, когда Фреге готовился послать в печать свой труд по основаниям арифметики.

Логики обычно говорят: данная теория содержит антиномию, или парадокс, если в ней доказуемы два противоречащих друг другу выражения. А что же математики?

Увы, лишь немногие из них были обеспокоены возникновением антиномий, имеющих то или иное отношение к их теоретико-множественным представлениям. Большая часть считала, что антиномии это философские фокусы, а их эквивалент, парадоксы, это то, что относится к лингвистике, а не к математике, где имеют дело с трудностями в форме противоречий. Однако время показало, что проблемы антиномий не только являются философскими или лингвистическими, но и имеют самое прямое отношение к математике.

Следуя английскому математику и логику Ф. П. Рамсею (1903 1930), чья преждевременная смерть явилась тяжелой утратой для науки, ученые-теоретики различают логические и семантические (смысловые) антиномии. К логическим антиномиям относится известная антиномия Рассела, суть которой состоит в следующем.

Для некоторого произвольного множества уместно выяснить, является оно своим собственным элементом или нет. Нам, скажем, ясно, что множество планет не является большой планетой. Следовательно, множество планет не есть собственный элемент. Но множество может состоять из одного элемента. Такое множество является собственным элементом. Очевидно, собственным множеством должно являться и множество всех множеств.

Проверим это утверждение, обозначив множество всех множеств большой буквой *М*. Если *М* есть элемент *М* (элемент самого себя), то оно принадлежит множеству всех множеств, не являющихся собственными элементами. Следовательно, *М* не есть собственный элемент. С другой стороны, если *М* не есть собственный элемент *М*, оно не принадлежит множеству всех множеств, не являющихся собственными элементами. Следовательно, *М* является собственным элементом. Теперь можно констатировать: *М* есть элемент *М* в том и только в том случае, когда *М* не есть элемент *М*. Проиллюстрируем это противоречие на следующем примере.

Допустим, что живет в какой-то деревне трудолюбивый цирюльник, который бреет только тех ленивых жителей деревни, которые не бреются сами. Если мы обозначим его буквой x и будем рассуждать уже известным образом, то придем к заключению: x бреет x в том и только в том случае, когда x не бреет x.

Конечно, въедливый читатель сразу укажет на совершенно дурацкое условие, которому должен, по предположению, удовлетворять наш мучающийся философским вопросом цирюльник (брить ли самого себя?). Это условие (жизненная ситуация) оказывается внутренне противоречивым, а следовательно, невыполнимым. Чтобы избежать противоречия, предлагается добавить всего лишь несколько слов к описанию ситуации, а именно: цирюльник бреет всех жителей деревни, не считая себя самого.

К сожалению, в теоретической науке все обстоит не так просто, как в случае с деревенским цирюльником, что подчеркнули своими парадоксами Цермело и Рассел. Поэтому необходим некоторый отход от традиционных способов логических рассуждений.

Если уж так необходим отход от традиций, то я предлагаю оценить возможности иных традиций, в развитие которых свой позитивный вклад внес Фрэнк Плумптон Рамсей.

Родителями нашего Фрэнка Плумптона были Артур Стэнли Рамсей и Агнес Мэри Вилсон. Артур Рамсей являлся президентом Кембриджского колледжа Магдален и одновременно преподавателем математики в этом же колледже.

Самым старшим из четырех детей (двух братьев и двух сестер) семейства Рамсеев был Фрэнк. Его брату Майклу суждено было стать архиепископом достославного английского города Кентербери, где в старые добрые времена живал-поживал Ансель Кентерберийский (1033 1109), выдающийся богослов и яркий представитель средневековой схоластики, прославившийся своим доказательством бытия Бога, а также прочими не менее интересными вещами.

В 1915 г. Фрэнк поступил в Винчестерский колледж, откуда перешел набираться ума-разума в кембриджский Тринити колледж в надежде стать выдающимся математиком. И он вполне мог стать таковым, если бы, если бы

После получения высшего образования Рамсей поехал в Вену на короткое время, а затем вернулся в Кембридж, где его ожидал весьма и весьма приятный сюрприз избрание членом Королевского Кембриджского колледжа (1924). Это, мой читатель, стоит отметить, так как дело касается вещи необычной.

Фактически Рамсей явился вторым человеком, избранным в Товарищество Королевского колледжа, не будучи, так сказать, королевским избранником.

В 1925 г. Рамсей женился. Этот брак принес ему двух дочерей.

В 1926 г. Рамсея назначают университетским преподавателем математики. Несколько позже он становится директором Математических исследований в Королевском колледже.

Его научная карьера была короткой, но яркой. Рамсей умер в начале 1930г. от желтухи. Однако за то непродолжительное время, в течение которого им читались лекции в Кембридже, он прочно утвердился как талантливый лектор. Его лекции по основам математики производили сильное впечатление на молодых студентов своей замечательной ясностью и энтузиазмом подлинного искателя Истины.

В повседневной жизни Рамсей был тихим, спокойным и скромным человеком, но когда он смеялся, смех его был заразителен. Терпимость к другим и постоянно хорошее настроение делали Рамсея душой любой компании. Правда, брата Майкла коробил атеизм Фрэнка, но, как говорится, каждому своё.

Рамсей был довольно высок и крепок. Носил очки в стальной оправе по причине близорукости, что, впрочем, не мешало ему быть хорошим теннисным игроком. Любил классическую музыку.

Хотя Рамсей был преподавателем математики, но это не препятствовало ему интересоваться и другими научными проблемами, включая проблемы экономической науки и философии.

Как человек и как мыслитель, Рамсей являлся несомненным украшением Кембриджа. Буквально с первых дней своего пребывания в Кембридже он был признан если не всеми, то большинством. Окружающих подкупало в нем не только умение грамотно, квалифицированно и оригинально высказываться по многим абстрактным предметам, но также его искренность и непосредственность, служившие источником вдохновения для партнеров по научным дискуссиям и по решению житейских проблем. Его внушительная физическая комплекция вкупе с острым интеллектом и неподдельным, радостным смехом позволяли легко и непринужденно вписываться в любую ситуацию, а также выходить в шутливой форме из малоприятных ситуаций.

Свою первую и главную работу «Основы математики» Рамсей издал в 1925 г. В этой работе он соглашался с требованием Рассела и А. Н. Уайтхеда (1861 1947), изложенным ими в «Principia Mathematica», касательного того, что математика является частью логики. Правда, Рамсей несколько смягчает данное требование. Во-первых, он предложил опустить аксиому сводимости (англ. reducibility). Во-вторых, им было предложено упростить расселовскую теорию типов относительно некоторых семантических парадоксов как лингвистических. Рамсей соглашался с решением Рассела удалить кое-какие логические парадоксы, вытекающие из теории множеств, с целью сохранения самой теории. Однако семантические парадоксы типа «это есть ложь», по мнению Рамсея, нуждаются в иной интерпретации, не зависящей от значения слова «ложь» в естественных языках.

В 1926 г. Рамсей издал «Математическую логику», в которой полемизировал с новомодными оппонентами Гильберта (Л. Э. Я. Брауэр, Г. Вейль), но вместе с тем критиковал и самого Гильберта за его излишнее пристрастие к полной формализации математики.

Вторая важная работа Рамсея «О проблеме формальной логики» читалась на заседании Лондонского Математического Общества 13 декабря 1928 г. и была опубликована в 1930 г. В данной работе исследовались методы по определению характера последовательности логических формул и связанные с этим некоторые теоремы комбинаторики, что в конечном итоге привело к появлению новой области математики, названной по имени автора *теория Рамсей*. Данная теория стимулировала интенсивные исследования в сфере теории графов, а также в других областях математики.

Однако наибольшее значение теория Рамсей имеет для такой перспективной отрасли математики, как комбинаторика.

Рамсею принадлежит попытка построить математическую теорию вероятностей на базе понятия *частичной веры* (англ. partial belief). Эта работа, имеющая важное экономическое значение, появилась на свет главным образом потому, что Рамсей был близким другом известного английского экономиста Дж. М. Кейнса (1883 1946). Впрочем, дружба дружбой, но Истина превыше всего, а посему Рамсей нередко критиковал Кейнса, и тот в ряде случаев вынужден был признавать справедливость критики в свой адрес.

По вопросам экономики Рамсей написал несколько статей, благодаря чему был сделан определенный вклад в теорию налогообложения и математическую теорию экономической науки.

Значительный и постоянный интерес проявлял Рамсей к философии. Им было написано довольно много работ по логико-философской и собственно философской тематике. По мнению некоторых ученых, если бы не преждевременная смерть Рамсея, то мир имел бы одного из многообещающих философов. К тому же его как бы заслоняла фигура Людвига Витгенштейна (1889 1951), талантливого австрийского философа и логика, представителя так называемой *аналитической философии*, с которым Рамсей был весьма дружен и которому оказал значительную помощь, включая помощь в переводе на английский язык витгенштейновского «Логико-философского трактата» (1922).

Математика, логика, философия и т. д. и т. п., однако за всеми этими чертовски абстрактными науками стоят живые люди, которые, pardon, пукают, сморкаются, икают, храпят по ночам и вместе с тем способствуют интеллектуальному прогрессу человечества.

А теперь поговорим о вещах более интересных не токмо для любителей изящной словесности, предпочитающих философствовать о математике и логике «высоким штилем».

Итак, берем многоученого быка за его геометрически крутые рога.

По словам Гильберта, парадокс Рассела произвел в математике эффект полной катастрофы. Один за другим выдающиеся специалисты в области теории множеств бросали свои исследования. Нависла угроза над дедуктивными методами, так как явно бросалось в глаза, что подобные парадоксы возникли как следствие постоянно используемых в математике дедуктивных методов. Защитников канторовской концепции начали обвинять в том, что они не понимают природы математики и необоснованно переносят на сферу бесконечного методы рассуждений, верные лишь применительно к области конечного.

Гильберт был убежден, что существует способ избавиться от парадоксов, не жертвуя слишком многим. В связи с этим он, как и друг инспектора Крейга, предлагает, чтобы само доказательство стало объектом логико-математического исследования. Так была оформлена идея *метаматематики*, или *теории доказательств*.

Ученый намеревался осуществить свою программу в два этапа. На первом этапе вся математика должна быть формализована, т. е. надо построить некоторую формальную систему, из аксиом которой с помощью четко определенных правил вывода можно было бы вывести по крайней мере основы математики. Такая система должна быть формальной в том смысле, что в ней следует учитывать только вид и порядок символов (их синтаксис), но никак не значение этих символов (их семантику).

На втором этапе Гильберт собирался показать: применение правил вывода к аксиомам никогда не сможет привести к противоречию при условии, что логические рассуждения будут носить настолько элементарный характер, чтобы в их правильности нельзя было усомниться. С помощью таких рассуждений должна быть установлена метатеорема о невозможности противоречия, т. е. Гильберт предлагает исследовать методы математических доказательств средствами теории доказательств (метаматематики). Он настаивает на том, чтобы в теории доказательств разрешалось пользоваться только финитными (конечными) методами, которые позволяют избежать применения понятия актуальной бесконечности. Новый подход должен был также позволить избежать использования актуальной бесконечности и в самой формулировке проблемы доказательства непротиворечивости, так как в любой данной теории имеется счетно-бесконечное множество доказательств, но в утверждении о ее непротиворечивости говорится лишь о произвольной паре доказательств, а не обо всем множестве доказательств как о завершенном объекте.

Гильберту казалось правдоподобным, что проблема непротиворечивости, сформулированная в финитных терминах, может быть решена финитными методами. К сожалению, ученый так и не уточнил, какие же именно методы рассматривались им в качестве финитных.

Предложив превратить математику в формализованную систему, объекты которой выражаются языком символической логики, он указывал, что эти объекты (математические теоремы и их доказательства) должны охватывать совокупность всех теорем данной математической теории. Непротиворечивость такого рода формальной математической системы должна была устанавливаться с помощью финитных методов. Под финитностью методов он понимал практичность использования и возможность эффективного их контроля. Но подразумевать   это одно, а пользоваться конкретными финитными методами   это совершенно другое.

Ни Гильберту, ни его последователям не удалось выполнить намеченную программу во всем объеме, ибо они ошибались, преуменьшая глубину кризиса, в который ввергли математику антиномии. Теоремы Гёделя, из которых вытекает неосуществимость гильбертовской программы, разбили возлагавшиеся на нее надежды. Однако в процессе решения этой задачи было накоплено много ценного в сфере теоретического познания.

Август 1914 г. страшная дата начала 1-й мировой войны.

Гильберт считал войну бессмысленной и антигуманной, о чем прямо и громко заявлял. Его отношение к войне проявилось, в частности, в отказе подписать декларацию группы знаменитых немецких ученых и деятелей искусства, в которой говорилось, что авторы декларации твердо поддерживают кайзера. Это был исключительно смелый поступок. Ведь страна была охвачена ура-патриотизмом, и в националистическом угаре какой-нибудь бюргер-патриот вполне мог проломить голову предателю национальных интересов.

Война оборвала научные связи. Отсутствие контактов с иностранными учеными было невыносимо для Гильберта. Незадолго до войны Рассел и Уайтхед опубликовали свою фундаментальную работу по основаниям математики, и Гильберт надеялся на непосредственные контакты с заинтересовавшими его английскими учеными. И вот теперь война, и он не может пригласить Рассела в Геттинген.

Отгремев, замолкли пушки. Война закончилась, и Европа, тяжело сопя, принялась разбирать развалины и мучительно медленно отстраиваться.

В тяжелые послевоенные годы научная жизнь Германии хотя и была в каком-то болезненном оцепенении, но все же тянулась к свету Истины, постепенно наполняя энергией пытливых молодых людей, к которым благоволил Гильберт.

В 20-е годы Гильберт снова возвращается к мысли о том, что математика могла бы восстановить свой пошатнувшийся авторитет на основе формализации соответствующих утверждений и доказательств, которые, будучи записаны на языке символической логики, должны рассматриваться в качестве непосредственных объектов изучения.

Однажды на собрании в Мюнстере, посвященном памяти Вейерштрасса, внесшего большой вклад в математику и в разработку системы логического обоснования математического анализа, Гильберт решил выступить с речью «О бесконечном». Дело в том, что анализ Вейерштрасса и понятие бесконечности, фигурировавшее в работах его оппонента Кантора, были главными объектами нападок со стороны противников формализма.

В своем докладе Гильберт указал на то, что смысл используемого в математике понятия «бесконечность» до сих пор окончательно не выяснен. По его мнению, самое глубокое проникновение в природу бесконечного было связано с теорией множеств Кантора, которая имеет больше философский, чем математический, характер. Именно в этой теории начали появляться неразрешимые традиционными методами противоречия, вызванные использованием определений и дедуктивных методов. И всё же, считает Гильберт, выход из тупика есть. Математика должна стать набором формул двух видов. Первые формулы должны нести осмысленную математическую информацию, тогда как вторые ничего не должны обозначать, кроме того, что они представляют собой идеальную структуру теории. При этом ни в коем случае нельзя забывать о методе конструирования идеальной структуры, каковым является доказательство непротиворечивости. Но как все-таки справиться с проблемой непротиворечивости?

В решении этой проблемы необходимо опираться на интуитивные и финитные методы, с помощью которых добиваются позитивных результатов в элементарной теории чисел. Проверкой же теории послужила бы ее способность решать старые проблемы.

«Никто,   заявлял с воодушевлением Гильберт,   не изгонит нас из рая, созданного для нас Кантором».

«Математический рай» покинуть трудно и жалко, но в реальной жизни мы многое покидаем или оставляем в силу различных причин и обстоятельств. В 1930 г. Гильберту должно было исполниться 68 лет, официальный возраст отставки профессора. Городской совет Кенигсберга решил присвоить ему почетное гражданство. Эта церемония была приурочена к осени того

же года, когда в Кенигсберге должен был состояться съезд Общества германских ученых и врачей.

В своей торжественной речи перед жителями и гостями Кенигсберга Гильберт воодушевленно сказал: «Средство, которое помогает сглаживать различие между теорией и практикой, между мышлением и экспериментом, есть математика».

Когда Гильберт в торжественной речи, исполненной оптимизма, превозносил неисчерпаемые возможности математики, свою работу заканчивал двадцатипятилетний специалист по математической логике Курт Гёдель. В ноябре 1930 г. эта работа, подрывавшая оптимизм Гильберта, была готова для публикации. Чтобы понять весь ужасный для Гильберта смысл этой публикации, необходимо иметь в виду следующее.

В конце 20-х гг. Гильберт добавил к проблеме непротиворечивости новую проблему   проблему полноты формальной системы. Вызвано это было тем, что попытки некоторых ученых доказать непротиворечивость в качестве исходного принципа математического мышления потребовали существенного ограничения формальной системы. Гильберт с этим не согласился. Вот почему он был «слегка рассержен», когда услышал о работе Гёделя, который со всей логико-математической строгостью доказывал принципиальную неполноту формализованной теории чисел. При этом доказывалась теорема, из которой однозначно следовало, что не существует финитного доказательства непротиворечивости формальной системы, достаточно полной, чтобы формализовать все финитные рассуждения. Тем самым сводились на нет все усилия Гильберта математически доказать непротиворечивость формальной системы.

По воспоминаниям друзей Гильберта, сначала он был рассержен, но затем, проглотив обиду, попытался найти конструктивный подход к проблеме. К тому же, как ни странно, сам Гёдель чувствовал, что его работа не противоречит «формализму» Гильберта. Действительно, вскоре стало ясно, что следует не отказываться от первоначальной программы Гильберта, благодаря которой плодотворно развивалась теория доказательства, а лишь несколько ослабить требования формализации. Это понял и Гильберт, предложивший заменить свою схему полной индукции на правило, названное *трансфинитной индукцией.*

А теперь о Гёделе. Наш математический гений родился в 28 апреля 1906 г. в чешском городе Брно, где прошла его юность и где он окончил среднюю школу.

В 1923 г. Курт поступает в Венский университет, где принимает участие в семинаре под руководством Морица Шлика (1882 1936), известного австрийского физика и философа, одного из основателей знаменитого Венского кружка, ставшего центром движения так называемого *логического позитивизма.* Этот Кружок возник на базе семинара, организованного в 1922 г. Шликом при кафедре философии индуктивных наук Венского университета.

В 1929 г. талантливый выпускник Венского университета защищает докторскую диссертацию и с 1930 г. начинает заниматься научно-педагогической деятельностью в стенах этого же университета. Через год Гёдель публикует результаты своих исследований в виде доказательства теоремы неполноты («Uber formal unentscheidbare Satze der Principia Mathematica und verwandter Systeme»), из которого следует, что в любой аксиоматической математической системе имеются суждения, которые не могут быть доказаны или опровергнуты в рамках данной системы. Тем самым была подведена черта под попытками аксиоматизировать всю математику, включая попытки Рассела Уайтхеда и Гильберта. Однако, что очень важно иметь в виду, гёделевская теорема не покушалась на сам принцип или, лучше сказать, идею формализма, но при этом убедительно демонстрировала, что любая формальная система должна быть более всесторонней и более богатой, чем это предусматривалось гильбертовской программой формализации математики.

В 1933 г. в Германии пришли к власти нацисты. Сначала это не произвело на Гёделя никакого эффекта, поскольку он мало интересовался политикой. Однако после убийства Шлика нацистски настроенным студентом Гёдель пробудился от своей аполитичной спячки, испытав жуткое нервное потрясение. А за несколько лет до этих трагических событий он получил из США приглашение прочитать курс лекций, которое принял, и уже в 1934 г. начал читать лекции в Принстоне.

После кратковременного пребывания в Америке Гёдель вернулся в Вену, где в 1938 г. женился на Адели Поркерт.

В 1940 Гёдель эмигрировал в Соединенные Штаты. С 1953 г. и до самой смерти он числился профессором Принстонского института перспективных исследований. Кроме того, состоял членом Национальной Академии наук США и Американского философского общества. В 1974 г. Гёдель получил за свои исследования Национальную Медаль Науки.

Его работа «Consistency of the axiom of choice and of the generalized continuum-hypothesis with the axioms of set theory» (1940) считается классикой современной математики.

Брат Гёделя, Рудольф, доктор медицины, писал в своих воспоминаниях, что Курт имел очень индивидуальное и непоколебимое мнение обо всем, а поэтому переубедить его было практически невозможно. К сожалению, он всю жизнь верил, что всегда прав не только в математике, но даже в медицине, в результате чего был очень трудным пациентом для докторов. После серьезного кровотечения от возникшей язвы Курт всю оставшуюся жизнь придерживался чрезвычайно строгой диеты, заставившей его изрядно похудеть, что отнюдь не шло на пользу здоровью. К концу жизни он начал убеждать себя в том, что пища его только отравляет и стал все больше морить себя голодом; так продолжалось до самой смерти.

У каждого свои причуды. Великие ученые не роботы, а люди, у которых есть свои слабости, свои страхи и много другого своего, которое биографы с пуританским стилем мышления не часто выставляют напоказ, дабы поучать читателя, наставляя его на путь истинный. Но что есть истина? Где ее последняя инстанция?

Увы, я этого не знаю, а посему возвращаюсь к ситуации предвоенной Европы 30-х гг. XX столетия.

Пока математики мирно спорили, Германия отнюдь не мирно погружалась в коричневые сумерки. В 1933 г. президент страны Пауль фон Гинденбург (1847 1934), этот старый солдафон и маразматик, назначил Адольфа Гитлера (наст. фам. Шикльгрубер, 1889 1945) канцлером Германии. Почти сразу же за этим университетам было приказано уволить из своих штатов всех евреев. От такого воистину сатанинского приказа очень пострадала школа Гильберта. Старый ученый был страшно огорчен, когда узнал, что многие из его друзей и коллег были вышвырнуты за университетские стены.

Супруги Гильберты столь открыто выражали свое неприятие нового режима, что их друзья начали опасаться за безопасность стариков. Но спустя некоторое время Гильберты, замкнувшись в себя, перестали шокировать нацистов своими ядовитыми репликами.

Вторая мировая война, лязгая гусеницами фашистских танков, стальной лавиной катилась по Европе. На полях далекой России разыгрывалась судьба всего мира, которому было не до метаматематики.

Старенький Гильберт тихо доживал свою жизнь в Геттингене. Иногда его можно было встретить на лавочке около университета. Он грустно смотрел в одну точку, отключась от всего мирского.

14 февраля 1943 г. Гильберта не стало. Он скончался от осложнений, вызванных переломом руки. Через два года умерла его жена.

Как сложилась судьба логико-математического наследия выдающегося ученого?

Несмотря на тяжелый удар, нанесенный Гёделем по гильбертовской программе формализации математики и установлению ее непротиворечивости с помощью абсолютного доказательства, вопрос о непротиворечивости математики, поднятый Гильбертом, сыграл неоценимую роль в истории логико-математической мысли. Между прочим, по словам самого Гёделя, «доказательства непротиворечивости на основе подходящих и более сильных математических предпосылок (как у Генцена или других) представляют интерес и ведут к чрезвычайно важному проникновению в структуру теории доказательств в математике».

Благодаря Гильберту была создана новая область науки метаматематика. Правда, отдельные исследования в этой области были и до него, но только он получил наиболее оригинальные и позитивные результаты в теории доказательств. Поэтому Гильберт заслуженно считается отцом метаматематики как самостоятельной науки.

Все, что нам надо знать о сути гильбертовского «формализма», можно передать словами его строптивого и талантливого ученика Германа Вейля (1885 1955), писавшего примерно следующее. Если Евклид пытался дать описательное определение основных пространственных объектов и соотношений, участвующих в его аксиомах, то Гильберт решительно отказался от такого подхода. По его мнению, основные понятия геометрии содержатся в аксиомах, которые являются неявными и неполными определениями этих понятий. Кроме того, Евклид считал аксиомы очевидными, ибо его интересовало реальное пространство физического мира, тогда как в дедуктивной системе геометрии очевидность аксиом совершенно несущественна. Аксиомы служат лишь своеобразными *предположениями*, из которых выводятся те или иные логические следствия.

Гильберт стремился не просто построить геометрию на прочном фундаменте, но исследовать логическую структуру геометрического здания. Он был первым, сумевшим перейти на этот более высокий, метатеоретический уровень. Взобравшись столь высоко, смелый ученый столкнулся с вопросом о независимости аксиом, о невыводимости их из данной системы аксиом. С этим вопросом тесно связан вопрос о непротиворечивости наших теоретических утверждений, т. е. вопрос о независимости   это вопрос о доказательстве невозможности вывода одного утверждения из других в данной системе утверждений. При этом предметом исследования становятся сами утверждения, а не те объекты, к которым они относятся. Однако за подобный отход от непосредственно математических объектов приходится дорого платить, так как мы сводим все к вопросу непротиворечивости аксиом (арифметики), который остается открытым. Аналогично обстоят дела с утверждением о полноте, означающем, что каждое общее утверждение об объектах, участвующих в аксиомах, может быть выведено из них. Но вопрос о полноте формализма в том абсолютном смысле, который ему придавал Гильберт, был снят Гёделем, указавшим способ построения арифметических утверждений, истинность которых очевидна, но они тем не менее не выводятся в рамках формализма. В результате границы того, что заслуживало нашего доверия с интуитивной точки зрения, вновь стали размытыми и неопределенными. В этом, по мнению Вейля, состоит основная проблема, волновавшая Гильберта.

Подытоживая и давая краткую характеристику гильбертовской программе формализации, можно сказать так: данная программа нацелена на спасение от противоречий сверхконечных методов, связанных с использованием сверхконечных понятий типа «актуальная (завершенная) бесконечность». С этой целью Гильберт решил сделать логику, применяемую в математике, объектом логико-математических исследований.

Низко поклонимся ему и пойдем дальше.

Итак, постулаты непротиворечивости, независимости, полноты и... **разрешимости** дедуктивной системы являются базисом аксиоматического метода. Что касается разрешимости, то разрешимой является такая система, в которой по отношению к каждому правильно построенному высказыванию можно обосновать либо выводимость этого высказывания из аксиом системы, либо его невыводимость. Говоря другими словами, проблема разрешимости состоит в том, чтобы определить, возможно ли для данного формализованного языка вообразить некую механическую процедуру, которая позволяла бы для любого отношения из рассматриваемого формализма определить, истинно это отношение или нет. Данная проблема решаема для формализмов, содержащих мало первоначальных знаков и аксиом, но для более богатых систем это сделать невероятно трудно, если вообще возможно. Всё в конечном счете упирается в проблему непротиворечивости.

Видный американский математик, логик и философ Уиллард ван Орман Куайн (1908 2000) первым назвал операцию использования логических правил для проверки логических формул *разрешением формулы.* Суть разрешения логической формулы состоит в исследовании того, при каких подстановках *истина* или *ложь* на место переменных формула превращается в истинное или ложное высказывание. Тем самым получается ответ на вопрос, является ли логическая формула **выполнимой**, т. е. переходит ли она хотя бы при одном подборе подстановок в истинное высказывание, и **общезначимой** (переходит ли она в истинное высказывание при любых подстановках).

Куайн не был первооткрывателем процедур разрешимости. Его заслуга перед логикой заключается в том, что проблему разрешимости он сфокусировал на фундамент логической науки, каковым является логика высказываний. Логике высказываний будет посвящен следующий раздел данной книги.

Как уже отмечалось, стремительный рост популярности аксиоматического метода вызван свободой в выборе способов определения математических объектов и отношений между ними. В этом случае ученый-теоретик не скован требованиями эмпирического изучения каких-либо физических объектов. Он сам выдумывает объекты, но не как сказочник, а именно как ученый, неукоснительно ориентирующийся на то, чтобы его теоретические утверждения были хотя бы в идеале выполнимы для каких-либо конкретных объектов (идеальных или реальных). В основе таких теоретических утверждений находятся первичные утверждения, которые тем или иным образом указывают на интересующие нас свойства объектов теоретического конструирования и тем самым выделяют их из бесконечного числа других возможных объектов. Эти базисные утверждения, выделяющие совокупность объектов, носят название *аксиом*. Если для какой-либо конкретной совокупности объектов некоторые введенные нами аксиомы оказываются истинными, то мы говорим, что данная совокупность объектов *удовлетворяет* системе этих аксиом или является *интерпретацией* данной системы аксиом.

Для практики научного познания особенно важно в использовании аксиоматического метода то, что, делая логические выводы из аксиом, мы можем получать утверждения, истинные для **любой** системы объектов, удовлетворяющей данным аксиомам.

Совершенно ясно, что соответствие между аксиомами и предметами объективной реальности никогда не имеет прямого характера. Когда же ставится вопрос о подобном соответствии, отвечая на него, мы должны покинуть сферу чистого разума и выйти в сферу прикладных знаний, чтобы наполнить конкретным содержанием наши аксиоматические построения. Например, мы можем попытаться наполнить физическим содержанием аксиомы геометрии Евклида или

Лобачевского. Но для этого необходимо указать на физические реалии, соответствующие, скажем, терминам «точка» или «прямая», которые содержатся в аксиомах. Только после этого аксиомы могут превратиться в физические утверждения, которые можно подвергнуть экспериментальной проверке.

При рассмотрении любой системы аксиом возникают специфические вопросы, которые решаются с помощью интерпретации. К числу этих вопросов относится вопрос о непротиворечивости системы аксиом. Появление несовместимых утверждений, выведенных нами из принятой системы аксиом, свидетельствует о том, что нашей системе аксиом не может удовлетворять никакая система объектов. Чтобы быть твердо уверенными в надежности выбранной системы аксиом, в ее непротиворечивости, мы должны выработать методы точной интерпретации данной системы.

Так же дело обстоит и с вопросом о независимости аксиом. Аксиома считается независимой в данной системе, если она невыводима из остальных аксиом этой системы, не дублирует их. Для доказательства независимости какой-либо аксиомы достаточно найти систему объектов, которая удовлетворяла бы всем аксиомам системы, кроме данной аксиомы. Следовательно, чтобы смело пользоваться системой аксиом, необходимо иметь такие объекты, которые могут служить точной интерпретацией этой системы аксиом.

Откуда берутся методы интерпретации аксиом?

Источником интерпретации на теоретическом уровне являются математические понятия и в первую очередь понятия теории множеств, отражающие главные принципы построения множеств. К этим принципам относятся следующие:

1. Если дано множество объектов, то посредством точно сформулированного признака можно выделить из него подмножество.

2. Если имеется совокупность множеств, то можно получить новое множество, объединив все элементы этих множеств.
3. Для каждого множества можно образовать множество всех его подмножеств.
4. Отношения между множествами могут иметь функциональный характер, т. е. при наличии некоторого общего признака каждому элементу одного множества можно поставить в соответствие элемент другого множества. Это соответствие называется функцией.

Интерпретация аксиоматических систем связана с вопросом разрешимости абстрактно-теоретических построений.

В логике принято считать, что разрешимая теория непременно является аксиоматизируемой. Так ли это?

Допустим, что это так, и зададим некоторое множество формул, называемых аксиомами, а также некоторое отношение между формулами, в силу которого формула называется следующей из некоторых других формул по определенным правилам вывода. Конечная последовательность формул называется доказательством, если каждая формула из этой последовательности либо является аксиомой, либо следует из предыдущих формул последовательности по правилам вывода. Формула, для которой существует доказательство, называется *теоремой.*

Из определения понятия доказательства вытекает, что для любой заданной конечной последовательности формул имеется простой способ проверки, является ли она доказательством.

Аксиоматизируемая теория вовсе не обязательно разрешима. Дело в том, что поиски доказательства для какой-либо конкретной формулы, если они безрезультатны, не дают возможности прийти к заключению, существует ли вообще такое доказательство.

Аксиоматизируемая теория разрешима только тогда, когда имеется чисто механический способ проверки, приложимый к любой формуле. Пользуясь таким способом проверки, мы можем ответить на вопрос, принадлежит ли данная формула нашей теории. В силу этого обстоятельства дедуктивная аксиоматизируемая теория является в некотором смысле излишней роскошью, хотя выписать множество аксиом и правил вывода оказывается делом относительно простым.

Читатель, наверное, заметил: говоря о формулах, автор не сказал, что это такое. Постараюсь восполнить сей пробел.

Когда говорится о формуле некоторой теории, то имеется в виду не математическая формула, а некоторое выражение нашего теоретического языка, рассматриваемое как утверждение. Логический смысл этих утверждений станет нам понятен из дальнейших разделов, но уже сейчас можно отметить следующее. Если мы хотим эффективно систематизировать наши научные знания, нам необходимо научиться осуществлять процедуры вывода. Для этого нужно исходить из некоторой системы утверждений и выводить затем, прямо или косвенно, все остальные утверждения из этих исходных, т. е. из аксиом. Аксиоматический метод состоит в такой организации научного знания, когда из всех истинных утверждений выбирается определенное подмножество, из которого можно вывести все остальные истинные утверждения данного раздела науки.

Формулы-утверждения называются *выполнимыми*, если существует оценка, при которой данные формулы приобретают, например, значение *истина*. Если же такой оценки не существует, то говорят, что указанные формулы невыполнимы, т. е. их значение маркируется словом «ложь».

Каждое выполнимое множество формул непротиворечиво. Верна и обратная теорема, а именно: каждое непротиворечивое множество формул выполнимо.

Переводя сказанное на язык булевой алгебры, можно сказать, что в этом случае всякое выражение, представляющее собой множество (символов), должно рассматриваться как булева функция, а запись этих выражений как формулы. Например, отдельные буквы латинского алфавита (*A, B, C*,...) и любые их комбинации, представляющие множества, являются булевыми функциями множеств.

Если некоторая функция представлена так, что в ее формуле не содержится скобок, стоящих внутри других скобок, и лишних скобок, то каждое заключенное в скобки выражение называется *термом*. Термом называется и каждая буква, не стоящая внутри скобок. Все выражение в целом называется *строкой термов*. Например, функция $A \cap (B \cup C)$ представляет собой строку из двух термов.

Термы в теоретическом языке играют роль существительных и местоимений в естественном языке. Поэтому термы можно рассматривать как наименования входящих в какую-либо структуру (физическую или воображаемую) предметов. Такая трактовка термов делает их применимыми к переменным. Поэтому мы будем причислять переменные к разряду термов.

Эти фантазии на тему термов могут показаться чем-то схоластическим. Должен разочаровать критических критиков: здесь нет никакой схоластики, а есть стремление к логической точности и операциональности. Подчиняясь последнему, логики заменили выражения «суждение» и «понятие», наполненные излишним психологизмом и побочными ассоциациями, выражениями *высказывание* (*пропозиция*) и *терм* (даже не термин, а именно терм, поскольку мы опираемся в данном случае не на физическую теорию, а на теорию множеств).

Интерпретация некоторого теоретического языка заключается в сопоставлении термам из данного языка некоторых предметов, входящих в определенную предметную область (*A*). При этом исходные термы можно понимать как наименование предметов из *A*. Интерпретация сопоставляет каждому функциональному символу ранга *n* некоторую функцию того же ранга, переводящую *n*-ки предметов из *A* в элементы *A*, а каждому символу отношения ранга n некоторое отношение того же ранга, определенное на A.

Непустую область A вместе с определенными на ней функциями, составляющими в совокупности некоторое множество F, и отношениями, составляющими также некоторое множество R, принято называть *структурой*.

При интерпретации нашей целью является сопоставление каждой формуле некоторого утверждения относительно структуры A. Данное утверждение может быть, например, либо истинным, либо ложным.

Уф, поморщился доктор Ватсон.

М-да, сказал слегка побледневший Шерлок Холмс.

Любопытно, заметил инспектор Крейг.

Блестяще! воскликнул мистер Фергюссон.

Несомненно, скромно добавил мистер Мак-Каллох.

А что скажет читатель?

УПРАЖНЕНИЯ

1. Что собой представляет дедуктивное рассуждение?

2. Являются ли математические постулаты и определения самоочевидными?

3. Каким требованиям должна отвечать система аксиом?

4. Кто создатель теории множеств? Что вы знаете о теории множеств?

5. Расскажите о парадоксах теории множеств и попытайтесь решить следующий любопытный парадокс. «Миссионер, очутившийся среди людоедов, обнаруживает, что он угодил как раз к обеду. Они разрешают ему произнести какое-нибудь высказывание с условием, что, если высказывание окажется истинным, его сварят, а если оно окажется ложным, его зажарят. Что надо сказать миссионеру?» (С. Клини.)

6. Что вы можете сказать о континуум-гипотезе?

3

ПОПУЛЯРНО О НЕПОПУЛЯРНОМ

ГЛАВА 3
ПОПУЛЯРНО О НЕПОПУЛЯРНОМ

Любитель логических ребусов из таверны «Жареный петух». Польский ученый интересуется силлогистикой античного философа, который был учеником Платона и учителем Александра Македонского. Аристотель отец европейской логической традиции. Хороша ли формальная логика? Поговорим о формализованных языках. Логика высказываний основа символической логики. Переменные и постоянные в языке науки. Логические законы, таблицы истинности и логические союзы. Возвращаясь к релейно-контактным схемам. Умозаключения для «интеллектуальных машин». Индуктивные и дедуктивные умозаключения. Дедуктивный вывод в логике высказываний. Упражнения.

Закрыв глаза, я представил себе Чарльза Лаутиджа Доджсона сидящим на диване в задумчивой позе. Вокруг расположились взрослые и дети. Все знают, что он большой фантазер и великолепный рассказчик. Вот-вот и мы услышим новую забавную историю.

Угрюмые ночные тени уже начали сменять румяное зарево заката, глухо произнес Доджсон и, выдержав многозначительную паузу, продолжил. Неожиданно вдали показались два путника, спускавшиеся по склону горы. Молодой путник с ловкостью оленя перепрыгивал с камня на камень. Путник постарше еле поспевал за ним, сгибаясь под тяжестью лат и кольчуги обычного для тех мест одеяния туристов.

Образы угрюмых ночных теней магически завораживают слушателей. Присутствующие дамы начинают вздрагивать и поеживаться.

Неплохо идем! воскликнул молодой турист, весело помахивая ржавым мечом.

Идем мы действительно неплохо, со стоном отозвался его спутник, уже натерший себе изрядные мозоли.

Мы вышли из гостиницы примерно около полудня, заметил жизнерадостный юноша. И конечно опоздаем к ужину. Хозяин таверны может нам ничего не оставить и будет вдобавок браниться.

Да, но получит достойный ответ, хрипло откликнулся старший.

Браво! Зададим ему перцу! громко рассмеялся юноша.

Наконец они добрались до таверны «Жареный петух». Злодейского вида хозяин стоял на пороге, скрестив на мошной груди здоровенные волосатые руки.

Ну, что скажете? грозно прорычал он. Чем повеселите меня, висельники?

Надо вам сказать, что у этого потрошителя дичи и деревенской живности была одна крохотная, как кусающаяся блоха, слабость: он любил смаковать силлогизмы и сориты.

Что, что? удивленно пожал плечами один из слушателей мистера Доджсона.

О, парни, это очень просто! ответил тот. Заурядный силлогизм всего лишь умозаключение, состоящее из двух посылок и вывода, а банальный сорит простенькая цепь силлогизмов, в которой опущены кое-какие посылки. Ну это не главное. Слушайте, что было дальше.

Скажи, дружище Хью, сказал старый рыцарь, обращаясь к хозяину таверны, тебе знаком силлогизм, где первая посылка звучит так: «Каждый орел умеет летать», а вторая так: «Некоторые свиньи не умеют летать»?

Ха-ха-ха! Вы меня, очевидно, принимаете за круглого дурака. Каждый сопливый мальчишка в нашей деревне знает вывод этого силлогизма, который звучит так: «Некоторые свиньи не орлы». Если вы хотите попасть в таверну, придумайте что-нибудь позаковыристей.

Хорошо, сказал старший путник, устало расстегивая латы. Наберись терпения и послушай следующий сорит, а потом найди его заключение. Во-первых, всякий, кто не танцует на туго натянутом канате и не ест пирожков с ливером за один пенс, стар. Во-вторых, со свиньями, которые временами испытывают головокружение от избыточного самомнения, обращаются почтительно. В-третьих, разумный джентльмен, отправляясь в дальнее путешествие на воздушном шаре, берет с собой зонтик. В-четвертых, не следует завтракать в присутствии посторонних тому, кто имеет смешной вид и ест пирожки за один пенс. В-пятых, юные существа, смело отправляющиеся в путешествие на воздушном шаре, временами испытывают головокружение. В-шестых, жирные существа, имеющие смешной вид, могут завтракать при посторонних, если только они не танцуют на туго натянутом канате. В-седьмых, ни одно разумное существо не станет танцевать на туго натянутом канате, если оно временами испытывает приступы глупого смеха. В-восьмых, свинья с с веером и портфелем имеет вид приват-доцента. И наконец, в-девятых, все, кто не прогуливаются по крышам и с кем обращаются почтительно, предпочитают пижамы и не жалуют смокинги.

Лишь стон, вырвавшийся из груди владельца таверны, был ответом на поставленную задачку. Искаженная страданиями физиономия и глубокие морщины, избороздившие низкий лоб старины Хью, свидетельствовали о глубине логической агонии, в которую вверг беднягу этот сорит.

Ответ же был прост: ни один разумный поросенок не отправится путешествовать на воздушном шаре, когда сквозняк гуляет по комнате, а на душе одна сплошная слякоть.

В тот вечер наши путники славно поужинали.

Прошу прощения у читателя за маленький розыгрыш. Я всего лишь попытался стилизовать манеру рассказов-задачек преподавателя математики Оксфордского колледжа Ч. Л. Доджсона (1832 1898), известного всему миру под именем Льюиса Кэрролла, автора «Алисы в стране чудес» и многих других увлекательных произведений. Но в принципе речь идет о вещах нешуточных. Читатель это поймет, ознакомившись с данным разделом.

В июне 1939 г. в Польской академии наук в Кракове был прочитан доклад об аристотелевских способах построения умозаключений (силлогизмов). Автором доклада был известный польский ученый Ян Лукасевич (1878 1956), прославившийся своими трудами в области математической логики. Вскоре была подготовлена рукопись монографии на эту же тему. Рукопись уже находилась в типографии, когда в польском небе появились немецкие бомбардировщики. Пронзительный свист бомбы и нет типографии. Нет типографии, нет и рукописи.

Только спустя десять лет ученый получил возможность снова вернуться к своим исследованиям аристотелевской логики. К тому времени он уже работал в Дублине, где начиная с 1946 г. регулярно читал лекции по математической логике в Королевской Ирландской академии. В 1949 г. по приглашению Университетского колледжа в Дублине Лукасевич прочитал десять лекций по аристотелевской силлогистике. Результатом этих лекций явилась книга «Аристотелевская силлогистика с точки зрения современной формальной логики», увидевшая свет в 1951 г. Второе, дополненное издание книги было осуществлено после смерти автора, в 1957 г.

Книга Лукасевича состоит из двух частей историческом и аналитической. В исторической части излагается аристотелевское логическое учение с точки зрения современной формальной логики. По мнению автора, ко времени написания его книги не существовало заслуживающего доверия истолкования аристотелевской силлогистики, ибо до сих пор все толкования давались не логиками, а философами или филологами, которые либо не могли знать, либо не знали современной логики.

Лукасевич, будучи первоклассным знатоком и интерпретатором греческих логико-философских текстов, а также крупным специалистом в области математической логики, смог блестяще проанализировать и изложить аристотелевскую трактовку логических способов построения умозаключений. Польский ученый убедительно доказал, что аристотелевская логика существенно отличается от логики традиционной, сложившейся спустя несколько веков после смерти греческого мыслителя. При этом было показано, что логическая теория Аристотеля это совершенно самобытная дедуктивная система со своей аксиоматикой и своей сферой приложения.

Я не затем обращаюсь к Лукасевичу, чтобы повторить его анализ. Пример книги польского ученого ценен тем, что убедительно демонстрирует широчайший диапазон применимости современной формальной логики от математики и техники до сугубо гуманитарных проблем. Кроме того, я хотел бы привлечь внимание читателя к личности и философии Аристотеля, по праву называемого отцом европейской логической традиции.

Аристотель, считающийся внуком легендарного Асклепия, врачевателя милостью богов, родился в маленьком фракийском городе Стагира в первый год 99-й Олимпиады (384 г. до н. э.). Его отец был врачевателем при дворе македонского царя Аминты. Он вылечил царского сына Филиппа, будущего отца Александра Македонского. Аристотель был дружен с Филиппом.

После смерти Никомаха его семья вернулась в Стагиры, откуда через несколько лет Аристотель поехал учиться в Афины.

Перед отъездом в Афины местные софисты, учителя мудрости, советовали Аристотелю пройти обучение в школе знаменитого афинского ритора Исократа. Аристотелю импонировал Исократ. Он с энтузиазмом воспринял призыв известного всей Элладе оратора к объединению греческих общин для совместного противодействия военной экспансии Персии.

Занятия под руководством Исократа дали очень многое Аристотелю. Когда он почувствовал, что полученных знаний достаточно, начались поиски новых путей постижения истины. Все чаще Аристотель думает о школе Платона. И вот наступил тот счастливый день, когда он перешагнул порог платоновской гимнасии. Начался новый и длительный период пребывания в Академии Платона. Только после смерти учителя Аристотель покинул Академию и отправился в Малую Азию, где поселился в городе Ассосе, находящемся во владениях Гермия, большого поклонника философии и друга Филиппа Македонского.

После трехлетнего пребывания в Ассосе Аристотель перебрался на Лесбос. Здесь он некоторое время преподавал, пока не получил приглашения ко двору Филиппа Македонского. Ему было предложено заняться воспитанием наследника престола тринадцатилетнего Александра.

Смерть Филиппа прекратила шестилетнюю учебу. Аристотель решил перебраться в Афины. Многим его намерение показалось неожиданным и рискованным. Друзья отговаривали его, но он стоял на своем, ибо выбор был продиктован не в последнюю очередь политическими целями македонцев. Аристотель хотел склонить влиятельных афинских граждан на сторону своего бывшего ученика, а ныне царя Александра Македонского.

В Афинах Аристотель энергично взялся за создание собственной школы. Новая школа была устроена возле храма Аполлона Ликийского. Здесь находилось здание старой гимнасии и городской сад (перипат). В те времена перипаты часто использовались для целей преподавания философии и различных наук. Поэтому как-то незаметно греческое слово «перипат» отождествилось со словом «схолэ» (школа).

Довольно часто представителей аристотелевской школы называют перипатетиками, хотя тогда преподавать во время прогулок имели обыкновение и многие другие философы.

Занимаясь в Афинах интенсивной преподавательской деятельностью, Аристотель не порывал связей с Александром Македонским, хотя в их отношениях начала появляться напряженность. Аристотель, воспитанный на лучших образцах греческой культуры, боялся, что в характере Александра могут возобладать черты деспота. В своих письмах царю он всячески предостерегал его от упоения властью, призывал ценить искренность и честность друзей, строго карать льстецов и наушников.

Философ был прав, предчувствуя, что у Александра Македонского, создателя огромной империи, закружится от успехов голова, а в гневе он будет страшен и скор на неправедные дела.

После смерти Александра афиняне попытались найти предлог, чтобы наказать Аристотеля за его промакедонские симпатии. И предлог вскоре был найден. Жрец Евримедонт обвинил философа в религиозном нечестии. Зная по опыту Сократа, чем это ему грозит, Аристотель решил не доставлять афинянам злой радости поиздеваться над беззащитным философом. Он покинул Афины и поселился на острове Эвбея, находящемся у восточных берегов Аттики. Там и прошли последние дни его жизни.

Тайна окутывает уход Аристотеля из жизни. Некоторые его биографы считают, что философ принял яд. Вполне допустимая версия, ибо последние годы жизни Аристотеля были безрадостны. Смерть его датируется 322 г. до н. э.

По складу своего ума, унаследованного от отца-врачевателя, Аристотель был естествоиспытателем. Он постоянно держал свою теоретическую мысль под контролем фактов, казавшихся эллину того времени точно установленными. Правы те, кто характеризует философские воззрения Стагирита как синтез двух традиций, идущих от мифического или легендарного Асклепия и вполне реального Платона.

В лице Аристотеля древнегреческая философия достигла своей вершины, но не остановилась и продолжала еще долго свое поступательное развитие. Вообще следует иметь в виду, что античная философия охватывает длительный период, начиная примерно с конца VII в. до н. э. и вплоть до VI в. н. э. При этом мы имеем дело с историей двух рабовладельческих обществ греческого и римского.

Центральным пунктом аристотелевского миропонимания является учение о единичном бытии как таковом. В связи с этим учением на первый план выдвигается вопрос о подлинной природе всего сущего, т. е. вопрос о том, что мы называем существующим.

По Аристотелю, все, доступное чувствам, представляет из себя сложное целое, состоящее из формы, соединенной с материей. Форму можно определять, ибо форма не уничтожается, когда сущее гибнет. Поэтому для научного познания предметы, способные изменяться, разрушаться, исчезать, становятся все более неясными по мере того, как они уходят из области чувственного восприятия. После исчезновения материи форма предмета сохраняется в душе в виде определений.

Какое отношение имеет сказанное к аристотелевской логике?

Прежде чем ответить на этот вопрос, задам еще один вопрос: была ли логика Аристотеля собственно логикой?

Это не надуманный вопрос. Для тех, кто знаком с историей античной философии, в данном вопросе нет никакого подвоха. Как хорошо известно, термин «логика» для обозначения определенной предметной области философского знания начал употребляться не Аристотелем, а его последователями. Сам же Аристотель хотя и пользовался словами «логический», «логически», но главным образом применительно к вероятному знанию, тогда как относительно достоверного знания он пользовался прилагательным «аналитическое».

Логика (аналитика) для Аристотеля не была самоценной философской дисциплиной. В качестве чисто технического, подсобного учения она подчинялась метафизике (сверхфизике), основным предметом познания которой является сущность всех природных вещей. Родословная логической науки связана с философскими размышлениями о правилах спора, процедурах убеждений, доказательств вины или невиновности подсудимых. В этом отношении логика ближе к риторике и юриспруденции, чем к теории познания. В нынешнем своем виде она тяготеет к математике и технике.

Возвращаясь к вопросу о статусе формальной логики, скажу: логика Аристотеля была формальной, но не в современном смысле слова, а в том смысле, который придавал этому слову Стагирит. Для него форма сливалась с сущностью, с чем-то главным, незыблемым в мире меняющихся вещей. Поскольку определение есть словесное выражение сущности, то греческий философ нередко высказывается так: *сущность в словесном выражении*, или просто *логос* (слово, наука) для обозначения формы.

Ох, уж эта препротивная категория сущности! Сколько хлопот она доставила философам и богословам! Много ли этих сущностей? Имеется ли среди них самая главная?

До сих пор философы не пришли к единому взгляду по данным вопросам, хотя согласны, что ни в одном понятии невозможно отразить вещь во всей полноте ее свойств и отношений.

Между прочим, согласись мы с тем, что философы почти обоготворили *сущность* и приучили нас почти автоматически пользоваться этим полумистическим словом, намного проще было бы объяснять смысл выражения формальная логика, опираясь на наши научные представления о так называемых языковых формах.

Как отмечал в свое время известный русский юрист, философ и культуролог Е. В. Спекторский (1875 1951), до появления физического мировоззрения в XVII столетии абстракцией занимались в двух совершенно противоположных и в известном смысле чуждых друг другу областях в логической и химической. Начало логической абстракции было положено Платоном, который считал подлинной сутью каждой вещи ее идею. Эти идеи Платон отделял от вещей и выстраивал идеи иерархическим образом. Поскольку он некоторое время искал не только универсальные идеи, вроде добра, красоты, истины, справедливости, но и специальные идеи, вроде стола, лошади и вообще всех конкретных предметов, то выходило так, что для познания идеи каждой вещи необходимо было отвлекаться от вещественного существования или, как впервые выразился римский писатель, оратор и видный политический деятель М. Т. Цицерон (106 43 до н. э.), отвлекать от вещи ее *эссенцию*. Это требование на почве средневекового религиозно-морального мировоззрения привело к отделению *сущности* (лат. essentia) от *существования* (лат. existentia), при этом сущность понималась как *скрытое качество* или особая *производящая форма*. Эссенция иногда понималась также как *потенциальная экзистенция*, а экзистенция как *актуальная эссенция*. Схоластический реализм (идеализм) наделил отвлеченные эссенции конкретным бытием и поставил эмпирическую действительность в иерархическую от них зависимость.

Наряду с философским осмыслением «сущности» и «существования» шло осмысление указанных понятий в русле алхимического опыта. Алхимики также пытались абстрагировать эссенции, но не логическим образом, а эмпирическим. В соответствии с традиционным греческим представлением о «стихиях» алхимики насчитывали четыре основных *эссенции* или *элемента*. Однако не ограничивались этим, добавляя по примеру пифагорейцев и Аристотеля к данным эссенциям пятую эссенцию (лат. quinta essentia) *эфир*,

считавшийся иерархически высшей эссенцией, ибо ее местопребывание помещалось в надземном небесном мире. Таким образом, будучи пятой по счету, квинтэссенция тем не менее считалась первой по рангу.

Схоласты, вторя стоикам, рассматривавшим пятую сущность в качестве «логического вождя» мира, объявили квинтэссенцию «мировым духом» (лат. spiritus mundi). В результате этого квинтэссенция получила значение «чистейшей природы», «чистейшей силы», «чистейшей добродетели» или специфического «духа» всех вещей вообще, которые можно было добыть алхимическим способом из органических или неорганических веществ. В контексте алхимических опытов абстракция превращалась в экстракцию. Когда, например, алхимики извлекали (экстрагировали) алкоголь, то верили, что извлекают некий *дух* (лат. spiritus), некую *сущность* (лат. essentia) или *чудодейственную воду жизни* (лат. aqua vitae).

С той далекой поры утекло много «аква виты», в том числе и через бездонные философские желудки, от коих рукой подать до философских мозгов, взбудораженных многоградусными «эссенциями». Вот почему сейчас нам приходится пробираться хотя и проторенно-извилистыми, но чертовски хитрыми путями истории «эссенциальной» философской мысли, чтобы развеять туман, окутывающий довольно простые вещи, ассоциируемыми с некими «сущностями».

С учетом последнего нельзя пройти мимо того любопытного факта, что выражение «формальная логика» вошло в философский лексикон спустя много веков после смерти Аристотеля. Авторами этого выражения явились два видных представителя классической немецкой философии XVIII XIX вв. Кант и Гегель. Кант первым, но лишь спорадически употреблял выражение «формальная логика», предпочитая чаще говорить об *элементарной логике*, *общей логике*, которая на несколько ступеней ниже так называемой *трансцендентальной логики*, т. е. логики, которая как бы раздвигает рамки традиционной логики, выходя за ее границы в сферу вопросов философской теории научного познания (гносеологии).

Примерно в этом же направлении работала и мысль Гегеля, противопоставлявшего свою диалектическую логику логике формальной.

Ни Кант, ни Гегель не обогатили логической науки, но скорее внесли страшную путаницу в философские умы, используя слово логика для указания на теорию познания. В результате до сих пор среди определенной части философов бытует традиция рассматривать формальную логику как нечто менее ценное по сравнению, скажем, с диалектической логикой, которая фактически не относится к разряду логических дисциплин. Отчасти это объясняется тем, что в течение длительного времени логику пестовали исключительно философы, заботливо оберегавшие ее от поползновений со стороны других наук. Философы были наивно убеждены, что их логику не впрягут в телегу, нагруженную утилитарными интересами естествоиспытателей и представителей технических наук. А ее всетаки впрягли, и оказалось, что наш Пегас может не только парить в философских эмпиреях, но и успешно заниматься вспашкой земных проблем и перевозкой нелегких научно-технических грузов.

Впрочем, не буду умалять возможности полета логической мысли. Логика блестяще доказала свое право на высокий статус фундаментальной науки, указав человеку на силу и бессилие его интеллекта. Она не побоялась в лице Курта Гёделя доказать теорему, утверждающую невозможность полной формализации процесса логического вывода.

Логикам известно, что формализованный язык, в противоположность обычному естественному языку, следует за так называемой логической формой и порой слишком дотошно ее воспроизводит в ущерб краткости и легкости общения, но без этого не обойтись, особенно тогда, когда мы стремимся часть рутинной работы передать машине.

Введение особого формализованного языка означает принятие и особой теории, особой системы логического анализа. В этом смысле формализованный язык не является каким-то выдуманным заменителем слов и предложений естественного языка. Разумеется, поскольку мы все-таки люди, а не пришельцы из космоса, то наш хотя и формализованный, но служащий человеку искусственный язык пытается копировать обычный язык, обставляя это массой различных и совершенно неизбежных оговорок. Например, в формализованные логические языки мы переносим один хорошо известный всем нам тип выражений   собственные имена. К ним относятся не только имена *Иван, Москва, тринадцать,* но и имена, отражающие способ, которым они обозначают тот или иной индивидуальный предмет. Примером служит имя *сорок два*, обозначающее некоторое простое число, притом таким способом, который выражается в языковом строении имени (предмет, являющийся четырьмя десятками плюс два). Еще пример: *родина Льюиса Кэрролла.* Это имя обозначает Англию, родину известного писателя и ученого XIX в. Чарльза Лаутиджа Доджсона. Специфический способ обозначения предмета, отраженный в языковом строении этого имени, состоит в указании на то, что предмет является местом жительства Льюиса Кэрролла.

В обычных естественных языках не всегда легко различать эти имена. В именах типа *Петр, старина Хью* или *Льюис Кэрролл* мы имеем дело с произвольным приписыванием некоторого значения этим именам. В именах же типа *родина Льюиса Кэрролла* или *квадрат числа два* мы сталкиваемся с именами, построенными из элементов, которые в повседневной жизни различаются в лучшем случае интуитивно. Но что есть интуиция, а тем более гениальная? Надежна ли она?

Чтобы избежать путаницы и ссылок на гениальную интуицию, логики вводят в формализованные языки точно фиксированные и явно сформулированные правила конструирования имен, но, стоп, об этом речь впереди. Здесь же отмечу, что в логике придается исключительно большое значение правильному выражению процесса теоретических размышлений в языке науки, где искусственная символика играет исключительно важную роль. Характерно, что современная формальная логика называется еще символической логикой, так как в ней повсеместно используются точно определенные логические символы, значительно облегчающие многие логические процедуры.

Использование символов обнаруживает родство фор-мальной логики, зародившейся в недрах философии, с математикой. Это родство касается способов правильных выводов (умозаключений) в логике и математике. Символическая логика, проникая в сферу математических рассуждений, принимает вид математической логики, в основе которой лежат теоретико-множественные понятия.

Не следует путать математическую символику с математикой как особым способом рассуждений. Математическая форма еще не гарантирует, что мы имеем дело с собственно математикой. Иногда и слова естественного языка выражают достаточно точно суть математических идей. Достигается это за счет логического сцепления выражений естественного языка.

На важную роль символической логики в познании указывалось давно. Еще пионеры науки Нового времени (XVII XVIII вв.) отмечали эту роль. Они первыми заговорили о языках математики, логики, естествознания. Но только в XIX XX вв. их идеи получили практическое подтверждение.

Формально-логическое изучение любого круга научных вопросов начинается с замены реальных объектов некоторыми их абстрактными описаниями или с конструирования сугубо абстрактных объектов. Чаще всего эти абстракции выбираются таким образом, чтобы в них были отражены именно те свойства исходных объектов, которые мы собираемся изучать. В современной логике такой наиболее важной абстракцией является понятие «логический язык». В данном случае под логическим языком понимается не реалистическая копия естественного языка, а его формализованный аналог.

Грамматика любого естественного языка носит в известном смысле аналитический характер, т. е. выражения естественного языка разлагаются на не поддающиеся дальнейшему разложению компоненты. При построении же логического языка мы движемся в обратном направлении, т. е. берется совокупность исходных символов, а затем определяются различные категории выражений и свойства выражений в терминах этих исходных символов.

Таким образом, логика располагает своим формализованным языком, который удовлетворяет следующим требованиям:

1. Все основные (простые, несоставные) знаки должны быть представлены в явном виде.
2. Должны быть заданы правила введения новых знаков с помощью уже имеющихся.
3. Должны быть заданы все правила построения формул (например, правила образования предложений из слов).
4. Должны быть заданы все правила преобразования формул.
5. Должны быть заданы правила интерпретации наших абстрактных построений.

Наиболее развитой частью современной логики является так называемая *логика высказываний*. Более того, логика высказываний   это основа символической логики.

Главным предметом изучения логики высказываний являются простые высказывания типа:

(а) *Мистер Твистер был министром;*
(б) *Число три больше числа два;*
(в) *На Луне живут лунатики;*
(г) *Крокодилы летают очень низко.*

В логике под высказыванием понимается то, что в лингвистике рассматривается как утвердительное (повествовательное) предложение. Примером таких высказываний на естественном языке служат: *Все люди смертны*; *Если* $2 + 2 = 4$, *то* $4 < 5$; *Если идея зеленая, то она яростно спит.* Эти примеры, равно как и предыдущие, показывают, что высказывания не обязательно должны быть истинными с точки зрения здравого смысла, т. е. логики обычно не обращают внимания на смысловое содержание высказываний, имеющее внелогический характер. Вопросы о том, летают или не летают крокодилы, могут волновать зоологов, но никак не логиков. Логическая наука интересуется весьма своеобразно понимаемой истинностью или ложностью высказываний. Она абстрагируется от конкретных обстоятельств, от содержания высказываний, предпочитая иметь дело с идеализированной картиной реальной или вымышленной действительности. Ее ученые мужи, конечно, удивятся, узнав, что на какой-то далекой планете крокодилы действительно могут летать, но... очень низко. Однако как логикам им этот потрясающий факт безразличен.

Помимо всего прочего в логике высказываний абстрагируются от составных частей и структуры простых высказываний, но это не означает, что в других разделах логики наблюдается аналогичное.

Для высказываний вводятся соответствующие переменные, называемые *пропозициональными*, или *высказывательными*, *переменными*. Они обычно обозначаются строчными буквами латинского алфавита (a, b, c и т. д.)

Среди терминов и символов, встречающихся в математике и логике, мы различаем переменные и постоянные. Например, в математике мы встречаем такие постоянные термины, как *три* (3), *сумма* (+), *умножение*

(× или ·) и т. д. Каждый из этих терминов имеет точно определенное значение, считающееся неизменным в ходе математических рассуждений.

Переменные, в противоположность постоянным, не обладают константным значением сами по себе. Согласитесь, нелепо звучит вопрос: является ли x зеленым растением? Но зато вполне уместен вопрос: является ли огурец зеленым растением?

Ввиду того, что сами по себе переменные не имеют значения, то выражение вида «x есть зеленое растение» не может являться высказыванием в логическом смысле, хотя в грамматическом плане оно имеет форму высказывания. Что из этого следует?

Из этого следует, что под логическим высказыванием понимается определенное утверждение, которое может быть доказано или опровергнуто. Например, если мы заменим x словом «баран», получим ложное высказывание (*Баран есть зеленое растение*), но в результате замены x словом «огурец» получим истинное высказывание (*Огурец есть зеленое растение*).

Выражения, содержащие переменные и превращающиеся в высказывания при замене этих переменных постоянными, называются по-разному: *пропозициональными функциями, высказывательными функциями, функциями-высказываниями* и т. д.

Помимо замены переменных постоянными есть еще другой способ, посредством которого из пропозициональных функций могут быть получены высказывания. Рассмотрим следующую алгебраическую формулу: $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$.

Говоря языком логики, мы имеем дело с пропозициональной функцией, содержащей переменные x и y, которые удовлетворяют произвольные пары чисел, т. е. какими бы численными постоянными мы ни заменяли x и y, полученная формула всегда будет истинной. Таким образом, для всех чисел, символически обозначаемых x и y, истинно будет, что $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$.

Рассмотрим теперь пропозициональную функцию вида $x > y$. Если вместо x подставить 10, вместо y 9, получится истинное высказывание. Но если вместо x подставить 12, а вместо y — 13, получится ложное высказывание. Следовательно, этой формуле не может удовлетворять любая пара чисел. Поэтому применительно к нашей формуле точнее будет говорить так: *для некоторых чисел x и y справедливо, что $x > y$*. Или: *существуют числа x и y такие, что $x > y$*.

Выражения вида «Для всех x, y,...» или «Существуют x, y,... такие, что...» называются *кванторами*.

Quantum, quantity — *количество*. Quantify — *определять количество*. **Quantifier** (квантор) — отглагольное существительное.

Кванторы (логические операторы) указывают на количественную характеристику значений той или иной переменной, для которой соответствующее высказывание истинно.

В данном случае мы имеем дело с двумя кванторами — универсальным, или квантором всеобщности (*Для всех x, y,..*), и экзистенциальным, или квантором существования (*Существуют x, y,... такие, что...*).

Высказывания, содержащие переменные, — это общая форма многих логических высказываний, которую называют *логической формулой*. Если подстановка какого-либо значения переменной в логическую формулу превращает ее в истинное высказывание, то говорят, что данное высказывание истинно для всех значений x. Выражение «истинно для всех значений x» обозначается так: $\forall x$. Символ $\forall$ называется квантором всеобщности. Этот символ, служащий аналогом слова «все», представляет собой перевернутое латинское A, напоминающее о немецком слове «alle» (*все*) или об английском слове «all» (*все*).

Если только некоторые значения переменной превращают логическую формулу в истинное высказывание, то говорят, что высказывание истинно для некоторых значений x, т. е. существуют некоторые значения x, при которых высказывание истинно. Символически это записывается с помощью квантора существования $\exists$ в виде $\exists x$. Этот символ, служащий аналогом слова «существовать», представляет собой повернутую в противоположном направлении латинскую букву E. Данная буква напоминает о немецком слове «existieren» (*существовать*) или об английском слове «to exist» (*существовать*).

Хотя в повседневной речи мы не пользуемся переменными и кванторами, но в естественных языках встречаются их эквиваленты. Например, в русском языке имеются слова, близкие по своим функциям кванторам: «все», «всякий», «любой», «никакой», «некоторый» и т. д. Так, выражение «Некоторые люди хитры» имеет примерно тот же смысл, что и высказывание «Существует x такой, что x является человеком и хитрым».

Ради краткости и логической точности кванторы заменяются символами.

Благодаря кванторам пропозициональные функции автоматически превращаются в высказывания, а переменные лишаются своей свободы, т. е. становятся связанными переменными (кажущимися переменными). Там, где кванторы отсутствуют и мы имеем дело только с пропозициональной функцией, переменные называются *свободными* или *несвязанными переменными*.

Переменные и кванторы играют исключительно важную роль в формулировке математических теорем. Что же касается переменных, то смело можно сказать: их изобретение составляет поворотный пункт в истории математики, а в дальнейшем и логики в целом.

Внутри логики высказываний различают двузначную и многозначную логику. Двузначная логика оперирует только двумя значениями, которые условно именуют *истина* и *ложь*, но могут именовать и по-другому (например, *белое   черное*, *красивое   уродливое*, *кружка пива   кружка вина*, *1   0* или *0   1* и т. д.).

Следует помнить, что в логике священное для философов слово «истина» употребляется не в смысле, предполагаемом той или иной теорией отражения, а лишь для условного обозначения логического свойства: *либо истинно, либо ложно* (*либо включено, либо* *выключено*; *либо любит, либо не любит* и т. д.). Если высказывание логически истинно, оно имеет значение *истина* (*да, 1* и т. д.). Если же высказывание логически ложно, оно, как говорят коварные логики, имеет значение истинности *ложь* (*нет, 0* и т. д.). Хотя последнее звучит непривычно, но тут уж ничего не поделаешь, приходится привыкать к своеобразию логической терминологии. Кстати, в свое время известный немецкий математик и логик Эрнст Шрёдер (184 1902), стремясь избежать побочных психологических ассоциаций, связанных с употреблением слов «истина» и «ложь», предложил нуль в качестве знака для значения ложного высказывания.

С точки зрения математической логики каждое ложное высказывание отождествляется не с ошибочным отражением действительности, а с пустым множеством. Соответственно, каждое истинное высказывание отождествляется с непустым множеством элементов, чья физическая природа не принимается во внимание. Представителю математической логики незачем знать о содержании высказываний, кроме знаний, определяемых понятиями теории множеств. Поэтому он вполне довольствуется знаниями об условной истинности (непустом множестве) или ложности (пустом множестве) этих высказываний (высказываний, выражающих наши знания о множествах).

Большинство истинных утверждений, относящихся к повседневной жизни, являются относительно истинными. В логике такая относительность чаще всего неприемлема. Логики предпочитают иметь дело с абсолютными истинами. Истинное и ложное употребляется ими в смысле возможной логической оценки суждений, которые представляются нам как носители некоторого смыслового содержания, облаченного в знаковую форму, точнее, в форму высказывания. В логике высказываний смысловое содержание высказываний жестко ограничивается тем, что логики называют *истинностным значением*, не вкладывая в это понятие философский смысл.

Обратите внимание на следующее. Если высказывание логически ложно, оно имеет значение истинности... *ложь*. Кого-то может смутить выражение *значение истинности* применительно к слову «ложь». Люди обычно различают истину и ложь, а здесь мы имеем дело с каким-то странным словосочетанием. Эта странность кажущаяся. Вспомним великого Гильберта, который полушутя-полусерьезно говорил о возможности замены в математике слов «точка», «прямая», «плоскость» словами «стол», «стул», «пивная кружка». В его шутке есть доля правды. Дело в том, что математические символы и термины зависят не от ассоциаций обычного человека, а от выбора аксиом и определений. Так, если мы определим математическое поведение пивной кружки как поведение геометрической точки, то математики вскоре перестанут обращать внимание на несколько неудачный выбор выражения и непривычное станет привычным.

Если высказывание логически истинно, оно имеет значение истинности *истина*. Это положение не вызывает сомнения у неспециалистов, хотя на самом деле оно далеко не бесспорно, что быстро обнаруживается, когда логики начинают издеваться над здравым смыслом. Вот почему я нарушил порядок формулировок, принятых в учебниках по логике.

Вместо «Высказывание p истинно» или «Высказывание p ложно» можно сказать: «Высказывание p имеет истинностное значение истина» (или: «Высказывание p имеет истинное значение истинности»); «Высказывание p имеет истинностное значение ложь» (или: «Высказывание p имеет ложное значение истинности»). Для истинностного значения (значения истинности) *истина* обычно используется в качестве метки русская буква «и» (или математический символ «1»), а для истинностного значения (значения истинности) *ложь*   русская буква «л» (или математический символ «0»).

Логика высказываний требует, чтобы для каждого высказывания выполнялось условие его истинности или ложности.

Чтобы охватить общей схемой все разновидности простых единичных высказываний (высказываний о единичном), описывающих отдельные предметы или указывающих на них с помощью соответствующих единичных имен, вводится форма $F(x)$, где x переменная для единичного имени, а F символическое обозначение свойств данного индивида. Таким образом, $F(x)$ это функция высказывания (пропозициональная функция), включающая переменную, подстановка на место которой постоянного значения дает собственно высказывание. Например, если x яблоко, а F вкусное, мы будем иметь высказывание типа: *«Яблоко вкусное»*.

Высказывание формы $F(x)$, содержащее переменную x, позволяет выражать множество конкретно значимых высказываний. Возможность становится действительностью тогда, когда вместо переменной x подставляются конкретные значения типа $a, b, c, \ldots$ и мы имеем: $F(a)$, $F(b)$, $F(c)$ и т. д. Например, можно поочередно подставлять вместо x в форму $F(x)$ имена разных людей, а вместо F их свойства, получая соответствующие высказывания на естественном языке, а именно:

1. *Шерлок Холмс живет в Лондоне;*
2. *Ватсон   друг известного английского сыщика;*

Выражение «$2 + 4 = 1 + 5$» не содержит переменных, тогда как пропозициональная функция «$a + b = c + d$» содержит переменные a, b, c, d. Из этого видно, что пропозициональная функция, которая может быть простой и сложной, не подлежит квалификации с точки зрения истинности или ложности. В самом деле, вместо a, b, c, d мы можем подставлять любые числа, которые в сумме далеко не всегда дадут равенство. Что касается логики, то ее главной задачей является построение таких пропозициональных функций, которые давали бы истинные высказывания при подстановке любых постоянных выражений вместо переменных. Всякую формулу логики высказываний можно рассматривать как представление некоторой функции. Что имеется в виду?

В логике все отдельные строчные буквы (*p, q, r,...),* символизирующие переменные, а также их комбинации, представляющие собой форму высказываний, являются *булевыми функциями высказываний.* Запись этих функций называется *формулой.* Другими словами, булевой функцией высказываний будет выражение, полученное в результате конечного числа шагов, записанных в символах булевой алгебры высказываний.

Эта точка зрения на формулы логики высказываний согласуется с законами элементарной алгебры. Разница состоит лишь в том, что в элементарной алгебре рассматриваются *числовые функции*, а в логике высказываний *логические* (*булевы*) *функции*, в которых переменные и функции принимают только одно из двух значений *истина* (1) или *ложь* (0).

Булева (логическая) функция высказываний выражает логический закон тогда, когда она принимает истинное значение при всех возможных комбинациях значений переменных. Проверка того, выражает ли данная функция логический закон, осуществляется с помощью так называемой таблицы истинности.

Табличный метод проверки формул логики высказываний освобождает исследователей от необходимости строить аксиоматические системы, в которых теоремы обосновываются путем выведения их из системы аксиом.

Необходимо знать, что имеется ряд формул, которые принимают значение *истина* при любых значениях истинности входящих в них переменных. Эти формулы называются *общезначимыми*, или *тождественно истинными*, или же *тавтологиями* (гр. tauto

то же самое + logos *слово*) логики исчисления высказываний. Данные формулы являются *логическими законами*, которыми постоянно руководствуются как теоретики, так и практики (например, конструкторы сложных релейных устройств).

Словесным примером общезначимой формулы в исчислении высказываний может служить следующее предложение: «Если вода мокрая, то она мокрая». Тавтологичность подобного утверждения очевидна. Поэтому кое-кому общезначимые формулы (тавтологии) покажутся информационно никчемными и совершенно бесполезными для науки, но на самом деле это не так. Опыт развития логики и использование ее инструментария в практических целях свидетельствуют: общезначимые формулы чрезвычайно важны для логики как доказательной науки, чьи рациональные конструкции с большим успехом применяются в самых различных сферах человеческой деятельности.

Для указания на общезначимость логической формулы используется символ $\models$, придуманный известным американским математиком и логиком С. К. Клини (1909 1994) в 1956 г. Так, например, формула $\models B$ читается нами: *B общезначима*. Говоря более обобщенно, если A множество формул, то запись $A \models B$ означает, что при всех интерпретациях, при которых истинны все формулы из A, истинна также формула B. Формула B называется логическим следствием из A. В этих случаях говорят, что B следует из A или является следствием из A в исчислении высказываний.

Среди тождественно истинных формул выделяются *выполнимые* и *невыполнимые* (*тождественно ложные*) *формулы*. Формулы, принимающие значение *ложь* при всех значениях входящих в них переменных, относятся к разряду *тождественно ложных* (*невыполнимых*) *формул*. Тождественно ложные формулы это *противоречия*, т. е. противоречия   это формулы логики высказываний, которые при любом наборе значений своих пропозициональных переменных принимают значение *ложь*. Все формулы логики высказываний, не являющиеся противоречиями, считаются выполнимыми.

Способ, с помощью которого относительно любой формулы можно решить, к какому виду формул она относится, называется *разрешающей процедурой*. Для логики высказываний такими способами являются построение таблиц истинности, а также преобразование исследуемой формулы в одну из так называемых *нормальных форм*, о чем будет сказано ниже.

В связи с частыми ссылками на табличный метод проверки логических формул следует более детально охарактеризовать логические союзы. Это делается с помощью таблиц (матриц) истинности, где содержится ответ на вопрос о том, когда сложное высказывание истинно или ложно.

Если, допустим, простое высказывание истинно тогда и только тогда, когда оно утверждает существование некоторого безусловного факта, имеющего место в действительности (например: *Земля обращается вокруг Солнца*), то ответ на вопрос об истинности сложного высказывания требует не только учета фактов, но и рассмотрения смысла логической связки, при помощи которой это высказывание было образовано (например: *Если Земля обращается вокруг Солнца, то вокруг Солнца обращается и Марс*). С учетом этого необходимо рассмотреть все логические союзы (связки), использование которых определяет название сложных высказываний.

Если в грамматике сложное предложение, составные части которого объединены оборотом *если..., то...*, называется *условным предложением*, то в логике его аналог называется *импликацией* (лат. implicatio   *сплетение, переплетение*) или *условным высказыванием*. С помощью союза *если..., то...* в естественном языке обычно выражают то, что одно явление служит основанием (условием) для другого.

В логике часть высказывания, которому предпослано выражение ***если***, называется *антецедентом* (*предыдущим*), а другая часть, начинающаяся с выражения ***то***, называется *консеквентом* (*последующим*).

Поскольку логики стремятся избежать провокационных аналогий, толкающих их в болото двусмысленности и психологизма, они предлагают рассматривать импликацию как вполне осмысленное высказывание даже в том случае, когда не существует никакой смысловой связи между двумя простыми высказываниями, образующими единое целое   сложное высказывание. Например: *Если птицы осенью летят на юг, то Волга впадает в Каспийское море.* Здесь, как и в случае с планетами, обращающимися вокруг Солнца, грамматический оборот *если..., то...* провоцирует нашу мысль на решение внелогических проблем (например: зависит ли обращение Марса вокруг Солнца от обращения Земли вокруг Солнца? Зависит ли впадение Волги в Каспийское море от осеннего перелета птиц?). Поэтому они идут, если угодно, на крайнюю меру и формулируют вопрос об импликации примерно так: *Если 2 + 2 = 5, то впадает ли Волга в Каспийское море?*

Дело не ограничивается подобными шокирующими вопросиками. Логики идут дальше, приводя совершенно бредовые примеры. Для чего им это требуется?

Разумеется, не для того, чтобы отвратить от «страшных тайн» логики здравомыслящих людей. Они хотят в очередной раз подчеркнуть, что в логике высказываний содержание высказываний не имеет никакого значения. В связи с этим, усиливая свои позиции чистых теоретиков, логики разграничивают *материальную* и *формальную импликации*. Понятие материальной импликации (менее строгой в логическом смысле импликации) шире понятия формальной импликации (более логически строгой импликации). Каждая истинная формальная импликация является в то же время истинной материальной импликацией, но не наоборот.

Оборот *если..., то...* часто используется в языке науки. Наиболее употребим он в математике, чьи теоремы тяготеют к форме импликаций.

Логическая операция импликации чаще всего обозначается символом $\rightarrow$, который называется на языке логике *функтором*. Символическим изображением импликации, состоящей из простых высказываний p и q, будет $p \rightarrow q$. Выражение $p \rightarrow q$ может читаться так: *p имплицирует q*; *p включает q*; *всегда, если p, то q*; *если p, то q*.

Еще раз во избежание путаницы подчеркну, что логическое высказывание вида $p \rightarrow q$ не всегда совпадает по смыслу с выражением естественного языка типа *если ..., то ...* . В связи с этим целесообразно читать сложное высказывание вида $p \rightarrow q$ не как *если p, то q*, а как *p имплицирует q* и понимать данную операцию только под углом зрения соответствующей таблицы истинности. Но прежде чем разобраться с таблицами истинности, включая таблицу для импликации, уясним себе хорошенько следующее.

В умозаключениях повседневной жизни и в науке мы пользуемся только такими импликациями, в которых предыдущий член (антецедент) и последующий член (консеквент) связаны по содержанию и по форме. Например: *Если идет дождь, то берите зонтик, выходя на улицу*; *Если эксперимент будет успешным, то гипотеза подтвердится.* Импликации же, в которых нет этой содержательной связи, обычно не представляют для нас интереса, кроме, быть может, специалистов по психическим патологиям. Логики же, силясь прояснить логические характеристики связок (логических союзов), идут на весьма значительные упрощения и отвлекаются от содержания высказываний. Впрочем, ничто человеческое «мэтрам» логической науки не чуждо, и поэтому они не страшатся иногда заглядывать в содержание высказываний на естественном языке, особенно если речь идет о первых шагах обучения тонкому логическому искусству. Рассмотрим вместе с ними следующий пример: *Если пиво отпускается* *только членам профсоюза, то остальные граждане удовлетворяются квасом.*

Предположим, что все обстоит именно так, как об этом заявлено. Тогда наша импликация истинна. Если же пиво, вопреки предписанию, отпускается не только членам профсоюза, то наше заключение ложно. Может оказаться и так, что, несмотря на строжайший запрет продавать пиво нечленам профсоюза, городские власти могут издать мудрый указ о премировании кружкой пива некоторых нечленов профсоюза за их пчелиное трудолюбие. В результате этого директивного решения высказывание оказывается истинно и в том случае, когда общее предписание относительно пива не имеет абсолютно жесткого характера. Наконец, если пиво и квас отсутствуют и все пьют водопроводную воду, то нет никаких нарушений предписания и повода для начальственного гнева. Следовательно, предписание действует, хотя и не выполняется в силу объективных причин.

Таким образом, мы видим, что наша импликация может оказаться ложной только тогда, когда посылка (антецедент) истинна, а заключение (консеквент) ложно. В трех остальных случаях импликация истинна. Говоря более строго, импликация является ложной тогда и только тогда, когда ее посылка истинна, а заключение ложно.

Запишем все четыре случая следующим образом:

(1) *Если* $p = 1$ (и) и $q = 1$ (и), *то* $(p \to q) = 1$ (и);
(2) *Если* $p = 1$ (и) и $q = 0$ (л), *то* $(p \to q) = 0$ (л);
(3) *Если* $p = 0$ (л) и $q = 1$ (и), *то* $(p \to q) = 1$ (и);
(4) *Если* $p = 0$ (л) и $q = 0$ (л), *то* $(p \to q) = 1$ (и).

В импликации (табл. 3) все это выглядит гораздо проще.

Рассмотренный нами пример с импликацией демонстрирует один из возможных типов логических связей между высказываниями. Знание этих связей нам необходимо, если мы для решения различных теоретико-познавательных и научно-практических задач

стремимся разнообразить наш исследовательский инструмент в виде соответствующих логических систем.

Предлагаемая таблица импликации является примером материальной импликации. Обычно под материальной импликацией понимается функтор $\rightarrow$, определяемый вышеприведенной таблицей истинности.

Поскольку материальная импликация противопоставляется формальной импликации, то материальная импликация трактуется как *условное высказывание*, тогда как формальная импликация трактуется как *условная функция высказывания*.

Известно, что материальная импликация истинна в тех случаях, когда истинен ее консеквент или когда ложен ее антецедент, а также ложны и тот и другой одновременно. Сложности и неясности возникают при чтении функтора импликации как *если ..., то ...* . Вследствие этого возникает резкое расхождение между логическими условиями истинности импликации и фактическими условиями истинности содержательного условного высказывания. Например, с логической точки зрения импликация «Если снег бел, то 2 + 2 = 4» является истинной по отношению к таблице истинности, но с обыденной точки зрения такое условное высказывание звучит нелепо. Чтобы избежать подобных нелепостей импликаций известный американский

Таблица 3

p	q	$p \rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

философ и логик Кларенс Ирвинг Льюис (1883 1964) ввел функтор так называемой *строгой импликации*, который должен был до известной степени соответствовать роли условного союза в обыденной речи. Это возможно при соблюдении двух условий. Во-первых, следует оперировать не экстенсиональными, а интенсиональными функциями высказываний. Тогда истинность или ложность строгой импликации будет зависеть не исключительно от истинности или ложности ее составных высказываний, а также от различия их содержания. Во-вторых, при интенсиональном подходе к импликации следует отказаться от двузначной логики в пользу многозначной.

Обратим внимание: в нашем научном лексиконе появились новые термины «экстенсионал» («экстенционал») и «интенсионал» («интенционал»). Позднее я вернусь к ним. Здесь же хотелось бы сказать следующее. Исчисление высказываний охватывает не все способы построения сложных высказываний, а только так называемые экстенсиональные связи, т. е. такие связи, в которых логическое значение целого зависит не от различий в содержании высказываний, а исключительно от логического значения составных высказываний. Подобного рода значения исчисляются с помощью таблиц истинности, а не интуитивно понимаются. Функции высказываний данного типа называются *истинностными функциями*.

Помимо экстенсиональных сложных высказываний имеются еще интенсиональные сложные высказывания. Сегодня логики активно обсуждают вопрос о том, можно ли интенсиональные сложные высказывание сводить к экстенсиональным. Некоторые из них считают, что сделать это невозможно, так как значение истинности интенсионального сложного высказывания зависит не только от значений истинности составляющих его высказываний, но и от других факторов, которые не поддаются оценке с экстенсиональной точки зрения, но обо всем этом речь пойдет далее.

Следующей логической операцией, которую мы рассмотрим, будет операция *дизъюнкции* (лат. disjunctio; disjunctives *разделительный*). Эта операция применяется к высказываниям, называемым *соединительно-разъединительными*.

Операция дизъюнкции, функтором которой служит символ $\vee$, имеет свой аналог в естественном языке в виде союза *или*. Символ функтора дизъюнкции происходит от первой буквы латинского слова «vel» (*или*).

В естественном языке предложение с союзом *или* указывает на существование двух возможных событий, одно из которых вполне может произойти. Например: *Остап Бендер поедет в Рио-де-Жанейро миллионером или останется в Одессе управдомом*. Иногда вместо выражения «или» используется выражение «либо» в разделительном значении.

Союз «или» во многих европейских языках имеет два различных значения *исключающее* и *неисключающее*. Так, если имеются два высказывания *p* и *q*, которые ложны, то сложное высказывание вида *p или q* следует считать ложным. Если же *p* истинно, а *q* ложно, то *p или q* следует рассматривать как истинное высказывание, что вполне соответствует смыслу слова «или» в русском языке. Сложнее дело обстоит, когда оба простых высказывания истинны. В связи с этим в логической литературе иногда встречаются формулировки *p или/и q* и *p или* (*также*) *q*. Это означает, что сложное дизъюнктивное высказывание будет истинным и тогда, когда оба простых высказывания являются одновременно истинными.

Однако иногда случается так, что осуществление одной из возможностей совершенно исключает осуществление другой. Тогда употребляется формулировка вида *либо p, либо q*. Подобное сложное высказывание является *строгой* (*сильной*) *разделительной дизъюнкцией*, функтор которой выражается символом $\dot{\vee}$. Иногда говорят, что в данном случае мы имеем дело с *исключающе-разъединительной* (*разделительной*) или *исключающей* (*сильной, строгой*) *дизъюнкцией*.

Таблица 4

p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Таблица 5

p	q	$p \dot{\vee} q$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Учитывая все это, логики предлагают считать, что дизъюнкция двух простых высказываний ложна тогда, когда ложны оба простых высказывания. Эта дизъюнкция квалифицируется как *неисключающая* (табл. 4).

Совсем иначе выглядит логическая таблица для строгой дизъюнкции (табл. 5).

Сильная дизъюнкция истинна тогда и только тогда, когда простые высказывания имеют разные значения истинности.

Сложное высказывание может состоять из двух и более простых высказываний, соединенных связкой, которая эквивалентна союзу «и» в естественном языке. Эта логическая связка обозначается символом & (или $\wedge$, являющимся перевернутой латинской буквой «v»). Выражение p & q называется *конъюнкцией* (от лат. conjunctio *союз, связка*) и читается так: *p и q*.

Высказывая некоторую конъюнкцию, мы формулируем такое утверждение, которое выполняется, скажем, для событий, описываемых простыми высказываниями, образующими сложное высказывание. Например: *Васисуалий Лоханкин постоянно думал о значении русской интеллигенции и часто забывал тушить свет в коммунальной уборной.*

Таблица 6

p	q	p & q
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Таблица 7

p	q	c	p & q	(p & q) & c
1	1	1	1	1
1	1	0	1	0
1	0	1	0	0
1	0	0	0	0
0	1	1	0	0
0	1	0	0	0
0	0	1	0	0
0	0	0	0	0

Для операции конъюнкции таблица истинности имеет следующий вид (табл. 6).

Из таблицы истинности для конъюнкции хорошо видно, что конъюнкция p & q ложна, если хотя бы одно из двух высказываний ложно. Иными словами, конъюнкция p & q истинна в том и только в том случае, если оба высказывания p и q имеют значение *истина* (1).

Поскольку соединительная связка & является двухместной, т. е. объединяет два простых высказывания, постольку для конъюнктивного соединения трех и более простых высказываний мы должны использовать скобки.

Например: (p & q) & с или p & (q & c). Что касается скобок, то сначала определяется истинное значение высказывания, находящегося в скобках. Затем определяется значение истинности всего выражения (пример в табл. 7).

Данная таблица истинности наглядно показывает, что конъюнкция, состоящая из трех высказываний, является истинной тогда и только тогда, когда все три соединенных высказывания истинны.

Простейшей операцией логики высказываний является операция отрицания, которой в русском языке соответствует частица «не». В естественном языке эту частицу обычно присоединяют к глаголу или заменяют ее выражением «неверно, что», когда хотят иметь отрицание в начале предложения. Например: *Паниковский не является сыном лейтенанта Шмидта*. Или: *Неверно, что Паниковский сын лейтенанта Шмидта*.

Логики предпочитают иметь дело с выражением «неверно, что», поскольку тем самым подчеркивается отрицание всего высказывания. Производя отрицание истинного высказывания, они указывают на то, что полученное в результате отрицания высказывание является ложным. Например: *Неверно, что Аристотель греческий философ*. Если же высказывание ложно изначально, то его отрицание дает истинное высказывание. Например: *Неверно, что Волга впадает в Черное море*.

Функтор операции отрицания часто обозначается следующими символами: ¬, ~, .

По определению, если *p* некоторое простое высказывание, то его отрицание ¬ *p* (*не p*) будет сложным высказыванием, что подчеркивается оборотом «неверно, что».

Действие операции отрицания можно представить в виде соответствующей таблицы истинности для отрицания (табл. 8).

Дважды или четырежды отрицавшееся высказывание имеет то же самое значение истинности, что и соответствующее не отрицавшееся. Трижды отрицавшееся высказывание имеет то же самое значение истинности, что и отрицавшееся один раз (пример в табл. 9).

Операции отрицания (*инверсии*), конъюнкции (*логического умножения*) и дизъюнкции (*логического сложения*) называются *булевыми операциями*. Они являются основными в применениях логики высказываний в

Таблица 8

p	$\neg p$
1	0
0	1

Таблица 9

p	$\neg p$	$\neg\neg p$	$\neg\neg\neg p$	$\neg\neg\neg\neg p$
1	0	1	0	1
0	1	0	1	0

электронике, автоматике и теории вычислительных устройств.

Еще одной важной логической операцией является операция эквиваленции (эквивалентности), функтор которой соответствует употреблению выражения «тогда и только тогда, когда» или «если и только если» и обозначается символами: $\leftrightarrow$, $\equiv$, $\tilde{}$.

Эквивалентность высказываний предполагает, что каждое из двух простых высказываний является необходимым и достаточным условием для другого, т. е. операция эквиваленции используется при желании выразить взаимную обусловленность простых высказываний, входящих в состав сложного. Например: *Великий комбинатор может снова завладеть автомобилем Козлевича тогда и только тогда* (*если и только если*), *когда докажет Козлевичу медицинский факт отсутствия Бога*. В данном случае утверждается следующее: *если доказать отсутствие Бога, то можно завладеть желанным автомобилем*. Но мало того, возвращение автомобиля и его водителя возможно только тогда, когда будет осуществлено указанное доказательство.

Эквивалентность, состоящая из высказываний p и q, в этой книге будет символически изображаться как $p \leftrightarrow q$. Выбор символа $\leftrightarrow$ обусловлен тем, что операция эквиваленции близка в известном смысле операции импликации, символом которой является знак $\rightarrow$.

Охарактеризуем с помощью таблицы истинности операцию эквиваленции, предварительно воспользовавшись для иллюстрации следующим высказыванием: *Пиво можно получить тогда и только тогда (если и только если), когда станешь членом профсоюза.*

Если какой-то любитель пива стал членом профсоюза, то очевидно, что наше высказывание относительно этого гражданина истинно.

Если обещанное пиво не выпито его любителем, являющимся членом профсоюза, то вопиющий обман налицо, т. е. наше высказывание является ложным.

Если пиво выпито нечленом профсоюза (о, ужас!), то наше заявление ложно.

Если он не стал членом профсоюза и пива не получил, то никаких претензий к градоначальству у него быть не может.

Таким образом, видно, что эквивалентность двух простых высказываний истинна только тогда, когда оба этих высказывания либо одновременно истинны, либо одновременно ложны. В случае же, когда одно из простых высказываний истинно, а другое ложно, эквивалентность ложна. Короче, эквивалентность истинна тогда и только тогда (если и только если), когда оба ее члена одновременно либо истинны, либо ложны.

Запишем все четыре случая следующим образом.

(1) *если* $p = 1$ и $q = 1$, *то* $(p \leftrightarrow q) = 1$;
(2) *если* $p = 1$ и $q = 0$, *то* $(p \leftrightarrow q) = 0$;
(3) *если* $p = 0$ и $q = 1$, *то* $(p \leftrightarrow q) = 0$;
(4) *если* $p = 0$ и $q = 0$, *то* $(p \leftrightarrow q) = 1$.

Таблица 10

p	q	$p \leftrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

В таблице эквиваленции это выглядит следующим образом (табл. 10).

Обороты «тогда и только тогда, когда» и «если и только если» часто употребляются при формулировке научных определений. Для этого в науке имеются соответствующие правила. Впрочем, определения, строящиеся на основе этих правил, могут не принимать формулу эквиваленции. Дело в том, что данная форма не является единственно возможной при формулировке определений.

К сожалению, в логике, несмотря на всю ее строгость, не существует унифицированной символики, что затрудняет восприятие соответствующих логических рассуждений и усложняет процесс обучения. Выбор же подходящих логических символов имеет большое значение как в практическом плане, так и в теоретическом. Во избежание путаницы полезно иметь в виду следующую таблицу символов (табл. 11).

Часто в приложениях логики высказываний к электротехнике пользуются формулами, содержащими только три символа логических операций, а именно: & ($\wedge$), $\vee$, $\neg$ ( ). Дело в том, что некоторые логические операции можно выразить через другие. Например, операция эквиваленции выражается через импликацию и конъюнкцию, а импликацию и конъюнкцию можно выразить с помощью отрицания и дизъюнкции. Дизъюнкция же выражается через конъюнкцию и отрицание. Продемонстрирую это на следующих примерах:

Таблица 11

Обыденная речь	Символика			
	Шрёдера – Пирса	Пеано – Рассела	Гильберта	Лукасевича
не–p	p'	$\sim p$	$\overline{p}$	*Np*
если p, то q	$p \to q$	$p \supset q$	$p \to q$	*Cpq*
p тогда и только тогда, когда q	$p \equiv q$	$p \equiv q$	$p \sim q$	*Epq*
p или q	$p + q$	$p \vee q$	$p \vee q$	*Apq*
p и q	$p \bullet q$	$p \bullet q$	$p \,\&\, q$	*Kpq*

(а) $p \leftrightarrow q \equiv ((p \rightarrow q) \; \& \; (q \rightarrow p))$;
(б) $p \rightarrow q \equiv \neg \, p \vee q$;
(в) $(p \vee q) \equiv (\neg \, p \; \& \; \neg \, q)$;
(г) $(p \; \& \; q) \equiv (\neg \, p \vee \neg \, q)$;
(д) $\neg\neg \, p \equiv p$.

В указанных примерах появился новый символ ≡. Что это за символ?

Выразимость одних логических операций через другие с необходимостью предполагает оценку формул логики высказываний на их равносильность. В связи с этим принято считать, что две формулы логики высказываний, представляющие одну и ту же булеву функцию, являются *равносильными*. Равносильность формул записывается с помощью уже известного нам символа ≡. Например: $\neg\neg \, p \equiv p$.

Формулы считаются равносильными, если их значения истинности при любом наборе значений входящих в них переменных совпадают.

Как уже ранее отмечалось, для логики высказываний разрешающей процедурой является не только построение таблиц (матриц) истинности, но и преобразование исследуемого выражения в так называемую *нормальную форму*, с помощью которой точно устанавливается, является ли выражение общезначимым или не является, выполнимо оно или нет.

Замечу, что общезначимые выражения это такие выражения логики высказываний, которые при каждом значении встречающихся в них пропозициональных переменных принимают значение истина. К этому следует добавить, что выражения в нормальной форме могут содержать только отрицание, конъюнкцию и дизъюнкцию, т. е. все остальные логические константы должны быть сведены к ним.

Так, например, импликация $p \rightarrow q$ может быть преобразована в дизъюнкцию вида $\neg \, p \vee q$, поскольку данные импликация и дизъюнкция имеют одинаковый порядок значений истинности, что видно из таблицы 12.

Таблица 12

p	q	$\neg p$	$p \to q$	$\neg p \vee q$
1	1	0	1	1
1	0	0	0	0
0	1	1	1	1
0	0	1	1	1

Таким образом, формула $p \to q$ равносильна формуле $\neg\, p \vee q$. Записывается это уже знакомым нам образом, а именно $p \to q \;\equiv \neg\, p \vee q$.

Равносильность формул логики высказываний аналогична тождествам элементарной алгебры. Так, например: $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$. В данном случае тождественное равенство двух различных по виду формульных выражений означает, что они принимают одинаковые числовые значения, какие бы числа мы ни подставляли вместо переменных x и y.

Для установления, к какому классу выражений принадлежит некоторое выражение логики высказываний, его сначала приводят к *нормальной форме*. Последняя должна удовлетворять следующим условиям:

1. Нормальная форма должна быть равносильна исходному выражению.
2. Из связок логики высказываний в ней должны содержаться только символы отрицания, конъюнкции и дизъюнкции.
3. Встречающиеся символы отрицания должны относиться только к пропозициональным переменным, но не к сложным выражениям.

Давайте приведем к нормальной форме выражение $\neg\,(p \vee \neg\, q) \to \neg\,(\neg\, p\ \&\ q)$. Вначале необходимо избавиться от импликации, а затем от символов отрицания над скобками.

Существует общее правило превращения любой импликации в дизъюнкцию. Продемонстрирую это на следующем примере:

$$\begin{array}{ccc} & p \rightarrow & q \\ & \downarrow\ \ \downarrow & \downarrow \\ \neg & p \vee & q \end{array}$$

Указанное правило гласит: *импликация преобразуется в дизъюнкцию с таким же порядком значений истинности, если ее антецедент отрицается, константа импликации заменяется константой дизъюнкции, а консеквент берется без изменений.*

Избавляясь от импликации в выражении $\neg (p \vee \neg q) \rightarrow \neg (\neg p \ \& \ q)$, мы получаем $\neg \neg (p \vee \neg q) \vee \neg (\neg p \ \& \ q)$. Поскольку левый член дизъюнкции отрицается дважды, то наше выражение может быть упрощено до $(p \vee \neg q) \vee \neg (\neg p \ \& \ q)$. Теперь надо избавиться от символа отрицания перед скобками правого члена дизъюнкции. Для этого он сам превращается в дизъюнкцию, и мы имеем: $(p \vee \neg q) \vee \neg \neg (p \vee \neg q)$. После сокращения двойного отрицания получается $(p \vee \neg q) \vee (p \vee \neg q)$, являющееся нормальной формой выражения $\neg (p \vee \neg q) \rightarrow \neg (\neg p \ \& \ q)$.

Выражение логики высказываний является общезначимым, если в каждой дизъюнкции его конъюнктивной формы любая пропозициональная переменная один раз встречается с отрицанием, а другой раз без отрицания. Если же этого нет хотя бы в одной дизъюнкции, то выражение не будет общезначимым.

С помощью операции, которая называется «штрих Шеффера» (для нее используется символ $|$) можно выразить все уже известные нам логические операции. Операция «штрих Шеффера» применительно к записи формулы логики высказываний $p \mid q$ читается: *p штрих Шеффера q*. Эта операция определяется следующей таблицей истинности (табл. 13).

Согласно указанной таблице сложное высказывание вида $p \mid q$ истинно всегда, кроме того случая, когда p и q истинны.

Попытаемся применить накопленные нами знания в области логики высказываний к анализу релейно-контактных схем. Для построения релейно-контактных

Таблица 13

p	q	$p \mid q$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	1

Рис. 11

схем, реализующих формулы логики высказываний, следует знать, что конъюнкция реализуется последовательным включением контактов, а дизъюнкция параллельным включением. Например, релейно-контактная схема (рис. 11) срабатывает тогда и только тогда, когда выполняется формула p & q (логическое умножение), а другая релейно-контактная схема (рис. 12) срабатывает тогда и только тогда, когда выполняется формула $p \vee q$ (логическое сложение).

Число контактов в любой релейно-контактной схеме равно числу пропозициональных переменных в соответствующей формуле. Но представление этих контактов в формульном виде может быть совершенно разным. Задача состоит в том, чтобы минимизировать формулы, точнее, максимально их упростить, следуя требованиям логики. С решением этой задачи мы уже сталкивались в первом разделе книги. Теперь решим ее с помощью языка логики высказываний.

Итак, мы имеем контактную схему (рис. 13), которую требуется упростить. Формульно она будет выглядеть так: (p & q) & (p & q) & (p & q) & (p & q).

Это соединение будет токопроводящим тогда, когда по меньшей мере два последовательных контакта будут проводить ток. Последовательное включение контактов представляет конъюнкция. Остальные контакты

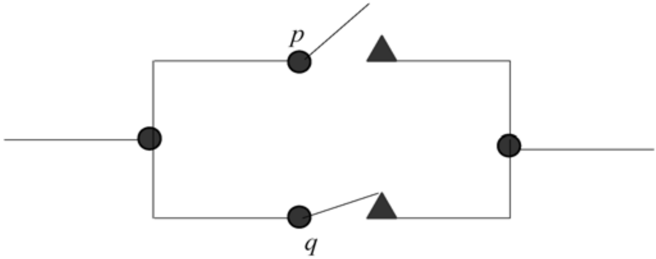


Рис. 12

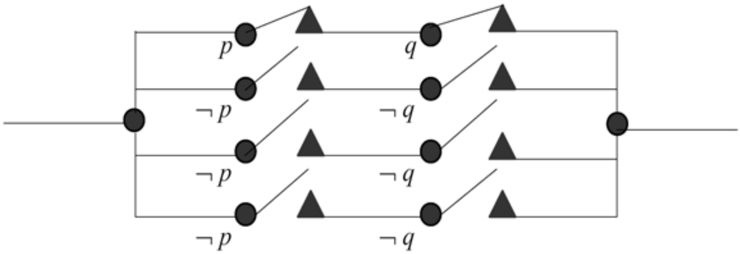


Рис. 13

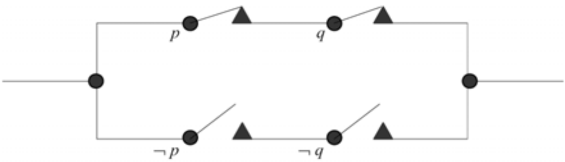


Рис. 14

могут не быть под током. Такое соединение соответствует дизъюнкции, которая истинна тогда, когда истинен хотя бы один ее член. Из этого следует, что в нашей формуле перед тремя из четырех пар скобок требуется поставить символ отрицания, а именно: $(p \ \& \ q) \vee \neg (p \ \& \ q) \vee \neg (p \ \& \ q) \vee \neg (p \ \& \ q)$.

Очевидно, что мы можем обойтись дизъюнкцией из двух членов, а именно: $(p \ \& \ q) \vee \neg (p \ \& \ q)$. В таком случае наша контактная схема будет выглядеть следующим образом (рис. 14).

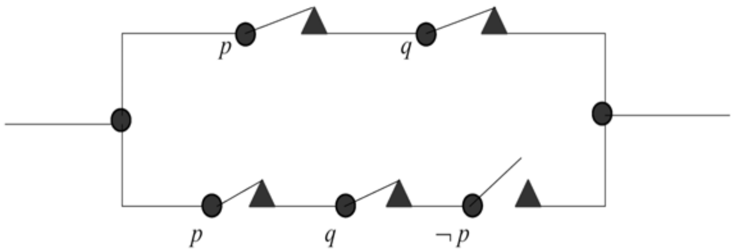


Рис. 15

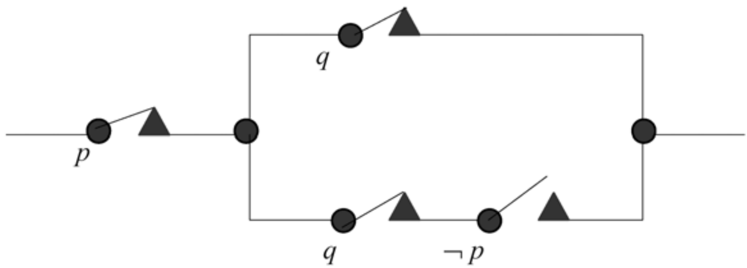


Рис. 16

С помощью логики высказываний мы можем установить сходные черты у внешне различных релейно-контактных схем. Например, посмотрим на схемы, представленные рис. 15 и 16.

Формульно схема на рис. 15 будет выглядеть так:

$$(p \ \& \ q) \vee (p \ \& \ q \ \& \ \neg \ p).$$

Схема же, изображенная на рис. 16, будет выглядеть несколько иначе, а именно:

$$p \ \& \ (q \vee (q \ \& \ \neg \ p)).$$

С помощью таблиц истинности мы проверяем эти формулы и устанавливаем, что они представляют одну и ту же булеву функцию (табл. 14, 15).

По таблицам истинности видно, что наши выражения (формулы) выполнимы, т. е. электросоединения при определенных условиях проводят ток.

Таблица 14:
Таблица для формулы $(p \ \& \ q) \lor (p \ \& \ q \ \& \ \neg \ p)$

p	q	$\neg p$	$p \& q$	$p \& q \& \neg p$	$(p \& q) \lor (p \& q \& \neg p)$
1	1	0	1	1	1
1	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	1
0	0	1	0	0	0

Таблица 15:
Таблица для формулы $p \ \& \ (q \lor (q \ \& \ \neg \ p))$

p	q	$\neg p$	$q \& \neg q$	$q \lor (q \lor \neg p)$	$p \& (q \lor (q \& \neg p)$
1	1	0	1	1	1
1	0	0	0	0	0
0	1	1	0	1	0
0	0	1	0	0	0

Можно ли овладеть синтезом релейно-контактных схем средствами логики высказываний? Несомненно. Для логиков это значит одно: найти такое сложное высказывание с помощью таблиц истинности, в котором из логических констант имеются только отрицание, конъюнкция и дизъюнкция. Данная задача вполне разрешима, ибо все константы логики высказываний можно свести к указанным. Следовательно, логика высказываний в состоянии служить весьма эффективным инструментом для проникновения в суть задач сугубо технического характера. Этот инструмент значительно облегчает работу инженеров, которым вовсе не обязательно иметь дело с проводами и контактами; достаточно воспользоваться операциями с логическими символами для конструирования некоторых машин. И здесь мы вплотную приближаемся к проблеме «интеллектуальных машин», которые хотели бы видеть способными умозаключать. Для возможного решения данной проблемы необходимо ответить на вопрос: применима ли логика высказываний к построению умозаключений?

Забегая вперед, скажу: да, логика высказываний применима к построению умозаключений. А теперь посмотрим, как это выглядит.

Преподаватели логики часто объясняют правила вывода (умозаключения), используя такой замшелый силлогизм:

Случай А.
Посылка 1. *Все люди смертны.*
Посылка 2. *Сократ человек.*
Вывод. *Сократ смертен.*

Используя этот силлогизм, один остроумный человек придумал своеобразную лингвистическую ловушку.

Случай Б.
Посылка 1. *Людей много.*
Посылка 2. *Сократ человек.*
Вывод. *Сократов много.*

Неужели Сократов много? Как говорится, вопрос на засыпку.

Что думают по этому поводу логики?

Логики считают, что процесс вывода в естественном языке нельзя представить с помощью чисто формальных операций, покуда выражения естественного языка не будут переведены на язык символов, специально приспособленных к возможностям формальной логики. Только после того как исходные утверждения переведены на соответствующий формальный язык, выводы, полученные по правилам формальной логики, перестают расходиться с выводами, основанными на здравом смысле. Например, на языке логики предикатов, о которой речь пойдет в следующем разделе, приведенный выше парадокс с Сократом специалисты представляют следующим образом:

Случай А.
Посылка 1. *Для всех x: из принадлежит* (*x, люди*) *следует смертный* (*x*).
Посылка 2. *Принадлежит* (*Сократ, люди*).
Вывод. *Смертный* (*Сократ*).

Случай Б.

Посылка 1. *Многочисленный* (*люди*).
Посылка 2. *Принадлежит* (*Сократ, люди*).
Вывод. ?! (*Никакого вывода*).

Обработка текстов на естественных языках для программирования «интеллектуальных машин» предполагает создание особых логических языков, необходимых, в частности, для того, чтобы избежать парадоксов, подобных парадоксу с Сократом. Но и это еще не всё. Дело в том, что попытки применить законы дедуктивного вывода непосредственно к высказываниям на естественном языке могут быть обречены на неудачу даже в том случае, когда мы заменим выражения естественного языка символами формальной логики. Чтобы этого не случилось, если речь заходит об «интеллектуальных машинах» и их способности «мыслить», «умозаключать», необходимо установить более тесную связь между логиками и программистами. Проблема состоит в том, чтобы из аппарата формальной, точнее, математической логики отобрать наиболее полезное для работы на вычислительной машине. Отчасти эта проблема уже решена. Ученым уже удалось доказать, что в рамках исчисления предикатов первого порядка (ступени) можно удовлетворительно справиться с рядом трудностей машинного представления знания.

По мнению специалистов, основная идея так называемого логического программирования заключается в том, что каждый компьютер должен обладать собственной базовой машиной логического вывода, а программист должен сообщать ей только факты, полагая, что машина лучше знает, что с ними делать. Характерно, что руководители японского проекта по созданию электронно-вычислительных машин пятого поколения вполне поверили в преимущества логического программирования, сделав его краеугольным камнем своих научно-технических проектов. Как считает директор Института имени Алана Тьюринга в Глазго Дональд Мичи, логическое программирование может сыграть в исследованиях по «искусственному интеллекту» такую же фундаментальную роль, как дифференциальное исчисление в механике.

Нельзя пройти и мимо такого вопроса, ныне стоящего на повестке дня, как вопрос о расширении возможностей машины за счет добавления операторов так называемой модальной логики, которой будет посвящена значительная часть предпоследнего раздела книги.

Как видим, проблема умозаключения включает в себя не только обучение школьников, ораторов, юристов и прочих думающих и говорящих людей умению делать правильные выводы, хотя это полезно и даже необходимо.

Существуют два основных вида умозаключений индуктивные и дедуктивные. Соблазнительно, дав более или менее ясное определение индуктивному умозаключению, сразу же перейти к дедуктивному умозаключению и его представлению в терминах логики высказываний. Но честнее будет все же как-то подробнее охарактеризовать индуктивное умозаключение, отталкиваясь от дедуктивного. Тогда очевиднее станет картина бушующего моря, окружающего маленький островок царство дедуктивных наук.

В корректном дедуктивном выводе заключение с необходимостью следует из посылок. Структуру этого вывода можно охарактеризовать следующим образом: *дедуктивный вывод это условное высказывание, антецедент которого представляет собой конъюнкцию всех посылок нашего рассуждения, а консеквент его заключение.* Корректным этот дедуктивный вывод считается тогда, когда условное высказывание будет логически истинно.

В свете данной характеристики дедуктивного вывода современный западный логик и философ Г. Кайберг так определяет корректные индуктивные выводы: ими являются все оставшиеся типы выводов.

Хитроумное определение, не так ли? Впрочем, Кайберга можно понять. Многие современные логики безуспешно пытаются дать точное определение корректному индуктивному выводу. Дело в том, что заключение индуктивного вывода, нацеленного на получение обобщенного знания, утверждается не жестко и однозначно, а лишь с некоторым правдоподобием или вероятностью. Это является характерной, но вовсе не обязательной чертой индуктивных рассуждений. Другой характерной чертой подобных рассуждений является то, что полученные с их помощью логические выводы (заключения) часто выходят за рамки исходных посылок, т. е. содержат в себе больше информации, чем ее заключено в посылках. Вот почему многие логики сторонятся индукции, как черт ладана. Последуем в этом разделе их примеру и обратим свои взоры на дедукцию.

Рассмотрим особенности выводов в логике высказываний. Главная особенность их состоит в том, что в логике высказываний анализируются только структурно сложные высказывания, простые же высказывания считаются структурно неразложимыми. Поэтому в логике высказываний корректные дедуктивные выводы строятся только на основе установления логических связей между высказываниями.

Мы будем использовать большие буквы латинского алфавита для обозначения формул логики высказываний, которые включают в себя простые и сложные высказывания. Например, буква A может обозначать импликацию вида $x \rightarrow y$, но с таким же успехом может обозначать и простое высказывание вида x. Логическая форма высказывания берется в скобки, перед которыми ставится соответствующая большая буква. Чтобы упростить нашу запись формул логики высказываний, будем считать, что они предполагают определенный порядок своих переменных, находящихся в скобках. В таком случае формулу можно записывать следующим образом: $A\ (x_1, x_2, ..., x_n)$.

Из формул $A_1, A_2, ..., A_n$ можно сделать заключение B. Логики говорят: из $A_1, A_2, ..., A_n$ выводится (следует) B. Или B является следствием формул $A_1, A_2, ..., A_n$.

Иногда записывается это так: $A_1, A_2, ..., A_n \models B$, где $\models$ символ операции вывода. Этот символ можно читать: «влечет». Но, кроме того, как мы помним, данный символ указывает на общезначимость некоторых логических формул. Для логической теории доказательств это означает, что формула доказуема, если она общезначима. В известном смысле «доказуемость» и «общезначимость» допустимо рассматривать как синонимы.

С учетом соответствующих уточнений логики порой говорят, что доказательство и доказуемость являются частным случаем вывода и выводимости. В связи с последним используется символ $\vdash$, введенный в 1879 г. Г. Фреге. Этот символ можно читать так: «выводится». В таком случае $A \models B$ означает, что B является следствием формулы A, т. е. что B дает истину во всех табличных строках, где A дает истину. Что же касается $A \vdash B$, то эта формула означает, что B выводимо из A.

В теории доказательств в целях минимизации научного словаря и упрощения инструментария логического анализа сводят понятие выводимости к понятию доказуемости подобно тому, как сводят отношение следования к понятию общезначимости. При этом доказывается, что $\models C$ и $\vdash C$ равносильны. Такое доказательство позволяет заменять повсюду $\models$ на $\vdash$. В данном случае используются две теоремы.

Теорема 1. Всякая доказуемая формула общезначима (если $\vdash C$ то $\models C$).
Теорема 2. Всякая общезначимая формула доказуема (если $\models C$, то $\vdash C$).

В логически корректном дедуктивном выводе между конъюнкцией посылок и заключением имеет место отношение логического следования, которое можно записать, например, так: $A_1 \& A_2 \& ... \& A_n \models B$ или так: $A_1 \& A_2 \& ... \& A_n \vdash B$. Поскольку различные виды доказательств, строящиеся иногда на дедуктивном выводе, тяготеют к форме импликации, то нашу запись логического следования (вывода) можно преобразовать таким образом: $\models A_1 \,\&\, A_2 \,\&\, \ldots \,\&\, A_n \to B$ или таким образом: $\vdash A_1 \,\&\, A_2 \,\&\, \ldots \,\&\, A_n \to B$. Но и это еще не конец. Самой короткой записью данного логического следования (вывода) будет:

$$\models \mathop{\&}_{i=1}^{n} A_i \to B$$

или:

$$\vdash \mathop{\&}_{i=1}^{n} A_i \to B.$$

В логике высказываний правильность или неправильность наших рассуждений, имеющих характер дедуктивного вывода, определяется только тем, следует заключение из посылок или не следует. Если рассуждение правильно и все его посылки истинны, то и заключение будет истинным.

Логическая формула в логике высказываний будет адекватно понята только тогда, когда мы поймем суть аксиоматической формулировки исчисления высказываний. Поэтому вместо таблиц истинности необходимо пользоваться определенными правилами вывода. В данном случае аксиомы должны рассматриваться как исходные выводимые формулы. Тогда под выводом следует понимать образование выводимой формулы из аксиом (исходных выводимых формул) путем применения соответствующих правил вывода.

Чем отличается этот взгляд на аксиомы от общеизвестного?

Характерная черта новой точки зрения определяется, так сказать, сверхаксиоматической трактовкой аксиом, т. е. на аксиомы мы начинаем смотреть как бы сверху, с позиций метаматематики (теории доказательств).

Ну и что? Можно ли яснее высказаться по поставленному выше вопросу?

Следуя советам крупнейшего специалиста в области математической логики Клини, объявим аксиомами системы логики высказываний все формулы, имеющие один из видов, указанных после символа $\models$. О каких видах идет речь?

Вспомним о выражении $\models A_1 \,\&\, A_2 \,\&\, \ldots \,\&\, A_n \rightarrow B$. Условимся считать часть этого выражения, находящуюся перед символом импликации, аксиомами логики высказываний. Вид этой части общего выражения назовем *схемами аксиом* или *аксиоматическими схемами*. Иначе их и не назовешь. В самом деле, о каких конкретных аксиомах мы можем здесь говорить, если предполагается, что каждая схема аксиом содержит бесконечное число аксиом?

Для чего все это нам требуется?

Чтобы сделать доказательство как таковое объектом анализа в рамках теории доказательств (метаматематики). Это предполагает более строгое определение исходных терминов как в исследуемом (исходном) языке (например, в языке логики высказываний), так и в языке исследования (языке теории доказательств). Вот почему делается различие в терминах «доказательство» и «вывод», а затем изучается связь между этими логическими понятиями.

Говоря о доказательстве, мы будем называть исходные допущения аксиомами, которые предполагаются истинными в рассматриваемой теории. Что же касается вывода как процесса, условимся говорить о выводе только в том случае, когда жестко не предполагается, что исходные посылки сохраняют свой статус истинных. Образно говоря, исходная истина за доказательством, а последнее слово за дедуктивным выводом.

В метаматематике в качестве единственного надежного правила вывода, называемого *правилом отделения*, принимается процедура перехода от двух формул вида A и $A \rightarrow B$ к одной формуле B. В выводе по этому правилу A и $A \rightarrow B$ являются посылками, а B заключением.

Упомянув о правиле отделения, следует заметить, что данное правило, известное под латинским названием *modus ponens* (*утверждающий модус*), устанавливает: если истинны два высказывания, из которых одно имеет форму импликации ($a \rightarrow b$), а другое является антецедентом (a) этой импликации, то и высказывание,

составляющее консеквент (*b*) импликации, истинно. В данном случае мы как бы отделяем антецедент от консеквента, что и выражено выше переходом от двух формул A и $A \to B$ к формуле B.

Определим теперь доказательство как конечный список формул B_1, B_2, ..., B_n, каждая из которых или является некоторой аксиомой логики высказываний, или получена по правилу импликации из некоторой пары формул, предшествующих ей в этом списке. Доказательство является тогда доказательством, когда доказана последняя формула B_n. Если формула B имеет доказательство, говорят, что *B доказуемо* или что *B является теоремой*. Это записывается так: $\models$ B.

Опустимся с высот метаматематики на грешную землю и взглянем на вопрос об умозаключениях глазами школьника. Начнем с определения.

Умозаключение это получение высказываний (заключений) исходя из уже имеющихся высказываний (*посылок*). Нами предполагается, что между посылками и заключением существует определенная связь, ибо заключение должно следовать из посылок. Что можно сказать об этой связи? Связь между посылками и заключением отражается в правилах вывода, функция которых заключается в указаниях на то, каким способом исходные высказывания с установленной истинностью могут быть видоизменены так, чтобы дать при этом новые истинные высказывания.

Когда мы имеем дело с правилами дедуктивного умозаключения, должно соблюдаться следующее условие: *если истинны посылки, то и заключение истинно.* Например:

Посылка 1. *Все кошки знают французский язык.*
Посылка 2. *Некоторые цыплята кошки.*
Вывод. *Некоторые цыплята знают французский язык.*

Если серьезный читатель нахмурится, я могу отказаться от примера силлогизма, заимствованного у Льюиса Кэрролла, и привести другой, а именно:

Посылка 1. *Все люди смертны.*
Посылка 2. *Сократ человек.*
Вывод. *Сократ смертен.*

У этого силлогизма приличный возраст, а к старикам должно быть почтительное отношение. Проявим почтение и мы.

В целях наглядности правила умозаключений схематически записываются с помощью черты, над которой размещаются посылки, а под ней заключение (вывод). Если посылок две и более, они пишутся друг под другом.

Некоторые правила умозаключений соответствуют константам логики высказываний (конъюнкция, дизъюнкция, импликация). Поэтому в ряде случаев для определения истинности заключения к ним можно применять таблицы истинности, но, подчеркну, число таких случаев крайне ограниченно.

Построим одну из таких наглядных схем умозаключения, а именно:

$$\frac{\begin{array}{l}p\\q\end{array}}{p \,\&\, q}.$$

В заключении (под чертой) мы имеем дело с конъюнкцией. Воспользуемся таблицей истинности для конъюнкции (табл. 16).

Исходя из условий истинности конъюнкции можно судить об истинности посылок p и q. Например:

$$\frac{p \;\&\; q}{p}. \qquad\qquad \frac{p \;\&\; q}{q}.$$

Для умозаключения из импликации применимо одно из важнейших правил логики, уже известное под названием *modus ponens*, а именно:

$$\frac{\begin{array}{l}p \rightarrow q\\p\end{array}}{q}.$$

Заменим пропозициональные переменные в этом умозаключении конкретными высказываниями и посмотрим, что из этого получится.

Посылка 1. *Если на Луне живут лунатики, то 2 + 2 = 4.*
Посылка 2. *Лунатики не живут на Луне.*
Вывод. *2 + 2 = 4.*

Получается явный абсурд, если следовать логике первой посылки, обращая внимание на содержание

Таблица 16

p	q	$p \,\&\, q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

высказываний. В этом случае таблица истинности не срабатывает. Хотя импликация первой посылки истинна, но она противоречит здравому смыслу. Предположим, что здравый смысл в растерянности молчит. Логик расценивает это молчание как знак согласия. Воспользовавшись удобным моментом, он молниеносно посылает здравый смысл в нокдаун, заявляя, что $2 + 2 \neq 4$.

Чтобы не запутаться в этих логических хитросплетениях, предлагается рассматривать правила умозаключений в логике высказываний, отвлекаясь от значений истинности посылок и заключения. Что тогда вселяет в нас уверенность в истинности заключения?

Во-первых, следует запомнить, что фундаментом правила умозаключения является импликация, которая должна быть общезначимой. По определению, общезначимыми выражениями логики высказываний являются такие выражения, которые при каждом наборе встречающихся в них пропозициональных переменных принимают значение истина.

Во-вторых, если импликация общезначима, то можно получить надежную информацию о составных частях этой импликации (простых высказываниях) и о связи между их значениями истинности. Например: если $p \to q$ и p являются истинными высказываниями, то q также является истинным высказыванием (modus ponens). На основе этого мы получаем интересующее нас правило умозаключения, гласящее: из истинности $p \to q$ и p можно заключить об истинности q.

Описываемые в этой книге логические понятия и законы не стоит усердно зазубривать, хотя кое-что запомнить полезно, но только для того, чтобы облегчить себе чтение более серьезной литературы. В противном случае легкомысленный читатель может оказаться в ситуации голого карапуза, стоящего перед зеркалом и размышляющего так:

Глаза, чтобы смотреть... Уши, чтобы слышать... Рот, чтобы говорить... А пуп зачем? Должно быть, для красоты...

Логика не предмет для праздного любования. В отличие от риторики она не вооружает человека навыками красивого разглагольствования. Что же касается «пуповины» логики (истории ее, если угодно, «пупка»), то здесь мы сталкиваемся с генезисом этой науки и ее связями с другими научными дисциплинами, помогающими человеку научно-практическим образом осваивать окружающий мир. Поэтому, читатель, не ленись тренировать свою память и воспитывать себя, ориентируясь на высокий профессионализм, столь необходимый для уверенного движения в этом прекрасном, но, как сказал один писатель, яростном мире.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Кто является учеником Платона и учителем Александра Македонского? Что вы знаете о нем?

2. Достойна ли формальная логика нашего почтительного к ней отношения? Почему выражение «формальная логика» скептически воспринималось философами? Кому обязана логика своим названием «формальная логика»?

3. Поговорите вслух об особенностях формализованного языка.

4. Что собой представляет логика высказываний? В чем ее специфика?

5. Является ли высказыванием выражение «*x* есть страшная бука»? Что можно сказать о пропозициональной функции? Приведите примеры пропозициональных функций.

6. Каковы характерные черты переменных и постоянных в математике и логике?

7. Насколько слово «истина» священно для логиков сравнительно с философами?

8. Какие формулы логики высказываний можно считать выполнимыми?

9. Что такое разрешающая процедура и общезначимые формулы логики высказываний?

10. Проверьте свою память и попытайтесь построить таблицы истинности для отрицания, конъюнкции, дизъюнк-ции, импликации и эквиваленции. Постройте таблицу истинности для сложного высказывания вида: $(a \ \& \ b) \rightarrow (\neg \ a \ \& \ c)$.

11. Запишите с помощью логических символов следующее выражение: *Если не p и не q, то неверно, что p или q.*

12. Нарисуйте релейно-контактную схему для следующего выражения: $((a \vee b) \ \& \ c) \vee ((a \ \& \ c) \ \& \neg \ b)$.

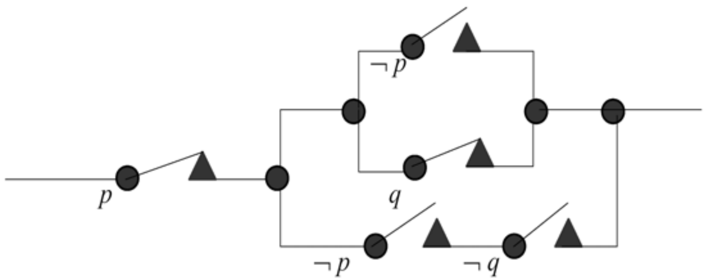
13. Чем отличаются индуктивные умозаключения от дедуктивных?

10. Что обозначает в логике символы $\models$ и $\vdash$? Как ими пользоваться?

11. На основании приведенных в данном разделе таблиц истинности составьте соответствующие таблицы для следующих сложных выражений:

а) *неверно, что* (*p или q*);
б) *неверно, что* (*если p, то q*).

12. Какой формулой логики высказываний может быть представлена контактная схема, изображенная на следующем рисунке?



4

НЕПОНЯТНОЕ МОЖНО ПОНЯТЬ

ГЛАВА 4
НЕПОНЯТНОЕ МОЖНО ПОНЯТЬ

Знакомые всем лица и проблемы, или из разговора киевского философа Хомы Брута с богословом Халявой. Отличительные черты логики предикатов. Поучительная история из жизни патера Брауна. Термины в науке. Их логический анализ. Что такое дескрипция? В чем заключается смысл проблемы существования в логике? Квантор существования. Понятия экстенсионала и интенсионала в логике предикатов. Что для логиков означает выражение «быть понятием»? Кванторы и переменные. Законы логики высказываний и логики предикатов. Несколько слов на прощание об исчислении предикатов с равенством. Упражнения.

Чуден Днепр при тихой погоде. Гоголь любит эту вольную славянскую реку, которая плавно мчит сквозь леса и горы полные воды свои. С высоких киевских холмов он смотрит на нее и не может налюбоваться.

Утро. Слышны удары звонкого семинарского колокола, висящего у ворот Братского монастыря. На его звуки спешат со всего города школьники и бурсаки. Грамматиков, риторов, философов и богословов уже ждут их профессора и наставники, мудреные книжки и немудреные розги.

Грамматики, представители младшего класса, идут гурьбой, толкаясь и бранясь. Риторы, довольно взрослые детины, шествуют солидно. Философы и богословы, народ зрелый и многоопытный, в чьих карманах ничего нет, кроме крошек табака и зияющих дырок, идут, как должны идти охотники, то осторожно, то резво, то важно. От них исходит крепкий дух табака и горилки.

Весь этот ученый народ чрезвычайно беден на средства к прокормлению, но необыкновенно прожорлив. Киевляне хорошо знают про сие, особенно те из них, у кого богатые огороды и сады. На штурм этих искушений философы вкупе с богословами посылают грамматиков, и тогда в бурсе появляется вкусная каша из тыкв и кучи арбузных корок.

С июня месяца бурсу распускают по домам. Это самое торжественное и радостное событие. Все большие шляхи усеивают галдящие ватаги будущих ученых мужей. Чем дальше идут они, тем более уменьшается их толпа: бурсаки разбредаются по родным гнездам.

Однажды во время подобного странствия три бурсака, богослов Халява, философ Хома Брут и ритор Тиберий Горобець, своротили с большой дороги в сторону, надеясь запастись провиантом в первом попавшемся хуторе.

Богослов был рослый, немногословный детина, имевший чрезвычайно странный нрав: он непременно норовил украсть всё, что попадется под руку. Философ Хома Брут, любивший лежать и курить люльку, был нрава веселого. Ритор Тиберий Горобець по возрасту не имел права носить усов, пить горилку и курить люльку, но шишки, синяки и часто разбитый нос свидетельствовали, что из этого молодца будет хороший лыцарь.

То, что случилось затем с одним из бурсаков, Хомой Брутом, читатель может узнать из гоголевской повести «Вий». Меня же интересует другое   разговоры, которые вели или могли вести друзья, неспешно шагая шляхами Слободской Украины. Эти предполагаемые разговоры наводят на кое-какие мысли, могущие пригодиться нам для понимания некоторых логических проблем. Хотя Николай Васильевич Гоголь не нашел уместным обременять внимание рядового читателя философскими беседами наших путников, но в данном случае я считаю оправданным восстановить часть этих бесед, подсказанных моей фантазией.

Ей-богу, уже надоело слушать твою болтовню! досадливо крякнул богослов Халява в ответ на философские сентенции Хомы.

Право, какой ты скучный человек, Халява, сказал Хома, немного насупясь. Вот вы, богословы, хотите всему люду доказать, что без вас никак не обойтись в этой жизни.

Да, без нас аж никак нельзя, важно изрек Халява.

Тогда скажи мне: существуют ли упыри?

Угу, утвердительно промычал Халява, хрустя сухарем.

Говорят, что упыри большие вруны. Правды от них не добьешься. Это в самом деле так? продолжал любопытствовать Хома.

А ты как думал?

Еще говорят, будто они ликом своим ничем не отличаются от людей. Как же тогда узнать, кто упырь, а кто нет? Ведь от этого зависит ответ на вопрос, существуют они на самом деле или не существуют, прав ты или не прав, утверждая их существование.

Это, брат, по твоей части, равнодушно заметил Халява, не желая вступать в спор. Ты философ, ты и думай.

Читатель, наверное, уже уловил что-то знакомое в разговоре двух бурсаков. Правильно, этим знакомым мотивом является вопрос о существовании всякой чертовщины, включая абстрактные чертовщинки научного характера. Достаточно вспомнить пресловутых «демонов» Дж. К. Максвелла (1831 1879), известного английского физика, которому не чужд был юмор.

Этот заковыристый вопрос волнует и логиков, особенно из числа тех, кто занимается проблематикой логики предикатов. Что же это за логика?

Символическая логика подразделяется на логику высказываний и логику предикатов. Логика высказываний лежит в основе логики предикатов.

Если логика высказываний игнорирует структуру простых высказываний, интересуясь только правильностью связей между высказываниями, то логика предикатов сосредоточивает свое внимание именно на структуре высказываний.


Н.В. ГОГОЛЬ
ДЖ.К. МАКСВЕЛЛ

В логике предикатов различают логику предикатов первой ступени (порядка) и логику предикатов более высоких ступеней (порядков).

Логика высказываний и логика предикатов первой ступени образуют так называемую *элементарную логику.*

В логике предикатов столь велика роль кванторов, что иногда исчисление предикатов называют *теорией квантификации.*

Что такое предикат?

Ответ на этот вопрос не так прост, как может показаться тем, кто знаком с начатками традиционной логики.

Со времен Аристотеля в логике укоренилось понятие «суждение». Суждение определялось Стагиритом как мысль, утверждающая или отрицающая что-либо о чем-либо.

Структурно суждение состоит из субъекта, предиката и глагола-связки. Так, в суждении «Хома Брут есть киевский философ» имя «Хома Брут» является субъектом (*S*), выражение «киевский философ» предикатом (*P*), а глагол «есть» связкой.

В грамматике этому делению (*S* *P*) соответствуют подлежащее и сказуемое предложения.

В конце прошлого века немецкий математик и логик Готлоб Фреге, чье имя нам уже встречалось, подверг резкой критике традиционную трактовку структуры суждения. Свое критическое отношение к этой традиции он демонстрирует на примере двух предложений:

(а) *Греки нанесли поражение персам при Платеях;*
(б) *Персы были разбиты греками при Платеях.*

Грамматическое различие между этими предложениями состоит в изменении активной формы [(а) *греки нанесли*] на пассивную форму [(б) *разбиты греками*], т. е. в предложении (а) субъектом являются греки, а в предложении (б) персы. Но в таком случае различие имеет лингвистический характер, а не строго логический. И несмотря на это, данные предложения имеют одно и то же значение истинности. В связи с этим Фреге подчеркивает, что словесный порядок, опирающийся на грамматическое разграничение субъекта и предиката, не представляет интереса для логики.

Фреге совершенно прав, требуя, чтобы субъект-предикатное разграничение рассматривалось не как логический, а как лингвистический феномен. Логика может спокойно игнорировать это разграничение, которое плохо отражает потребности не только логической науки, но и грамматики. В живой речи часто бывает так: в реальном процессе языкового общения то, что ранее выступало в роли субъекта (подлежащего), относительно легко может стать предикатом (сказуемым), и наоборот.

Стремление избавиться от подобных неопределенностей вынуждает немецкого ученого переосмыслить сущность именования в логике, введя понятия «функция» и «аргумент». По его мнению, некоторое номинативное выражение (имя) можно разделить не только на субъект и предикат, но также на функцию и аргумент, что наиболее соответствует логике, ориентированной на математику, а не на психологию или лингвистику. При этом Фреге неоднократно подчеркивал, что функция и аргумент лишь маркируют структурные особенности некоторого выражения, не затрагивая его смыслового содержания.

Предлагаемый взгляд на процесс номинации был полезен для логики тем, что открывал возможность пользоваться при логическом анализе теоретико-множественными представлениями (например, функция как отображение одного множества в другом множестве), следствием чего явилось рассмотрение предиката как пропозициональной функции вида $F(x)$.

Учение о пропозициональных функциях и кванторах явилось важнейшим вкладом Фреге в современную логику.

Мы уже знаем, что пропозициональная функция определяется как языковая конструкция, содержащая переменную. Эта конструкция при подстановке какого-либо значения для данной переменной превращается в высказывание. Таким образом, пропозициональная функция это функция, соотносящая представителей некоторой предметной области с областью значений истинности (например, *истина* или *ложь*).

Не помешает еще раз рассмотреть выражение типа «x есть дерево». Данное выражение является именно выражением, а не высказыванием, которое, по определению, претендует на истинностное значение. Следовательно, это выражение с переменной x представляет собой пропозициональную функцию, которая получает значение *истина*, скажем, при аргументе *вишня* и *ложь* при аргументе, например, *фиалка*.

Говоря более строго, выражение вида $F(x)$ (где F обозначает свойство некоторого индивида) представляет собой элементарную пропозициональную функцию, из которой получается элементарное высказывание посредством замены переменной x обозначениями конкретных индивидов (например: $F(x) \to x$: *трава* $\to$ *трава зеленая*).

Из сказанного следует, что пропозициональная функция может стать высказыванием тогда и только тогда, когда аргумент (переменная) приобретает конкретное предметное значение.

Таким образом, введение понятия пропозициональная функция позволяет привнести математическую строгость в логический анализ высказываний (пропозиций).

Если мы хотим построить сложную пропозициональную функцию, то для этого нам необходимо осуществить некоторые операции. В логике символы этих операций называются *кванторами*, а сами операции *квантификацией пропозициональных функций.*

Если идея квантификации принадлежит Фреге, то автором терминов «квантор» и «квантификация» является американский философ и математик Чарльз Сандерс Пирс (1839 1914).

Использование пропозициональных функций и кванторов существенно упростило и прояснило методы логического анализа, позволив точно формулировать и строго доказывать многие принципы логики, на основании которых одни высказывания можно корректно выводить из других.

Казалось бы, с понятием предиката в логике покончено раз и навсегда. Но не тут-то было. Опять вспомним о пивных кружках Д. Гильберта и еще кое о чем, а именно: у Гильберта термин «предикат» применяется для обозначения пропозициональной функции. Аналогичным образом поступают С. Клини и многие другие логики.

Решение о сохранении термина предикат в современной символической логике было продиктовано не консерватизмом традиции, а попытками заглянуть в глубинную структуру высказываний, не опасаясь утонуть в смысловом омуте этой глубинной структуры. Спасательным поясом в данном случае служат кванторы. Так ли это на самом деле?

Давайте переведем дух, немного расслабимся и обратимся к творческому наследию английского писателя Гилберта Кита Честертона (1874 1936), создателя одного из самых странных сыщиков детективной литературы   скромного священнослужителя патера Брауна, который, надеюсь, поможет нам развязать узелок, касающийся сути логики предикатов.

Патер Браун, постоянно озабоченный спасением души преступника и погруженный в философские раздумья,   самая подходящая фигура для иллюстрации поведения кванторов в логике предикатов.

История, о которой пойдет речь, случилась в конце XIX столетия в Германии. Величайший преступник эпохи Фламбо, перевоспитанный патером Брауном, и сам патер Браун сидели в старинном немецком парке и попивали пиво. Друзья вели философский разговор об окружающий природе и людских судьбах.

Здесь так тихо и уютно, сказал отец Браун, что местные опереточные солдаты могут демонстрировать свое мужество только с помощью картонных мечей.

Ошибаетесь, возразил Фламбо. Они здесь не только дерутся на настоящих шпагах, но и убивают метким выстрелом.

Да что вы?! изумленно воскликнул отец Браун.

Неужели вы не слышали, что случилось с покойным правителем этих земель? удивленно поинтересовался Фламбо. О, лет двадцать назад это была одна из самых непостижимых полицейских загадок! Ей предшествовали драматические события, связанные с планами Бисмарка относительно создания единой Германской империи. Для осуществления этого плана в маленькое немецкое королевство, коих имелось тогда огромное множество, был прислан князь Отто Гроссенмаркский. Хотя он считался искусным воином, но местные братья Арнольды в нескольких битвах нанесли ему поражение. Однако в решительный час один из братьев Пауль, выдал все планы восстания, благодаря чему получил пост гофмейстера при князе Гроссенмаркском. Другой брат Людвиг, геройски пал при захвате города, а последний из них Генрих, перестал общаться с людьми и стал отшельником. Между прочим, он пережил всех остальных лиц этой ужасной драмы.

Фламбо умолк, залпом выпил полкружки темного пива и продолжил:

В тот злополучный для него вечер князь возжелал в одиночку выйти из своего неприступного убежища. Это был странный, но, как вы увидите, объяснимый поступок. Князем владела навязчивая идея найти золото, принадлежащее братьям Арнольдам и спрятанное где-то в горах.

А как же брат, ставший предателем? Разве ему нечего было рассказать князю? полюбопытствовал отец Браун.

Предатель всегда клялся, что это единственная тайна, в которую он не был посвящен, ответил Фламбо.

Извините, я вас перебил, но для меня очень важны детали, сказал отец Браун.

Итак, в замке князя ждали геологи из Берлина и Парижа, вызванные им для поиска золота, а его все не было. Неожиданно раздались какой-то шум и громкие крики. В комнату влетел слуга и сообщил, что князь найден убитым. Его нашли с простреленной челюстью и виском. Рядом в траве валялась перевязь, также простреленная пулей. Следовательно, было два выстрела.

Вторую пулю нашли? требовательно спросил патер Браун.

Что-то не припомню, ответил Фламбо.

Вы, кажется, сказали, что тело обнаружила девушка, состоявшая при дворе?

Да. Она рвала в лесу цветы.

А стебли у цветов были длинные?

Если я не ошибаюсь, кто-то из слуг удивлялся тому, что цветы были на коротких стеблях.

Похоже, девушка очень волновалась и рвала цветы второпях, задумчиво произнес отец Браун. Что дальше с ней стало?

Она вышла замуж за генерала Шварца, который выдвинулся из рядовых, а, как вы понимаете, это очень большая редкость.

Выдвинулся из рядовых! возбужденно воскликнул патер Браун. Я, кажется, все понял.

Что вы имеете в виду?

Его убили с помощью перевязи, сдержанно произнес священник. Точнее будет сказать так: он умер оттого, что на нем была перевязь.

Позвольте, но как это можно объяснить? удивился Фламбо.

Если хотите, я немного пофантазирую и расскажу вам одну сказку.

Сделайте одолжение, сказал Фламбо.

Был мрачный, ненастный вечер. Князь поспешно вышел из боковой двери замка и быстрым шагом направился в лес. В дебри леса его гнала жажда золота. Вдалеке от замка, в конце петляющей горной тропы приютилось убежище отшельника, где скрывался от мира третий из знаменитых братьев. Князь хотел, воззвав к его христианским устоям, выведать тайну золота. И вот конец пути. На небольшой площадке стоит глубокий старик в черном одеянии.

Сударь, с не свойственной ему учтивостью обратился князь к отшельнику, надеюсь, вы поймете меня. Я пришел сюда не затем, чтобы преследовать вас. Какова бы ни была политика вашей семьи, никому никогда не приходило в голову, что вами движет жажда золота. Ваше поведение поставило вас вне подозрений. Но где же оно, это золото?

При слове «золото» старик вытянул руку, словно что-то отстраняя, и вымолвил:

Он говорит о золоте. Он говорит о запретном. Пусть умолкнет.

Князь хотел было возразить отшельнику, но не смог произнести ни слова, ибо что-то мягкое вдруг закрыло ему рот и накрепко, точно жгутом, стянуло голову. Прошло добрых сорок секунд, прежде чем он сообразил, что это сделали слуги отшельника, и притом его же собственной перевязью. Ужас охватил князя. Он резко повернулся и кинулся вниз по тропе, тщетно пытаясь сорвать перевязь, стягивающую шею и челюсть.

Уже близок был парк, обступивший замок. Только тогда князь окончательно понял, к чему его приведет бессловесность. Везде на страже стоят солдаты, и каждый пристрелит его на месте, если он не отзовется на оклик. И вот раздалось:

Кто идет?

Князь только мычал, не в силах крикнуть. Последовал второй оклик, а за ним выстрел.

Часовой по фамилии Шварц, который стрелял согласно строжайшему приказу, кинулся отыскивать свою жертву и нашел человека в военном мундире, чье лицо было туго обмотано его же перевязью. Пуля прошла через перевязь, стягивающую челюсть. Шварц сорвал загадочную шелковую маску и, отбросив ее, увидел, к своему огромному ужасу, кого убил.

Фламбо с большим вниманием слушал патера Брауна.

Как события развивались дальше, сказать трудно, произнес патер Браун. Я склонен верить, что в этом небольшом лесу и вправду творилась сказка. Был ли ранее знаком девушке из замка этот солдат, которого она спасла и за которого после вышла замуж, или она ненароком оказалась на месте происшествия и знакомство их завязалось в ту ночь этого мы, вероятно, никогда не узнаем. Очевидно, она уговорила часового вернуться на свой пост, а сама подняла тревогу.

Я не буду философски рассматривать моральную сторону этой поучительной рассказки. Рассказка, поведанная патером Брауном, должна помочь читателю запомнить кое-что из логики, а именно связь кванторов с переменными. Увы, но от красивой рассказки мы вынуждены перейти к прозе наших логических рассуждений.

Что в этой истории могло быть квантором?

По-видимому, на такую роль годится золото, связывающее ранее свободного от корысти человека по рукам и ногам в том случае, когда его свобода декларируется лишь на словах, не подтверждаясь делами.

Сравнение многозначительно, но пока оно ничего не говорит о логике предикатов, о теории квантификации. Стоило ли тратить столько сил на пространный пересказ честертоновского рассказа? С прагматической точки зрения логическая мораль минимальна. И все-таки не будем спешить с выводами. Как говорят философы, кто хочет всего сразу, тот ничего не достигнет.

Образно говоря, мы только зарядили ружье, и оно не раз будет стрелять, особенно громко в предпоследнем разделе книги. Здесь же в качестве мишени остановимся на вопросе о свободных словах и несвободных терминах языка науки, освобождающих ученых от утомительных словопрений и позволяющих целенаправленно осуществлять логически корректный анализ реальных проблем.

О значении унифицированной научной терминологии говорит тот факт, что укрепление междисциплинарных связей невозможно без однозначного понимания терминов. Только на базе унифицированных терминов осуществима стыковка наук, автоматизация информационных систем, эффективное внедрение в производство новейших научно-технических достижений и достойная оценка профессиональной деятельности специалистов высокого ранга. Это не преувеличение, так как в современном динамичном мире компетентность, включая языковую, если иметь в виду язык науки, это залог прогресса.

Подкрепляя сказанное, воспользуюсь понятием разделение языкового труда, которое было введено в научный оборот западным ученым Х. Патнэмом в связи с его так называемой *социолингвистической гипотезой*. Суть этой гипотезы состоит в том, что в каждом языковом коллективе имеется хотя бы несколько терминов, критерии определения которых известны только небольшому числу говорящих. Употребление данных терминов остальными людьми обусловлено их сотрудничеством с соответствующими специалистами.

Разъясняя смысл своей гипотезы, Патнэм указывает на тот факт, что мы вряд ли смогли бы пользоваться словами типа «вяз» или «алюминий», если бы никто не умел распознавать среди деревьев вязы и среди металлов алюминий. Однако просто распознавать не значит знать природу этих объектов.

Скажем, кто-то интересуется золотом как драгоценным металлом. Естественно, что этот некто должен овладеть словом «золото», чтобы не быть беспомощным в ювелирной лавке, где помимо золотых вещей имеются предметы из бронзы, меди, платины и т. д. Покупателю вовсе не обязательно владеть точным методом распознавания золота. Для этих целей есть специалисты-эксперты.

Как подчеркивает Патнэм, разделение языкового труда основывается на разделении неязыкового труда и предполагается им. Например, слово «вода» до появления химии вовсе не обнаруживало разделения языкового труда. В настоящее же время большинство образованных носителей языка хотя бы в теоретическом плане знают необходимое условие для идентификации воды, каковым является ее химическая формула H_2O. Однако правильную идентификацию воды сможет осуществить далеко не каждый. Для этого требуется наличие квалифицированных экспертов. Благодаря способам распознавания, которыми владеют они, данными способами владеет и весь коллектив в виде знания (мнения) о знании экспертов.

Мысли, высказанные Патнэмом, не новы. Еще в XIX столетии немецкий логик Х. Зигварт (1830 1904) отмечал, что в науке нас интересуют не слова, а термины. Так, знание названия какого-либо растения вовсе не гарантирует знания сути этого растения.

В науке, писал известный советский языковед А. А. Реформатский (1900 1978), язык не случайный ингредиент, а необходимый структурный элемент. Это означает, что язык входит в науку прежде всего терминологически. Чем наука точнее, тем больший вес в ее структуре получает язык и тем более важным становится вопрос о терминологии.

Понимая всю значимость этого вопроса, логики разделили термины на *единичные* (*сингулярные*), *общие* и *пустые*. Если термин обозначает один объект, он считается единичным. Общим он считается тогда, когда обозначает несколько объектов. Пустой термин это термин, который не обозначает ни одного объекта.

С помощью предикации (пропозициональной функции) осуществляется соединение единичного и общего терминов. Данная предикация схематически выражается так: *x есть F* (в традиционной логике это выглядит как *S есть P*). С помощью символов пропозициональной функции предикация записывается следующим образом: *F* (*x*).

Для того чтобы единичный термин использовался для обозначения индивидуального объекта, он должен определенным способом выделять данный объект из их совокупности. Как это делается?

Это делается посредством описания индивидуального объекта, благодаря чему указываются его отличительные свойства. Такое описание называется *дескриптивным* (англ. description *описание*). Другим способом является приписывание единичному объекту собственного имени. Собственное имя, в отличие от дескрипции, осуществляет прямое указание на объект.

Оператор дескрипции, или оператор описания (йота-оператор), обозначается чаще всего перевернутой и повернутой в противоположную сторону греческой буквой *i* (*йота*). Но в данном случае в целях удобства мы будем пользоваться большой латинской буквой D (первой буквой слова «description») и говорить не о йота-операторе, о дэ-операторе.

Дескриптивный способ представления сингулярных (единичных) терминов, основанный на использовании общих терминов, позволяет обойтись без собственных имен, включая не только собственные имена типа *Петр* или *Джон*, но и такие имена, как «вяз», «золото», «вода». Это особенно важно иметь в виду, когда мы указываем на объект, имя собственное которого нам по тем или иным причинам неизвестно (например: *вечерняя звезда и утренняя звезда; автор «Трех мушкетеров»; вещество, состоящее из двух атомов водорода и одного атома кислорода*). Дескрипция

позволяет нам оперативнее выявлять искомый объект и соответствующим образом его идентифицировать.

Следует знать, что сингулярные термины делятся на *определенные* и *неопределенные*. Определенные сингулярные термины указывают на конкретные объекты из их совокупности, тогда как неопределенные сингулярные термины указывают просто на представителя данного множества объектов, не подчеркивая его индивидуальность (например: *солдат, вишня* и т. д.).

В логике вместо неопределенных сингулярных терминов используют символы, называемые переменными. Что в таком случае может выражать форма D x ?

Данная форма читается так: *тот x, который* (например: *Тот x, который искал золото и был убит своим солдатом*).

Как связана сингулярная пропозициональная форма $F(x)$ с D-оператором?

Когда используется D-оператор, то некоторая сингулярная пропозициональная форма $F(x)$ принимает значение *истина* только для одного значения переменной x. Например, пусть x обозначает *князя*, а F *любит золото*. Тогда получаем: *князь любит золото*. Но любителей золота на этой грешной земле хватает, включая любителей из числа князей. Мы же должны выделить из них только одного человека голубых кровей, а именно того, который был убит подчиненным ему солдатом. В этом случае необходимо воспользоваться оператором дескрипции, и мы получим, скажем, форму Dx $F(x)$. Однако символ F указывает лишь на одно свойство x (*любит золото*). Поэтому возникает вопрос: кто именно тот любитель золота, который в нашем случае имеется в виду?

Для ответа на этот вопрос необходимо добавить указание еще на одно или несколько свойств (их конъюнкция), находящихся в знаково выраженной форме справа от D-оператора (например: $P(x)$, где P есть свойство «убит своим солдатом»). Теперь нашу дескрипцию можно записать так: $Dx\ (P(x)\ \&\ P(x))$. В этом случае нам легче догадаться, что речь идет о князе Отто Гроссенмаркском, персонаже рассказа Честертона «Волшебная сказка отца Брауна».

Почему в логике оператор дескрипции тесно связан с кванторами?

Когда что-либо описывается, то имеется в виду либо реально существующий объект (например, город Киев), либо объект, существующий только в нашем воображении (например, патер Браун, Шерлок Холмс, Мефистофель и т. п.). Следовательно, вопрос о критериях существования не может не волновать логиков, хотя и не в том смысле, в каком он волнует философов или богословов (например, доказательство бытия (существования) Бога). В чем заключается смысл проблемы существования в логике?

В работах 90-х гг. XIX в. основатель всемирно известной Львовско-Варшавской логико-философской школы Казимеж Твардовский (1866 1938), продолжая линию своего ближайшего предшественника, немецкого философа Франца Брентано (1838 1917), утверждал необходимость различать содержание целенаправленной (интенциональной) интеллектуальной деятельности и объект этой деятельности. Он доказывал, что содержание и объект интеллектуальной деятельности не тождественны. Например, если некто высказывает истинное суждение, отрицающее наличие объекта типа «вечный двигатель», он должен иметь хотя бы какое-то представление об этом объекте. Следовательно, на вполне законных основаниях некто вполне здравомыслящий может иметь представление даже о таких предметах, которые не существуют в действительности (например, *крылатый конь Пегас* или *кентавры*) и даже невообразимы (например, *круглый квадрат* или *золотая гора*). Это доказывает необходимость отличать содержание наших умственных представлений от так называемых интенциональных объектов, т. е. от объектов, имеющихся в виду, на которые сознательно или бессознательно ориентируется наш интеллект.

Усиливая свою логико-философскую (онтологическую) аргументацию, Твардовский указывает на то, что объекты нашего мышления имеют самые разные свойства и находятся в самых разных отношениях друг к другу. Скажем, реальная гора   это некоторая протяженная физическая вещь, тогда как идея горы не имеет пространственного и физического существования, если отвлечься от ее нервно-мозгового субстрата. Или: Пегас   это мифическая крылатый конь, но, будучи в здравом уме, мы знаем, что в действительности крылатых коней не существует. Что же касается нас, то в своем полете фантазии мы можем соединить свойства лошади и свойства птицы, получив в результате некий сборный образ   образ крылатого коня. Короче, Пегас   это фантастическое существо, тогда как идея Пегаса, не имея никакого вещественного характера,   отнюдь не фантазия, а реальный факт нашего воображения.

Когда Твардовский сравнивает свойства идей, как психических феноменов, со свойствами их объектов, он приходит к выводу, что несуществующие объекты (например, гоголевские упыри и тому подобная нечесть), равно как и существующие, обладают свойствами. Так, круглый квадрат является одновременно круглым и квадратным в каком-то возможно-невозможном мире.

Еще великий Лейбниц отмечал, что бытие присуще всему мыслимому. Существование же   это частный случай бытия, т. е. бытие не в мысли, а в действительности. Например, Пегас не имеет существования, но имеет бытие (мыслимое бытие), а следовательно, имеет и свою особую сущность. Сущности идеальных объектов типа Пегас или «вечный двигатель», будучи умственными конструктами, должны соответствовать только одному   требованиям идеального конструирования. Что это за требования?

С логической точки зрения идеальные объекты не должны содержать внутреннего противоречия. Истинность таких конструктивных объектов не зависит от случайных, фактических истин, она доказывается непротиворечивостью внутренней структуры подобных объектов, представленных в символической форме, в форме определенного языка.

В конце XIX начале XX столетия лейбницевские рассуждения по данному вопросу были воспроизведены Твардовским и австрийским философом, психологом Алексиусом фон Мейнонгом (1853 1920). Они разграничивали то, что слова *выражают*, и то, что они *замещают*. Выражаемое словом это некоторая идея. Замещаемое словом это некий внеязыковой объект (реальный или фантастический). Например, слово «Солнце» замещает Солнце как звезду. Но это же слово выражает идею Солнца. В последнем случае слово «Солнце» это знак идеи.

На основе таких теоретических допущений Мейнонг строит новый вариант учения о бытии как таковом (онтологию), где предикат существования (но не бытия) относится только к реально существующему. Но что есть реально существующее? Ведь во времена Аристотеля существование олимпийских богов было безусловным фактом для большинства греков.

Расширяя и модифицируя традиционную онтологию (учение о бытии), мы одновременно должны вводить более четкую градуировку уровней бытия, учитывая бытие сугубо мыслимых объектов, включая объекты логико-математического конструирования. В этом случае снимается запрет на использование термина «свойство» применительно к идеальным сущностям различных уровней абстрактности, но одновременно вводится запрет на использование термина «взаимодействие», который заменяется термином «отношение» («взаимоотношение»). Аналогичные преобразования могут быть проделаны и с понятием «истина», которое на логическом уровне допустимо рассматривать в качестве некоторой *логической ценности*, некоторого значимого для логики *абстрактного объекта*. Последнее звучит непривычно, так как, говоря об истине, мы имеем в виду идеальное отражение в сознании реального состояния дел. Но в данном случае мы сталкиваемся не с философскими рассуждениями об истине, а с некоторой логической конвенцией, которая позволяет отсекать все лишнее, препятствующее осуществлению логически корректных доказательств.

В свете этого нельзя согласиться с Б. Расселом, критиковавшим Мейнонга с эмпиристских позиций, с позиций преувеличенного доверия чувственному опыту. В частности, Рассел излишне категорично заявлял, что в логике, как и в зоологии, мы не имеем основания допустить существование единорога, т. е. логика также имеет отношение к реальному миру, хотя и в несколько более абстрактном смысле.

Я не согласен с Расселом и считаю, что Мейнонг отнюдь не пытался оспаривать связь логики с земными проблемами. Но вопрос заключается не в том, имеет ли логика отношение к реальному миру, а в том, каково это отношение.

Как видим, уже Лейбниц, а затем и многие другие философы и логики заметили, что понятия «существовать», «быть» и им подобные могут использоваться в различных значениях. Естественно, логики, оперирующие кванторами, не могли пройти мимо этого прелюбопытного факта. Они должны были закрепить за кванторами, особенно за квантором существования, одно и только одно логическое значение, полностью и ясно выразимое в определениях.

Что касается вопроса о кванторе существования, то этот вопрос должен быть разрешен посредством доказательства истинности логических формул с квантором существования. Непонятно?

Тогда скажу иначе: логиков не должен беспокоить вопрос о том, существуют ли на нашей или другой планете летающие очень низко крокодилы. Они озабочены другим, а именно: логические конструкции с квантором существования не должны быть противоречивыми. Так, если упыри, проблема существования которых остро волновала киевского философа Хому Брута, не противоречат нашим теоретическим допущениям и остаются в различных позициях логического языка именно упырями, не имея порочной наклонности стать домовыми или русалками, то они вполне устроят нас в качестве указательных местоимений. Такие местоимения должны указывать на повторение одинаковых мест в логическом тексте, точнее, должны указывать на одно и то же значение истинности (на один и тот же логический объект). Правда, жалко, что это будут уже не классические гоголевские упыри, а их призрачное подобие, не способное наводить на нас по ночам страх, ибо они попадают в полную и безоговорочную зависимость от кванторов. От прежней свободы и бескванторного существования остается лишь дым. То, что плохо для упырей, хорошо для нас. Приобретая власть над «логическими упырями», мы становимся воистину дьявольски всесильными. И всё же, всё же...

В естественном языке мы нередко встречаем такие выражения, которые ставят нас перед проблемой: является ли данное выражение обозначением чего-либо в действительности? Все философские споры на эту тему логики безжалостно пресекают. Они допускают только одно: существует (подчеркиваю *существует*) некоторое выделенное определенным образом (способ выделения зависит от логической системы) непустое множество, под которым понимается набор объектов с твердо фиксированным свойством или свойствами. Это множество (M) называется предметной областью, которую пробегает каждая из переменных наших пропозициональных функций, т. е. предметная область это объекты, допустимые в качестве значений переменных.

Рассмотрим набившее нам оскому умозаключение:

Посылка 1. *Все люди смертны.*
Посылка 2. *Сократ   человек.*
Вывод.   *Сократ смертен.*

Если M, включающее в себя такого индивидуума, как Сократ,   это множество людей, то вторая посылка совершенно излишня. К тому же если множество M всех объектов (людей) состоит именно из смертных объектов, то все наше умозаключение   простая банальность. Поэтому лучше мыслить M как множество всех живых существ, включая людей, различных биологических козявок и даже упырей.

Введем следующие обозначения: $Ч\ (x)$ вместо «x есть человек» $C\ (x)$ вместо «x смертен» и $ф$ вместо философа Сократа.

С учетом выбранных обозначений запишем наше умозаключение так:

$$\forall x\ (Ч\ (x) \to C\ (x))$$
$$Ч\ (ф)$$
$$C\ (ф)$$

Это умозаключение можно записать еще и так:

$$\forall x\ (Ч\ (x) \to C\ (x)),\quad Ч\ (ф) \models C\ (ф).$$

Требование, чтобы все объекты принадлежали некоторому непустому множеству M, не мешает нам говорить об элементах других множеств F_1, F_2, ..., F_n, среди которых вполне возможно есть и множество упырей. Для нас важно лишь то, что все множества F_1, F_2, ..., F_n должны содержаться в M как его подмножества. Тогда можно считать, что в случае нашего умозаключения мы имеем дело с тремя выделенными множествами, а именно: M = {*существа*}, $Ч$ = {*человеческие индивидуумы*} = {*те x из M, для которых* $Ч\ (x)$} = x’ $Ч\ (x)$, C = {*смертные*} = {*те x из M, для которых* $C\ (x)$} = x’ $C\ (x)$.

Данная символическая запись показывает, что для любого одноместного предиката [пропозициональной функции вида $F(x)$], чья свободная переменная пробегает всю предметную область M можно определить подмножество F множества M, элементы которого это именно те x, для которых форма $F(x)$ служит формой правильного высказывания. Символически это можно записать так: $F = x'\ F(x)$, где символ ' справа над x читается: *тех из М, для которых*.

Иначе говоря, если у нас уже введено некоторое подмножество C множества M, то мы можем определить предикат $F(x)$, полагая, что $F(x) \equiv x \in F$. Так, если множества $Ч$ (*человеческих индивидуумов*) и C (*смертные*) введены как подмножества множества M, то можно определить $Ч(x)$ и $C(x)$ как символические обозначения для $x \in Ч$ и $x \in C$.

Для чего потребовалось вновь возвращаться к умозаключению, в котором фигурирует имя *Сократ*? Ведь до этого речь шла о проблеме существования в логике.

Данное умозаключение потребовалось для освещения некоторых важных аспектов поставленной проблемы, касающихся понятий экстенсионала и интенсионала в логике.

Множество $F = x'\ F(x)$ можно назвать *экстенсионалом* (*объемом*) предиката $F(x)$ (англ. extension *объем, протяженность*). В данном случае под объемом понимается объем множества тех x, для которых верно $F(x)$. Предикат трактуется в логике как *интенсиональный объект* (англ. intension *смысл*; *намерение*; *то, что имеется в виду*), поскольку он определяет смысловое содержание (интенсионал) описываемого понятия. Экстенсиональным объектом является логическая функция, т. е. экстенсионал это *множество* (количественный аспект) объектов, которые имеет в виду предикат.

История логического разграничения экстенсионала и интенсионала восходит к аристотелевской теории абстракции. По Аристотелю, абстракция (гр. aphaeresis) означает изъятие или опущение некоторых составных частей нашего восприятия. Мы отвлекаемся (абстрагируемся) от всего случайного и приводим наши мысли к их истинной и постоянной форме. Так, например, математика зиждется на принципе абстракции, поскольку она рассматривает лишь необходимые формы без всякого отношения к материи, из которой состоят предметы.

Общие понятия образуются путем сравнения и отвлечения (абстрагирования). Сравнивая ряд каких-либо предметов, мы замечаем имеющиеся в них черты сходства и несходства (различия). Сходные черты фиксируются нами посредством соответствующих имен различной степени общности. Тем самым получается содержание понятия. Затем мы можем перейти от рассмотрения предметов, данных в непосредственном опыте, к анализу и сравнению самих понятий, образовывая еще более общие понятия.

В логике, начиная с Аристотеля, различают две стороны понятия   содержание (интенсионал) и объем (экстенсионал). Объем понятия   это *совокупность* предметов, к которым прилагается данное понятие. Содержание понятия   это *мыслимые признаки* предметов, т. е. те признаки, которые имеются в виду (предицируются). По мере увеличения объема понятия уменьшается его содержание и наоборот.

Большее по объему понятие называется родом по отношению к понятию меньшего объема (сравните *наука* и *математика*). То, что отличает данное понятие от других смежных и более или менее одинаковых по объему, называется видовым различием (сравните *физика* и *химия*).

Современные логики не любят иметь дело со словом «понятие», резонно считая, что традиционная трактовка понятия слишком обременена внелогическими характеристиками. Поэтому термины «экстенсионал» и «интенсионал» используются ими, с одной стороны, для того, чтобы придать языку логики более прочную связь с теоретико-множественными представлениями, а с другой стороны, чтобы выделять объекты данного множества, указывая на их свойства, которые имеются в виду пропозициональной функцией формы $F(x)$ (*x есть то-то и то-то*).


Б. БОЛЬЦАНО

И все-таки чем современные логики аргументируют свое отступничество?

Чешский математик и философ Б. Больцано (1781 1848), опережая свое время, утверждал, что логика не является наукой о мышлении, если под мышлением понимать процесс психических переживаний, которые имеют место в голове отдельного человека. Он предлагал рассматривать логику как *логику научного познания*, связывая ее с символическим языком науки.

Противопоставив свои взгляды психологизму в понимании идеальных объектов науки, Больцано столкнулся с необходимостью коренной перестройки учения об образовании понятий.

Чешский ученый различает не объем и содержание понятий, а их *смысловое содержание* и *предметную нацеленность* (*предмет*). В таком случае содержание это сумма частей, образующих внутренне взаимосвязанную целостность понятия, а предмет это то, на что нацелено понятие (то, что имеется в виду).

Рассмотрим вслед за Больцано два выражения: (1) *образованный сын необразованного отца* и (2) *необразованный сын образованного отца*. Выражения (1) и (2) имеют в виду совершенно разные предметы, но при этом обладают одним и тем же содержанием, так как, абстрагировавшись от связи слов в данных выражениях, мы будем иметь одинаковые по значению и количеству лексические единицы (два раза повторяются слова «образованный», «необразованный», «отец», «сын»). С этой точки зрения аристотелевский закон об обратной пропорциональности объема и содержания понятий оказывается более чем несостоятельным.

Так, например, объемы выражений «круглый шар» и «шар» совпадают, но содержание первого больше, чем второго, поскольку в первом выражении имеется дополнительное слово «круглый».

Как считают логики, Больцано правильно отрицает, что увеличение объема понятия всегда приводит к уменьшению его содержания.

Это один из любопытных доводов в пользу нового взгляда на понятие, ревизия традиционного учения о котором привела к возникновению такого раздела современной логики, как логика предикатов. А вот развитие этого довода, было предпринято Фреге.

Взгляд Фреге на понятие базируется на логическом анализе более крупных единиц, чем слово. Суть нового подхода заключается в отождествлении понятия и предложения (высказывания). Подчеркну, что в XX столетии предложение в качестве предмета логического рассмотрения стало считаться главным элементом языка теоретических наук.

Основная задача, стоявшая перед Фреге, заключалась в исследовании таких предложений, которые имеют место при математических обоснованиях. Посредством этого исследования немецкий ученый надеялся объяснить, каким образом значение каждого предложения указанного типа определяется его внутренней структурой.

Возможно ли это, и если да, то каким образом?

Фреге полагал, что это возможно благодаря использованию понятия «условия истинности», а именно: чтобы понять значение научного предложения, необходимо знать условия, при которых данное предложение является истинным или ложным.

Решая поставленную задачу и опираясь на понятия «условия истинности», «функция», «аргумент», он приходит к идее пропозициональной функции. Как мы помним, пропозициональная функция может стать высказыванием при условии (условии истинности), когда аргумент (переменная) приобретает значение *истина* или *ложь*.

Таким образом, для Фреге быть понятием означает быть некоторой пропозицией (высказыванием), обладающей значением *истина* или *ложь*. Структура этой пропозиции представляется как пропозициональная функция.

Круг замкнулся: начав с пропозициональной функции, мы снова к ней вернулись, обнаружив при этом, что такие понятия, как «пропозициональная функция», «предикат», «интенсиональный объект», «предложение», «высказывание» и собственно «понятие», являются различными выражениями одной и той же логической сущности. Плюс к этому было зафиксировано, что в случае логики предикатов пропозициональная функция (предикат) делается высказыванием (понятием), соответствующим логическим условиям истинности с помощью кванторов. Вот и ответ на вопрос о связи пропозициональной функции с кванторами, включая квантор существования. Для ответа на этот вопрос понадобилось совершить экскурс в художественную литературу, а также в историю логической науки и некоторых ее проблем.

Поскольку под исчислением предикатов в современной логике понимается исчисление пропозициональных функций, точнее было бы говорить о логике пропозициональных функций, а не о логике предикатов. Но традиция есть традиция, и я нарушать ее не буду.

Обратимся к связи предикатов с переменными. Логики утверждают, что предикат с одной переменной выражает свойство предмета. Например, *x есть грек*, *x есть простое число* и т. д. Однако предикат может выражать не только свойства, но и отношения. Такие предикаты являются пропозициональными функциями нескольких переменных.

Рассмотрим предложение «Паниковский любит жареных гусей». Это предложение, анализируемое средствами логики предикатов, можно рассматривать как выражение значения одной из трех пропозициональных функций, а именно: *x любит жареных гусей*; *Паниковский любит y*; *x любит y*. Здесь грамматическим сказуемым является выражение «любит жареных гусей». С логической точки зрения сказуемым является выражение «x любит жареных гусей». Выражения же «Паниковский любит y» и «x любит y» не являются грамматическими сказуемыми. Однако то, что не устраивает филологов, вполне устраивает логиков, холодному разуму которых безразлично, кто кого любит. Логики считают предикатами (логическими сказуемыми) всякую пропозициональную функцию с любым числом независимых переменных. Поэтому их интересует только вопрос о том, между каким числом объектов устанавливаются отношения. В связи с этим различаются двухместные, трехместные и т. д. отношения. В общем случае говорят о n-местных отношениях. Предикаты-свойства считаются частным случаем предикатов-отношений, т. е. предикат-свойство это одноместный предикат.

Таким образом, по числу мест предикаты делятся на одноместные и многоместные. В качестве предикатных переменных обычно используются заглавные латинские буквы ($A, B, C, \ldots$). Индивидные переменные обозначаются маленькими буквами латинского алфавита ($a, b, c, \ldots$).

Пусть, например, A множество членов семьи. Выразим родственные отношения предикатами в форме следующих выражений: x *отец* y; y *сын* x. Тогда предикат $R(x, y)$ может обозначать: x *отец* y; y *сын* x. Функция $R(x, y)$ после подстановки вместо x и y имен определенных людей принимает значение *истинно* или *ложно* в зависимости от того, являются ли указанные люди родственниками (членами множества A).

Как нам уже известно, одним из важных способов получения высказывания из пропозициональной функции является связывание свободных переменных с помощью кванторов. Например, из пропозициональной функции x *бравый солдат* с помощью квантора существования $\exists$ получается высказывание: $\exists x$ (x *бравый солдат*). Данное высказывание читается:

существует по крайней мере один индивидуум, для которого верно, что x бравый солдат.

Ниже мы увидим, что именно употребление кванторов делает логику предикатов значительно более богатой и интересной по сравнению с логикой высказываний.

Используя квантор существования, запишем более строго высказывание «Швейк бравый солдат».

Пусть $P(x)$ предикат *x есть бравый солдат.* Запишем следующую формулу с квантором существования: $\exists x\ P(x)$. Теперь определим значение этой формулы как истину, если существует элемент некоторой предметной области, для которого $P(x)$ истинно, и как ложь в противном случае. Тогда, если $P(x)$ определенная формула логики предикатов, то формула $\exists x\ P(x)$ также определена и от значения x не зависит. Почему не зависит?

Формула $\exists x\ P(x)$ читается: *существует такой x, что P от x.* Использование этой формулы позволяет утверждать, что $\exists x\ P(x)$ форма истинного высказывания для всех предикатов $P(x)$, кроме одного ложного. Дело в том, что в формулах вида $\exists x\ P(x)$ или $\forall x\ P(x)$ кванторы связывают переменную x, т. е., несмотря на то что в записях формул $\exists x\ P(x)$ или $\forall x\ P(x)$ встречается буква x, обозначающая переменную, обе эти формулы обозначают именно высказывания, а не пропозициональные функции. Следовательно, эти формулы от переменной x больше не зависят. Попадая в область действия квантора, данная переменная утрачивает свою прежнюю свободу и оказывается связанной (несвободной) переменной. Фактически связанная переменная не является переменной в собственном смысле слова. Ее присутствие в формуле необходимо лишь для того, чтобы указать, из какого предиката (пропозициональной функции) данное высказывание образовано. Значение этой псевдопеременной строго определено и уже никак не зависит от контекста, ибо, увы, такова доля всех «рабов» кванторов.

Из пропозициональной функции *x повар-оккультист* с помощью квантора всеобщности $\forall$ можно получить высказывание обо всех индивидуумах, знакомых с особым состоянием голодных духов и с трансмиграцией душ, а именно: $\forall x$ (*x повар-оккультист*).

Данное высказывание читается: *Все x обладают свойством быть поваром-оккультистом*. Запишем это высказывание так: $\forall x\ P\ (x)$. Эта формула читается: *Все x обладают свойством P* (*x*). Применительно к поварам-оккультистам, которые в армии считаются полковой достопримечательностью, наша формула расшифровывается так: *Все солдаты являются (в душе) поварами-оккультистами* (*обладают свойством быть поваром-оккультистом*). Всем критически мыслящим личностям понятно, что данное высказывание не соответствует действительности и, следовательно, является ложным.

Заменив квантор всеобщности на квантор существования, мы получим истинное высказывание типа: *Существует по крайней мере один индивидуум, для которого верно, что P от x*. Или: *Существует по крайней мере один индивидуум (солдат) по имени Юрайда, для которого верно, что: Юрайда повар-оккультист*.

С помощью квантора всеобщности выражается мысль о том, что каждый индивид определенной предметной области обладает общим для всех индивидов этой области свойством. Иначе говоря, общее высказывание это высказывание, которое констатирует, что каждый индивид данной предметной области обладает определенным свойством, общим для всех. Оно истинно только тогда, когда при любом наборе значений ее переменных из содержащейся в ней пропозициональной функции получается истинное высказывание.

Переводя это на теоретико-множественный язык, можно сказать: если некоторое множество состоит из конечного числа объектов, то высказывание об этих объектах по формуле $\forall x\ P\ (x)$ легко записывается в виде конъюнкции единичных (простых) высказываний. Так, пусть множество *M* состоит из пяти элементов (объектов): a_1, a_2, a_3, a_4, a_5. В этом случае высказывание вида $\forall x\ P\ (x)$ равносильно сложному высказыванию следующего вида:

$$P\ (a_1)\ \&\ P\ (a_2)\ \&\ P\ (a_3)\ \&\ P\ (a_4)\ \&\ P\ (a_5).$$

Несмотря на то, что квантор всеобщности можно использовать и относительно бесконечных множеств, в практических целях удобно представлять дело так, что квантор всеобщности является обобщением некоторого конечного числа единичных высказываний.

Подобно квантору всеобщности $\forall$, квантор существования $\exists$ также обобщает, но обобщает не операцию конъюнкции, а операцию дизъюнкции.

Пусть M уже известное нам конечное множество ($M = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$). Если M указанное конечное множество, то значение истинности высказывания $\exists x\ P\ (x)$ совпадает со значением истинности дизъюнкции всех единичных высказываний для всех a из M, т. е.

$$\exists x\ P\ (x) \equiv P\ (a_1) \vee P\ (a_2) \vee P\ (a_3) \vee P\ (a_4) \vee P\ (a_5).$$

В некоторых высказываниях могут встречаться оба типа кванторов. Например:

$$\forall x\ \exists y\ R\ (x,\ y) \quad (x \quad \text{учитель } y).$$

Если индивидная область это область людей, то данная запись может выражать следующее: «Каждый человек имеет учителя».

Хорошенько запомним, что кванторы связывают все находящиеся в области их действий переменные. Поэтому наличие кванторов позволяет легко и быстро определять, являются ли выражения логики предикатов высказываниями или пропозициональными функциями. Для этого требуется только проверить, находится ли каждая встречающаяся в пропозициональной функции переменная в области действия квантора. Как это осуществляется?

Пусть R (x, y)   некоторый двухместный предикат, определенный на некотором множестве M. Кванторы $\forall$ и $\exists$ можно применять к этому предикату как для переменной x, так и для переменной y, а именно: $\forall x\ R\ (x, y)$; $\exists y\ R\ (x, y)$; $\exists x\ R\ (x, y)$. Переменная, к которой применяется квантор, считается связанной, а другая переменная   свободной, но может быть и так, что обе переменные будут связанными (например: $\forall x\ \exists y\ R\ (x, y)$; $\forall x\ \exists y\ R\ (x, y)$).

Необходимо иметь в виду, что во всех случаях применения квантора по одной из переменных двухместного предиката вида R (x, y) происходит превращение этого предиката в одноместный, ибо одна переменная не включается в сферу действия квантора. Аналогичное имеет место и для других многоместных предикатов, т. е. применение квантора по всем, кроме одной, из переменных превращает n-местный предикат в (n 1)-местный.

Между кванторами $\forall$ и $\exists$ имеют место отношения, позволяющие сводить один квантор к другому. Например:

$$\neg\ \forall x\ P\ (x) \equiv \exists x \neg\ P\ (x);$$
$$\neg\ \exists x\ P\ (x) \equiv \forall x \neg\ P\ (x).$$

Когда речь заходит о свойствах и отношениях вообще, возникает потребность в расширении логики предикатов и ее символики. Это расширение заключается в том, что символы логики предикатов могут использоваться как переменные и связываться кванторами, т. е. символы, обозначающие свойства и отношения, могут выполнять роль переменных, вступающих в схватку с деспотичными кванторами. В соответствии с этим высказывание «Существуют свойства, присущие всем индивидам» может быть выражено формулой $\exists\ P\ \forall x\ P\ (x)$.

Для получения высказываний из пропозициональных функций, в которых имеются предикатные переменные, указывающие на свойства и отношения, необходимо придерживаться следующего правила:

высказывание получается из пропозициональной функции тогда и только тогда, когда все имеющиеся в ней свободные переменные, включая переменные для обозначения свойств и отношений, заменяются конкретными именами или связываются кванторами. При этом вместо предикатной переменной подставляются не имена собственные, а общие имена, которые могут отличать элементы одного класса от элементов другого класса или классов.

Выражения, в которых не только индивидные переменные, но и предикатные переменные связаны кванторами $\forall$ и $\exists$, относятся не к элементарной логике предикатов, а к логике предикатов второй ступени (порядка). К тому же логика предикатов второй ступени содержит предикаты предикатов, что увеличивает выразительные возможности логики предикатов. Что касается предикатов предикатов, то здесь имеется в виду следующее: свойства индивидов сами обладают некоторыми свойствами, находящимися в определенных отношениях друг с другом.

Таким образом, кроме свойств индивидов существуют также:

1) свойства свойств;
2) свойства отношений;
3) отношения между свойствами;
4) отношения между отношениями;
5) отношения между свойствами и отношениями.

Все это многообразие свойств и отношений охватывается расширенной логикой предикатов, т. е. логикой предикатов более высокой ступени. В частности, предикаты второй ступени (предикаты предикатов) отражают свойства, которые присущи свойствам индивидов. Данную иерархию можно продолжать сколько угодно, но логики обычно обходятся предикатами первой и второй ступеней.

Учтя эти характерные черты логики предикатов, перейдем к обсуждению применения операций логики высказываний к предикатам и начнем с простейшего случая одноместных предикатов.

Пусть M некоторое множество, на котором определяются предикаты. Назовем это множество *областью*. Каждому одноместному предикату вида $F(x)$ можно поставить в соответствие множество тех элементов a из области M, для которой $F(a)$ истинно. Обозначим это подмножество как N_F и проделаем обратную операцию, а именно: каждому множеству, содержащемуся в M, можно поставить в соответствие предикат $P(x)$, представляющий собой высказывание, истинное тогда и только тогда, когда $x \in N$. Предикат $P(x)$ принимает значение *истина* на N и значение *ложь* вне N. Следовательно, N есть N_P. Это соответствие между подмножествами множества M и одноместными предикатами, определенными на множестве M, взаимно однозначно.

Как известно, теоретико-множественной суммой ($N_1 \cup N_2$) двух множеств N_1 и N_2 называется множество, состоящее из всех элементов множества N_1, и всех элементов множества N_2. Теоретико-множественным произведением, или пересечением ($N_1 \cap N_2$), двух множеств N_1 и N_2 называется множество всех элементов, принадлежащих и множеству N_1 и множеству N_2.

Таким образом, булевы операции &, $\vee$, $\neg$ над одноместными предикатами соответствуют операциям над множест-вами. Эти операции называются *пересечением, объединением* и *дополнением* (рис. 17, 18, 19).

Пусть P и Q два подмножества множества M. Пересечение (произведение) $P \cap Q$ это множество всех объектов из M, которые принадлежат как P, так и Q. На рис. 17 заштриховано пересечение $P \cap Q$. Если P и Q не имеют общих элементов, говорят, что пересечение $P \cap Q$ пусто, или дает в результате пустое множество.

Объединением (суммой) $P \cup Q$ называется множество тех элементов, которые принадлежат по меньшей мере одному из множеств P, Q. На рис. 18 объединение $P \cup Q$ заштриховано. В данном случае под

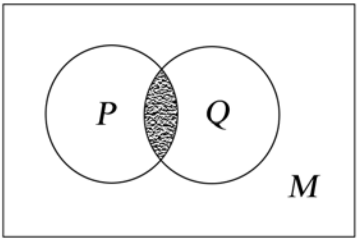


Рис. 17

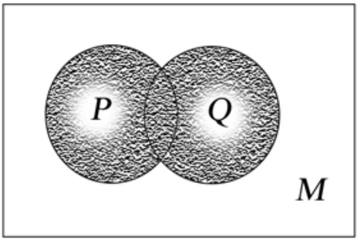


Рис. 18

объединением множеств понимается следующее: множество всех элементов универсального множества M принадлежит или множеству P, или множеству Q, или им обоим. Объединение множеств $P \cup Q$ можно читать так: *P или Q* ($P \vee Q$).

Под дополнением множества P понимается множество всех элементов из M, не принадлежащих множеству P. На рис. 19 дополнение множества P заштриховано.

Пусть $P(x) \equiv P_1(x) \vee P_2(x)$. Тогда $N_P = N_{P_1} \cup N_{P_2}$, т. е. N_P является теоретико-множественной суммой множеств N_{P_1} и N_{P_2}. В самом деле, если $x \in N_P$, то $P(x)$ истинно. Из этого вытекает, что $P_1(x)$ или $P_2(x)$ истинно. В первом случае $x \in N_{P_1}$, во втором случае $x \in N_{P_2}$. Следовательно, $x \in N_{P_1} \cup N_{P_2}$.

Аналогичным образом можно показать, что если $P(x) \equiv P_1(x) \mathbin{\&} P_2(x)$, то $N_P = N_{P_1} \cap N_{P_2}$.

Множество, отвечающее предикату $P(x)$, является дополнением к множеству, отвечающему предикату $P(x)$.

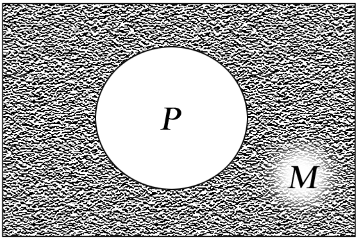


Рис. 19

В теоретико-множественных символах можно записать, что $N_P = DN_P$, где DN_P совокупность элементов области M, не принадлежащих N_P. Таким образом, DN_P это дополнение к множеству N_P.

Операции логики высказываний над многоместными предикатами определяются таким же образом.

Из сказанного следует: если законы логики высказываний имеют в виду выражения, которые при любом распределении значений истинности своих пропозициональных переменных принимают значение *истина*, то с некоторыми поправками аналогичные законы действуют и в логике предикатов. Что касается поправок, то в данном случае необходимо учитывать следующее: если превращение пропозициональной функции вида «*x обладает свойством P*» в истинное высказывание зависит прежде всего от выбранной индивидной области, то законы логики предикатов нужно искать в таких выражениях, которые не зависят от той или иной области индивидов в качестве значений переменных, но значимы для любых непустых областей. Дело в том, что логика предикатов занимается предикатами вообще, т. е. она интересуется структурой высказываний независимо от их конкретного смыслового содержания. Поэтому законы логики предикатов заявляют о себе в таких выражениях, которые не зависят от конкретных значений предикатных переменных, а верны для любых их значений.

Одним из таких законов является закон исключенного третьего (среднего). В символической записи этот закон выглядит так: $\forall x\ (F\ (x) \vee \neg\ F\ (x))$.

Немного отступая, замечу: в логике имеются две формулировки получения правильных умозаключений. Первая формулировка предстает в виде *правил вывода*, а вторая в виде *логических законов*.

Логические правила это своеобразные директивные предписания, базирующиеся на логических законах и позволяющие признавать правильными высказывания, образованные в результате вывода из истинных посылок.

Законами логики высказываний и предикатов называются *схемы построения истинных сложных высказываний*. Иначе говоря, *законы логики высказываний и предикатов это такие выражения, которым всегда соответствует истинное высказывание, какие бы подстановки значений мы ни делали вместо переменных*. Эти законы называются еще *теоремами*. К ним относятся:

1. Закон исключенного третьего: $p \vee \neg p$ (*p или не p*).
2. Закон непротиворечивости $\neg(p \ \& \ \neg p)$ (*неверно, что p и не p*).
3. Законы двойного отрицания: $\neg\neg p \rightarrow p$ (*если не не p, то p*).
4. Закон контрапозиции: $(p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$ (*если* (*если p, то q*), *то* (*если не q, то не p*)).
5. Законы, характеризующие конъюнкцию: $(p \ \& \ q) \rightarrow (q \ \& \ p)$ (*если* (*p и q*), *то* (*q и p*)).
6. Законы импликативных силлогизмов.
7. Законы, характеризующие дизъюнкцию. Например: $(p \vee q) \rightarrow (q \vee p)$ (*если* (*p или q*), *то* (*q или p*)).
8. Законы характеризующие эквиваленцию. Например: (*p* « *q*) $\rightarrow$ (*q* « *p*) (*если* (*p тогда и только тогда, когда q*), *то* (*q тогда и только тогда, когда p*).
9. Законы де Моргана.

Закон исключенного третьего не является законом, признаваемым всеми логиками. В начале XX в. некоторые из них (Л. Э. Я. Брауэр, Г. Вейль, А. Гейтинг) отвергли закон исключенного третьего как универсальный закон логики. Они отказались также от закона двойного отрицания в качестве универсального закона логики.

Традиционный для классической логики закон непротиворечивости мало кого интересует сегодня, так как из данного закона получается весьма скудное количество нетривиальных теорем. Иногда этот закон формулируется так: два противоречащих друг другу высказывания не могут быть одновременно истинными.

Что касается третируемого кое-кем из логиков закона двойного отрицания, о нем можно сказать следующее: если отрицать дважды некоторое высказывание, то в результате получается исходное высказывание, как будто никакого отрицания и не было. Так, говоря «Не является истинным, что философ Хома Брут не убивал ведьму», мы тем самым утверждаем: *Философ Хома Брут убил ведьму*. Отсюда получается общий закон логики: *если* (*неверно, что* (*неверно, что* *p*)), *то p*. Или: если (*не* (*не p*)), *то p*.

Законом является и обратное выражение: *если p, то* (*не* (*не p*)).

Проиллюстрирую последний закон следующим высказыванием: *Если* (*Шура Балаганов имеет в правом кармане дырку*), *то* (*неверно, что* (*он не* (*имеет в правом кармане дырку*))). Истинной является также обратная импликация, а именно: *Если* (*неверно, что* (*Шура Балаганов не* (*имеет в правом кармане дырку*))), *то* (*он имеет в правом кармане дырку*).

Предупреждаю, что подстановка в логические схемы (формулы) каких-либо конкретных значений из обыденной речи зачастую звучит по-русски очень искусственно и даже режет слух, но логиков это не пугает, тем более что с такими подстановками они почти не имеют дело.

Одним из интересных законов логики является закон контрапозиции, который можно выразить так: *если* (*если p, то q*), *то* (*если* (*не q*), *то* (*не p*)).

Конкретизирую этот закон на следующем примере. Допустим, Остап Бендер обещал Лоханкину, что если будет иметь время, то заплатит за комнату. Если Бендер держит свое слово, но не платит Лоханкину, то отсюда мы заключаем: у Бендера не было времени навестить Лоханкина.

Рассуждая примерно таким образом, мы признаем истинным следующее условное высказывание: *Если верно, что* (*если* (*у Бендера будет время*), *то* (*Бендер навестит Лоханкина*)), *то* (*если* (*Бендер не навестил Лоханкина*), *то это означает, что* (*у Бендера не было времени*)).

Данное предложение содержит обороты «верно, что» и «это означает, что». Формы этих оборотов в нашем случае не играют принципиальной роли. Поэтому можно считать, что оборот «верно, что если p, то q» означает то же самое, что «если p, то q». Из этого следует, что в нашем случае легко можно избавиться от громоздких грамматических конструкций типа:

если (*если* (*у Бендера будет время*)
то (*Бендер навестит Лоханкина*)),
то (*если* (*Бендер не навестил Лоханкина*),
то (*у Бендера не было времени*)).

Отрицание всего высказывания зачастую можно рассматривать как отрицание внутри высказывания. Например, высказывание «Неверно, что Бендер навестит Лоханкина» означает то же, что и «Бендер не навестит Лоханкина».

На законе контрапозиции основано так называемое косвенное доказательство, или *reductio ad absurdum*, т. е. вместо того, чтобы доказывать $p \to q$, мы можем доказать $\neg\, q \to \neg\, p$.

Формально закон контрапозиции записывается так:

$$\frac{p \to q}{\neg\, q \to \neg\, p}.$$

Говоря о законах, характеризующих конъюнкцию, будем иметь в виду, что конъюнкция *перестановочна* (*коммутативна*; лат. commutatio   *перемена*), поскольку ее члены можно менять местами. При этом принимается следующая логическая теорема:

если (*p и q*), *то* (*q и p*).

Например:

если ((*Федор Никитич Хворобьев заядлый монархист*) *и* (*Волга впадает в Каспийское море*)), *то* ((*Волга впадает в Каспийское море*) *и* (*Федор Никитич Хворобьев заядлый монархист*)).

Имея истинную конъюнкцию, мы можем признать истинным любой из ее членов. Например:

если (*p и q*), *то p*;
если (*p и q*), *то q*.

Примем также теорему, согласно которой, признавая истинными два высказывания, мы признаем истинной их конъюнкцию, а именно:

Если p, то (*если q, то* (*p и q*)).

Импликация играет важную роль в наших умозаключениях. Как уже ранее отмечалось, большинство научных законов имеют вид импликаций. Характерно и то, что многие принимаемые решения, включая, увы, и безответственные, выражаются в виде импликаций.

Импликации могут быть как посылками умозаключений, так и заключениями. Поэтому в логических рассуждениях придается большое значение таким теоремам логики, которые позволяют из двух посылок, являющихся импликациями, делать некоторые выводы, также являющиеся импликациями. Подобные теоремы называются *импликативными силлогизмами.*

Признавая в качестве двух посылок два импликативных высказывания с одним и тем же условием истинности, мы в качестве заключения получаем импликацию (импликативное высказывание) с тем же самым условием истинности, и, кроме того, консеквент данной импликации будет представлять собой конъюнкцию консеквентов обеих посылок. Соответственно, в качестве теоремы логики нами признается следующее выражение:

если ((*если p, то q*) *и* (*если p, то r*)),
то (*если p, то* (*q и r*)).

Или:

$$\frac{\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ p \rightarrow r \end{array}}{p \rightarrow (q \;\&\; r)}.$$

Еще одной важной теоремой логики этой группы теорем является такое выражение:

если ((*если p, то q*) *и* (*если r, то s*)),
то (*если* (*p и r*), *то* (*q и s*)).

Или:

$$\frac{\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ r \rightarrow s \end{array}}{(p \;\&\; r) \rightarrow (q \;\&\; s)}.$$

Важнейшей из теорем для импликативных силлогизмов является следующая теорема:

если ((*если p, то q*) *и* (*если q, то r*)),
то (*если* (*p, то r*)).

Или:

$$\frac{\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ q \rightarrow r \end{array}}{p \rightarrow r}.$$

Этот закон выражает свойство транзитивности условного высказывания.

В математике *транзитивность* (лат. transitus *переход*) это свойство величин, состоящее в том, что если первая величина сравнима со второй, а вторая с третьей, то первая сравнима с третьей. Например: если $a = b$ и $b = c$, то $a = c$.

Нельзя не сказать еще об одной важной логической теореме, связанной с импликативными силлогизмами, а именно:

если ((*если p, то q*) *и* (*если r, то q*)),
то (*если* (*p или r*), *то q*).

Или:

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ r \rightarrow q \\ \hline (p \vee r) \rightarrow q \end{array}.$$

Логики говорят, что дизъюнкция является *коммутативной* (*перестановочной*). Например, если кто-то утверждает, что «Паниковский отпетый гусекрад или Паниковский терпеть не может гусиного мяса», то в равной мере справедливо утверждение: «Паниковский терпеть не может гусиного мяса или Паниковский отпетый гусекрад». В данном случае мы переходим от одного высказывания к другому на основании теоремы:

если (*p или q*), *то* (*q или p*).

Или:

$$(p \vee q) \rightarrow (q \vee p).$$

Ценной теоремой, характеризующей дизъюнкцию, является следующая теорема:

если (*p или q*), *то (если не p, то q*).

Или:

$$(p \lor q) \to (\neg p \to q).$$

Как и дизъюнкция, эквиваленция является *коммутативной.* Например:

если (*p тогда и только тогда, когда q*), *то* (*q тогда и только тогда, когда p*).

Или:

$$(p \leftrightarrow q) \to (q \leftrightarrow p).$$

Главными теоремами, характеризующими эквиваленцию, являются следующие теоремы:

если (*p тогда и только тогда, когда q*),
то (*если p, то q*).

Или:

$$(p \leftrightarrow q) \to (p \leftrightarrow q);$$

если (*p тогда и только тогда, когда q*),
то (*если q, то p*).

Или:

$$(p \leftrightarrow q) \to (q \to p).$$

В связи с теоремами эквиваленции желательно отметить, что в математике и в математической логике часто приходится иметь дело с отношениями, выражающими то или иное сходство между рассматриваемыми объектами. В математике таковыми объектами являются, например, подобные геометрические фигуры, а в логике эквивалентные высказывания. Эти отношения подобия называются *отношениями эквивалентности.* Их нельзя смешивать с отношением эквиваленции в логике.

Отношениям эквивалентности присущи следующие свойства:

1. Свойство **рефлексивности**: *каждый предмет эквивалентен самому себе* ($x = x$).
2. Свойство **симметричности**: *если x эквивалентен y, то y эквивалентен x* ($(x = y) \to (y = x)$).
3. Свойство **транзитивности**: *если x эквивалентен y, а y эквивалентен z, то x эквивалентен z* ($((x = y) \,\&\, (y = z)) \to (x = z)$).

Указанное отношение эквивалентности может быть выражено формулами логики предикатов. Для этого надо записать в виде аксиом рефлексивность, симметричность и транзитивность. Я этого делать здесь не буду, чтобы не отягощать память читателя ненужными подробностями. Если читатель захочет, он сможет самостоятельно разобраться в этом вопросе. Это не так уж и сложно. Я же предлагаю ему для необязательного знакомства готовые результаты, характеризующие рефлексивность, симметричность и транзитивность эквиваленции, а именно:

1. Рефлексивность:

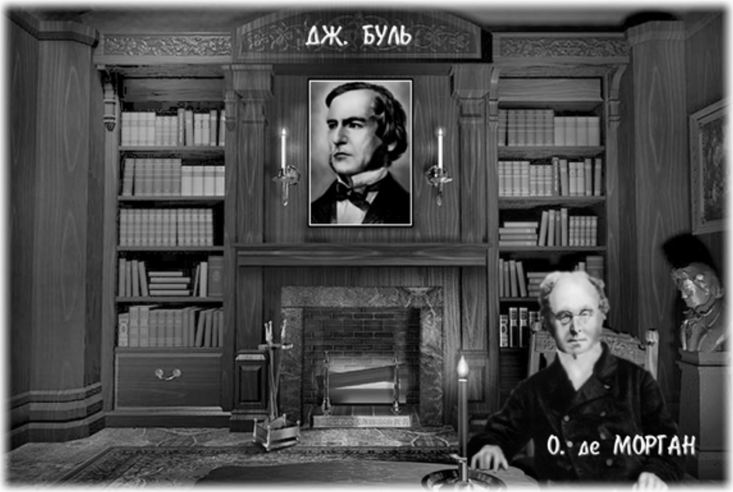
$$p \leftrightarrow p;$$
$$(p \,\&\, p) \leftrightarrow p;$$
$$(p \vee q) \leftrightarrow p;$$
$$(p \,\&\, (p \vee q)) \leftrightarrow p;$$
$$(p \vee (p \,\&\, q)) \leftrightarrow p.$$

2. Симметричность:

$$(p \,\&\, q) \leftrightarrow (q \,\&\, p);$$
$$(p \vee q) \leftrightarrow (q \vee p);$$
$$(p \,\&\, (q \vee z)) \leftrightarrow ((p \,\&\, q) \vee (p \,\&\, z));$$
$$(p \vee (q \,\&\, z)) \leftrightarrow ((p \vee q) \,\&\, (p \vee z)).$$

3. Транзитивность:

$$((p \,\&\, q) \,\&\, z)) \leftrightarrow (p \,\&\, (q \,\&\, z));$$
$$((p \vee q) \vee z)) \leftrightarrow (p \vee (q \vee z)).$$



Видное место в группе логических законов (теорем) занимают законы де Моргана. К ним относятся:

(*Не* (*p либо q*)) *тогда и только тогда*,
когда ((*не p*) *и* (*не q*)).

Или: $\neg\ (p \vee q) \leftrightarrow (\neg\ p\ \&\ \neg\ q)$.

(*Не* (*p и q*)) *тогда и только тогда, когда* ((*не p*)
или (*не q*)).

Или: $\neg\ (p \vee q) \leftrightarrow (\neg\ p \vee \neg\ q)$.

В теоретико-множественном плане это выглядит так:

$\neg\ (A \cap B) = \neg\ A \cap \neg\ B$;
$\neg\ (A \cup B) = \neg\ A \cup \neg\ B$.

Огастес де Морган (Morgan, 27 июня 1806, Мадура, Индия 18 марта, 1871, Лондон, Англия) шотландский математик и логик, сделавший большой вклад в логическую науку (сформулировал законы математической логики, названные его именем, а также заложил основы логики отношений). Учился в Кембридже (Trinity College). В 1828 г. стал профессором математики в Лондонском университете (University College in London), где, за исключением пятилетнего периода (1831 1836), преподавал до 1866 г. В 1866 г. принял участие в создании Лондонского Математического Общества (London Mathematical Society) и стал его первым президентом.

Все указанные выше законы с успехом работают в логике высказываний и предикатов. Поэтому пусть читатель не смущается тем, что символическая запись этих законов дана на языке логики высказываний.

Из общезначимых импликаций и эквиваленций логики высказываний и предикатов можно получить правила умозаключения. Например, из закона логики предикатов $\forall x\ F(x) \to F(y)$ получается следующее правило умозаключения:

$$\begin{array}{l} \forall x\ F(x) \\ F(y) \end{array}.$$

Или:

$$\forall x\ F(x) \models F(y).$$

Из $F(y) \to \exists x\ F(x)$ получается такое правило умозаключения:

$$\begin{array}{l} F(y) \\ \exists x\ F(x) \end{array}.$$

Или:

$$F(y) \models \exists x\ F(x).$$

Согласно этому правилу, «если определенный индивид обладает каким-либо свойством, то можно заключить, что имеется по крайней мере один индивид, обладающий этим свойством.

В отличие от логических законов, которые требуют, чтобы заключение было всегда истинным, логические правила менее жестки, хотя и директивны в каком-то смысле. Логические правила предоставляют нам возможность признавать истинными новые высказывания в зависимости от того, какой вид имеют высказывания-посылки, уже признанные истинными.

Одним из основных правил умозаключения является уже знакомое нам правило *правило отделения* (modus ponens), говорящее о том, что умозаключение правильно, если из двух истинных посылок мы получаем истинное заключение. Более строго это правило звучит так: *если истинна некоторая импликация и истинно ее условие, то должно быть истинным и ее заключение.* Рассмотрим следующий пример:

Посылка 1. *Если Корейко вор, то его миллионы ворованные.*
Посылка 2. *Корейко вор.*
Вывод. *Миллионы Корейко ворованные.*

Или:

$$\frac{\begin{array}{l} p \to q \\ p \end{array}}{q}.$$

Данное правило является схемой правильного умозаключения в том смысле, что, подставляя в эту схему вместо букв p и q конкретные высказывания, мы получим в результате правильное заключение, т. е. правильность нашего умозаключения с логической точки зрения состоит в том, что мы принимаем во внимание только вид участвующих в нем посылок, отвлекаясь от их содержания.

Возвращаясь к вопросу об общезначимости эквиваленций, следует отметить, что эквиваленция логики предикатов, как и в логике высказываний, только тогда будет общезначимой, когда значения истинности ее обоих членов при одинаковых значениях их переменных совпадают, а именно:

$$\forall x\ F(x) \quad \leftrightarrow \quad \neg\, \exists x\ F(x);$$

$$\frac{\forall x\ F(x)}{\exists x\ F(x)} \quad \leftrightarrow \quad \frac{\neg\, \exists x\ F(x)}{\forall x\ F(x)}.$$

Или:

$$(\forall x\ F(x)\ \models \exists x\ F(x)) \leftrightarrow (\exists x\ F(x)\ \models \forall x\ F(x)).$$

Необходимо иметь в виду, что в логике предикатов не существует такого простого способа разрешения умозаключений, как таблицы истинности в логике высказываний. Более того, вообще не существует способа, который можно было бы смело использовать для разрешения любых выражений логики предикатов. Обычно разрешаемое выражение пытаются свести к выражению логики высказываний.

Одна из интересных проблем логики предикатов проблема аксиоматизации, которая упирается в проблему разрешимости. Данная проблема заключается в нахождении способа, с помощью которого конечным числом шагов можно решить, является ли логическое выражение общезначимым, выполнимым или противоречивым. Один из видов разрешающей процедуры в логике высказываний это таблицы (матрицы) истинности. Что касается логики предикатов, то, как уже было сказано, разрешающей процедуры для всей области логики предикатов, увы, не существует.

Если для какой-то области логических построений не существует разрешающей процедуры, то обычно пытаются решить, являются ли данные выражения общезначимыми. При этом учитывается, что каждое выражение, полученное из общезначимого выражения, само общезначимо. Таким образом, если из общезначимых выражений удается получить разрешаемое выражение посредством соответствующих преобразований, следуя правилам вывода, то с полным правом считается, что найдено индивидуальное доказательство для данного выражения. Однако на практике найти индивидуальное доказательство для какого-либо выражения часто бывает очень и очень трудно. Дело в том, что в случае индивидуального доказательства многое зависит от человеческого фактора, т. е. от профессионального опыта, интуиции и, естественно, от соблюдения некоторых общих указаний.

Разобравшись немного в области предикатов, попробуем с помощью ее инструментария набросать эскизно теорию упырей.

Если кто-то кое-где у нас порой сомневается в духе киевского философа Хомы Брута в существовании упырей и досаждает своими нудными вопросами окружающим, посоветуем ему сначала погрузить множество упырей в болото всяческой чертовщины, точнее, в некоторую совокупность (множество) дьявольщины, относительно которой наш скептик уверен, что она, эта самая совокупность, непуста. Такое вполне возможно, ибо даже самый отпетый скептик не любит, когда черная кошка перебегает ему дорогу.

Для построения элегантной теории упырей нам понадобятся некоторые понятия из области исчисления предикатов с равенством. Даже если предполагаемая теория не будет построена, эти понятия нам всегда пригодятся.

Сведущие люди говорят, что упыри внешне ничем не отличаются от людей. Обозначим упыря буквой y, а человека (некоего мистера Икс) буквой x. Их внешнее сходство будем обозначать буквой P (*подобие*).

Если $x = y$, то, воспользовавшись одноместным предикатом P, это равенство можно определить так: $(x = y) \equiv \{$для всякого P имеет место $P\,(x) \leftrightarrow P\,(y)\}$. Последнее означает, что выражения $P\,(x)$ и $P\,(y)$ являются формой одного и того же высказывания относительно некоторого множества M, состоящего из людей и упырей.

Если же мы допустим, что x и y различные элементы из M, то, следовательно, должны быть какие-то предикаты, которые их отличают, т. е. предикаты должны быть такие, что $P\ (x)$ истинно, когда $P\ (y)$ ложно, и наоборот. Короче, $P\ (x) \leftrightarrow P\ (y)$ будет иметь место не при любом P.

Когда-то Лейбниц изрядно покорпел над проблемой тождества, частным случаем которой является математическое равенство, и пришел к такому любопытному выводу: «Полагать две вещи неразличимыми означает полагать одну и ту же вещь под двумя именами». Например, попробуйте догадаться, о ком идет речь, когда говорят «победитель при Йене» и «побежденный при Ватерлоо». Знаток истории сразу скажет, что речь идет о Наполеоне. Еще один вопрос: что имеется в виду, когда говорят «утренняя звезда» и «вечерняя звезда»? Несколько веков назад на этот вопрос трудно было ответить. Сегодня каждый школьник знает, что речь идет о планете Венера.

Таким образом, если нельзя указать никакого свойства F, по отношению к которому x и y различны, то x и y тождественны. Будем иметь в виду, что данное определение применимо только в логике предикатов второй ступени.

Теперь вернемся к нашим баранам, вернее, к упырям. Жизненный контекст, или просто контекст, в котором фигурируют внешне неразличимые люди и упыри, вследствие чего логики считают законной замену x на y, назовем экстенсиональным, а контекст, где такая замена незаконна, назовем интенсиональным. В связи с этим рассмотрим следующее рассуждение.

Пусть n число планет Солнечной системы. Хома Брут не знал, что $n > 8$, так как девятая планета была открыта только в 1930 г. Значит, Хома не знал, что $9 > 8$. Чепуха какая-то получается, не так ли?

Да, получается чепуха, но только в том случае, если не учитывать, что истинностное значение фразы «Хома не знал, что $\quad > 8$» (черточка в данной фразе означает пропуск выражения) зависит не от буквального ее понимания, а от подразумеваемого смысла соответствующих выражений. Ведь речь идет не просто о числах, а о числе планет Солнечной системы. Поэтому замена n

на 9 на основании равенства $n = 9$ во фразе «Хома не знал, что $n > 8$» является в этом интенсиональном контексте незаконной. Отсюда следует, что в интенсиональных контекстах замена равного равным не всегда дает ожидаемый эффект, т. е. в подобных контекстах требуется принимать во внимание не только истинностное значение высказывания, но еще что-то такое, что не учитывается в экстенсиональном контексте.

Наличие неэкстенсиональных контекстов подчеркивает разницу между равенством и отношением эквивалентности (эквиваленции). Дело в том, что если мы попытаемся учесть неучтенное, то нам придется изрядно повозиться с элементами экстенсионального множества M. В результате мы получим новое множество M'. В новом множестве мы уже будем иметь дело не с равенством, как в случае с M, а с отношением эквивалентности. Например, если строить множество M как множество планет Солнечной системы, известное Хоме, а не как универсум вещественных чисел, то $n = 9$ не будет истинным, так как n и 9 это различные мыслимые предметы. Такие поправки и дополнения восстанавливают пошатнувшийся статус экстенсиональности, но одновременно намекают на то, что логика предикатов с равенством должна быть существенно расширена и обогащена за счет исследования неэкстенсиональных контекстов, о чем речь пойдет в следующем разделе. Здесь же мне приходится с печалью в голосе констатировать: элегантной теории упырей пока не получается, ибо упыри, превратившись в вероятностных драконов, стрелой умчались в новый раздел. В погоню за ними!

УПРАЖНЕНИЯ

1. Чем отличается логика предикатов от логики высказываний?

2. Каковы основные составляющие элементарной логики?

3. Почему современные логики не любят термин «суждение»? Что понимается под предикатом в символической логике?

4. Для чего используется D-оператор (оператор дескрипции)?

6. Какими должны быть логические конструкции с квантором существования?

7. Что делают кванторы с переменными?

8. Каким общим законам подчиняются логика высказываний и логика предикатов?

9. Укажите, какими кванторами и какие вхождения переменных связаны:

$\forall x\ \exists y\ ((F(x,\ y)\ \&\ \forall x\ P\ (x,\ z))\ \to\ R\ (x));$
$\forall x\ \exists y\ ((F\ (x,\ y)\ \&\ \forall y\ P\ (y,\ x))\ \to\ R\ (x));$
$\exists x\ \forall y\ ((F\ (x,\ y)\ \vee\ \forall x\ P\ (y,\ x,\ z));$
$\exists x\ \forall y\ ((F\ (x,\ y)\ \exists\ \forall x\ P\ (y,\ x,\ z)).$

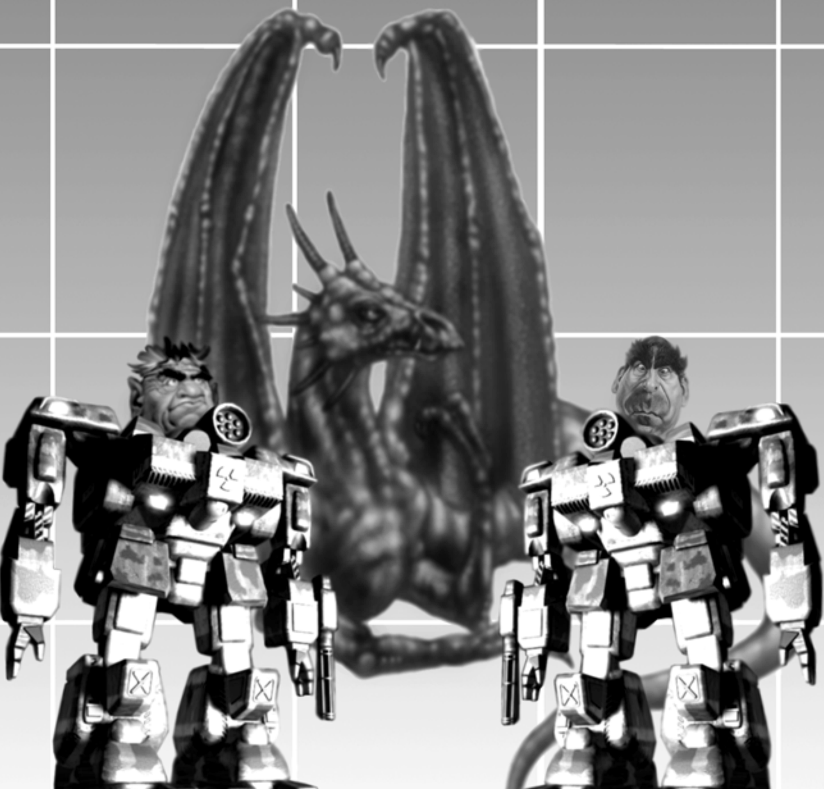
10. Переведите указанные ниже выражение на язык логических символов.

Любой радикал является сторонником общественного прогресса.
Иные консерваторы недолюбливают всех сторонников общественного прогресса.
Значит, иные консерваторы недолюбливают всех радикалов.

(*С. Клини*)

5

НЕВЕРОЯТНЫЕ ПУТЕШЕСТВИЯ ПО ВОЗМОЖНЫМ МИРАМ



ГЛАВА 5
НЕВЕРОЯТНЫЕ ПУТЕШЕСТВИЯ ПО ВОЗМОЖНЫМ МИРАМ

О лягающихся виртуальных драконах и логическом законе исключенного третьего. Л. Э. Я. Брауэр бросает вызов Д. Гильберту. Развитие идей математического конструктивизма. Конструктивистская логика. Нечеткое в четком. Продолжение следует, или еще раз о рассказке патера Брауна. Нечеткая логика не причуда, а полезный инструмент познания. Проблемы и разделы модальной логики. Людвиг Витгенштейн и его вклад в развитие логико-философской науки XX века. Из истории термина «семантика». Готлоб Фреге профессор математики. Гениальный Лейбниц и его воззрения на логику. Логическая семантика: её проблемы и понятия. Упражнения.

Я согласен с польским писателем-фантастом Станиславом Лемом, что драконов не существует. Эта примитивная конструкция может удовлетворить лишь ум простака, но отнюдь не ученого. Всякий уважающий себя ученый муж предпочитает не иметь дело с тем, что существует, ибо банальность бытия установлена слишком давно и не заслуживает более ни единого словечка. А как же быть с драконами?

Вопрос не так прост, как может показаться. Банальным бывает не только существование, но и несуществование. Примитивное несуществование никого не волнует. Однако великие открытия порой таятся в самом очевидном. Подтверждением тому служит гений одного профессора, атаковавшего проблему драконов методами точных наук, в результате чего было установлено, что имеется три типа драконов: нулевые, мнимые и отрицательные. Все они существуют со знаком минус, но каждый не существует на свой особый манер. Так, мнимые и нулевые драконы не существуют значительно менее интересным способом, чем отрицательные.

Огромной заслугой знаменитых киберроботов Трурля и Клапауция было создание вероятностной драконологии, из которой с железной необходимостью вытекало, что с точки зрения термодинамики дракон невозможен лишь в статистическом смысле, подобно домовому, эльфу, гному или ведьме. Из формулы полной драконьей невероятности следовало, что самопроизвольное появление дракона ожидаемо в среднем однин раз в интервале около бесконечности лет.

Трурль решил бросить вызов чистым теоретикам и взялся за экспериментальную проверку задачи. Поскольку речь шла о невероятных явлениях, он изобрел усилитель вероятности и испытал его сначала у себя дома, в погребе, а затем на специальном академическом Драконородном Полигоне.

Первые эксперименты привели к тяжелой контузии   виртуальный дракон лягнул конструктора. К счастью, Клапауций, помогавший налаживать установку, успел понизить вероятность, и дракон исчез.

Вслед за Трурлем многие ученые мужи повторяли эти эксперименты, но, поскольку им недоставало сноровки и хладнокровия, значительная часть драконов вырвалась на свободу. Когда на них устраивали охоту, они ускользали из реального пространства в конфигурационное.

Вскоре многие слои населения начали страдать от драконов, которые вытаптыванием посевов, ревом и испусканием пламени наносили огромный ущерб народному хозяйству, а кое-где даже требовали дани в виде смазливеньких девиц. Стоит ли удивляться тому, что широкие слои трудящихся вместо высокой оценки достижений Трурля, совершившего подлинный переворот в науке, поставили это ему в вину, а кучка заядлых обскурантов даже чувствительно побила знаменитого конструктора. Однако Трурль вместе со своим другом Клапауцием неутомимо продолжали исследования, пока не решили отправиться на отстрел

драконов, чье распространение приобрело характер космической катастрофы.

Разумеется, их сафари увенчалось успехом. Перипетии этой космической прогулки довольно подробно изложены Станиславом Лемом в «Кибериаде». Поэтому я не стану повторяться. В теоретическом плане дескрипция этой части сюжета меня мало интересует. Гораздо важнее то, что мой коллега Трурль добился потрясающих успехов, пойдя на нарушение закона исключенного третьего (среднего), гласящего, что либо *А*, либо *не А*, т. е. либо драконы существуют, либо оные не существуют. Трурль же созданием своего усилителя вероятности убедительно опроверг эту ретроградную точку зрения. Попробую проследить логику его рассуждений на примере одной прелюбопытной полемики.

Первая мировая война устало близилась к концу. Из окопов в университетские аудитории начали возвращаться рано состарившиеся молодые люди. Звенящая тишина залов научных библиотек и уютных кабинетов была для них чем-то совершенно непривычным и давным-давно забытым. Взрывов здесь не должно было быть. И вдруг взрыв! «Террористом» оказался молодой голландский математик Лёйтзен Эгберт Ян Брауэр (1881 1966), высказавший сомнение в том, что законы классической логики имеют абсолютную истинность. Более того, им была предложена дерзкая программа, призванная вернуть математикам уверенность и покончить с кризисом основания математического знания, вызванного открытием парадоксов в теории множеств. Новая программа получила несколько неудачное название *интуиционизма*.

Будущий математик родился в пригороде Роттердама (Нидерланды) 27 февраля 1881 г. Пройдя ряд жизненных ступенек и став преподавателем, читал лекции в Амстердамском университете. Кстати, двери в этот университет ему помогло открыть теплое рекомендательное письмо Давида Гильберта.

Брауэр сделал большой вклад в математическую теорию топологии. Особенно интенсивно разработкой этой теории он занимался в период с 1909 по 1913 г. Тем не менее лекции по топологии никогда им не читались, поскольку позднее Брауэр счел, что данная теория противоречит его интуиционистской философии.

Со студентами Брауэр был не ласков. Не терпел вопросов из аудитории, предпочитая общаться только с доской, испещренной формулами. У каждого свои причуды.

Голландский ученый, уже успевший внести значительный вклад в математику, был убежден, что в основе математики лежат не логические конструкции, столь превозносимые Давидом Гильбертом, а интуиция, делающая математические понятия и выводы непосредственно ясными.

Неужели нас зовут вернуться к тем временам, которые предшествовали К. Ф. Гауссу и Н. И. Лобачевскому?

Казалось бы, что в свете идей неевклидовой геометрии и бурного расцвета математической логики интуиционизм уже не может быть воскрешен в математике. И тем не менее он воскрес, но в совершенно новом виде. Правда, со временем оказалось, что слово «интуиция» и связанный с ним термин «интуиционизм» не являются позитивными указателями нового направления развития математической мысли. Но в конце концов чем они хуже гильбертовских «пивных кружек», если дело сделано и работа уже кипит? Результаты этой работы налицо: Брауэр решительно крушит ставшие традиционными представления о логике и ее связях с математикой. Своим интуиционистским «молотом» он беспощадно колошматит логический закон исключенного третьего.

Со времен античности считалось, что процесс познания должен завершаться утверждением или отрицанием относительно изучаемой предметной области, т. е. истинным должно оказаться одно из двух противоположных суждений ($p \vee \neg p$). Брауэр же настаивает на том, что существует и третья возможность познания Истины.

Следуя его логике рассуждений, рассмотрим следующий пример. Пусть в некотором множестве M существует элемент со свойством F. Если это множество конечно, то в принципе можно перебрать все его элементы и однозначно определить: или в M существует элемент со свойством F, или все элементы из M этим свойством не обладают. Таким образом, не слишком ломая голову, мы быстро доказываем справедливость закона исключенного третьего для конечных (счетных) множеств. Но справедлив ли этот закон для бесконечных множеств?

Брауэр полагает, что данный закон не годится для понимания бесконечных множеств. Аргументация проста: мы даже в принципе не можем перебрать элементы бесконечного множества. Но допустим все же, что мы решились на такой перебор. И что же? А ровным счетом ничего! Даже если в процессе перебора будет найден элемент со свойством F, то наша корзинка знаний не слишком обогатится чем-то научно значимым, т. е. знания окажутся мизерными, а именно: первая альтернатива выполнена. Достаточно ли этого для абсолютной уверенности в справедливости закона исключенного третьего? Нет, недостаточно, так как мы имеем дело с бесконечным множеством, в безднах которого, говоря словами Лема, прячутся «лягающиеся драконы». Поэтому про вторую альтернативу ничего внятного и определенного сказать нельзя.

Узнав о программных заявлениях своего бывшего ученика, Гильберт был страшно раздосадован. «Изъять из математики принцип исключенного третьего, говорил он раздраженно, все равно что запретить астроному пользоваться телескопом или боксеру кулаками».


Г. ВЕЙЛЬ

Замечу, что в математике теоремы обычно доказываются приведением отрицания доказываемой теоремы к противоречию. Следовательно, без закона исключенного третьего вроде бы обойтись никак нельзя.

Что предлагает Брауэр вместо этого закона? По Брауэру, математические утверждения, согласно которым объект, обладающий данным свойством, существует, означают, что известен метод, позволяющий хотя бы в принципе построить такой математический объект.

Отстаивая свою программу, Брауэр стал едва ли не фанатиком. Дело дошло, до того, что своего бывшего учителя Гильберта он начал рассматривать как идейного врага. Однажды он даже покинул дом в Амстердаме, куда был приглашен в гости и где вдруг услышал похвальные отзывы о Гильберте.

Г. Вейль, один из единомышленников Брауэра, вынужден был признать, что манера поведения Брауэра не отличается корректностью, но жаль и то, что Гильберт в своей оппозиции Брауэру никогда открыто не признавал того большого вклада, который Брауэр сделал в математику.

Пусть читателю не покажется странным, но фактически Гильберт полностью согласен с Брауэром относительно того, что огромное большинство математических утверждений зиждется на интуитивной очевидности. Однако Гильберт настаивает на том, что ряд утверждений, не имеющих интуитивного (содержательного) смысла, совершенно необходимы для математики. Его настойчивость объясняется не попытками доказать истинность какого-либо фрагмента математического знания, а стремлением доказать непротиворечивость всей системы математики. Но как можно убедиться в том, что гильбертовская формализация способна преодолеть все, без исключения, противоречия?

На этот вопрос обескураживающий ответ был дан Куртом Гёделем, доказавшим, что формализм далеко не всесильное средство.

«Должно быть, писал Вейль, Гильберту, как поборнику аксиоматического метода, было трудно признать, что вопрос о непротиворечивости приходилось решать с помощью интуитивного рассуждения, основанного не на аксиомах, а на очевидности».

С. К. Клини, создатель одной из первых жизнеспособных формальных систем интуиционистского анализа, работавший в 1950 г. в Амстердамском университете вместе с Брауэром, так характеризует современный интуиционизм.

Интуиционизм, основанный Брауэром, представляет собой яркое проявление так называемой конструктивной тенденции в математике. Эта тенденция была представлена до и независимо от интуиционизма Брауэра работами Л. Кронекера (1823 1891), А. Пуанкаре и других математиков.

Развитие идей математического конструктивизма привело Брауэра к тому, что в своей знаменитой работе 1908 г. о недостоверности логических принципов он отбрасывает традиционное убеждение о пригодности классической логики для математики. Через десять лет Брауэр приступает к построению интуиционистской математики, отличной от традиционной в духе формализма Гильберта.

В 30-е гг. XX столетия конструктивная тенденция в математике приобрела вид общей теории конструктивных процессов или алгоритмов для вычисления функций. Эту теорию принято называть теорией общерекурсивных функций. Большой вклад в развитие данной теории сделали: К. Гёдель, А. Чёрч (1903 1995), А. М. Тьюринг (1912 1954), Э. Л. Пост (1897 1954), А. А. Марков (1903 1979) и др.

Согласно Брауэру, математика должна состоять из интуитивных рассуждений на основе смысла предложений (высказываний), относящихся к математическим объектам, а не принимать вид формальной дедукции из формально установленных аксиом. Основатель интуиционизма был убежден, что математическое мышление это особый процесс *мысленного* ***построения*** *математических объектов*, процесс, не зависящий от опыта и базирующийся на фундаментальной математической интуиции. Математические мысли (идеи) не связаны языковыми путами и не выразимы полностью ни в одном языке, ибо уходят своими корнями в глубины неязыкового человеческого разума. Поскольку логика относится к особому виду искусственного языка, она не может конкурировать с математической интуицией, т. е. не может быть всецело надежным инструментом для открытия математических истин. Логика производна, зависима от математики, а не наоборот. Придя к такому заключению, Брауэр начинает во всеуслышание отвергать логико-математическую задачу вывода заключений из аксиом. Это значит, что он отвергает в принципе аксиоматизацию математики и тем самым бросает перчатку вызова Гильберту.

Если знание математики не требует знания формальных доказательств, то парадоксы, обнаруженные Б. Расселом и другими учеными в теориях, ценности которых чужды Брауэру, являются скорее дефектами логики, а не собственно математики. Следовательно, как отмечает американский математик М. Клайн, проблема непротиворечивости для Брауэра это своего рода приведение, лишенное плоти.

По словам Клини, Брауэр, исходя из философских предпосылок, считал, что разнообразие математических конструкций не может быть ограничено рамками какой-либо фиксированной формальной системы. Позднее его взгляды получили подтверждение в доказательстве

Гёделем того, что всякий логико-математический формализм неполон. Следовательно, и формальная система интуиционистской математики неполна. Но если бы дело ограничивалось только этим. Хотя Брауэру и его сторонникам удалось позитивно «переписать» некоторые разделы математики, однако предлагаемые ими конструктивные варианты отличались такой сложностью и громоздкостью, что повергали в уныние даже самих интуиционистов.

Итак, по мнению интуиционистов, математическому рассмотрению подлежат только конструктивные объекты и понятия о них. Для этого необходимо указать метод, позволяющий построить (сконструировать) тот или иной математический объект за конечное число шагов.

Пытаясь избавиться от некоторых крайностей доктрины интуиционизма, часть математиков, симпатизировавших интуиционизму, попыталась примирить классическую логику с конструктивными тенденциями в контексте интуиционизма. Этих математиков окрестили *конструктивистами*, а развитие ими идей интуиционизма приняло вид так называемого *конструкционизма* (*конструктивизма*). Конструктивистам удалось добиться определенных успехов, но эти успехи были весьма скромны. Поэтому многие математики считают, что перспективы распространить конструктивистский подход на всю современную математику нельзя считать обнадеживающими. К тому же базисное для конструкционизма понятие «конструктивность» отнюдь не является четким и однозначным, что периодически вызывает бурную полемику в рядах конструктивистов.

В 1930 г. А. Гейтинг (1898 1980), считающийся наиболее выдающимся представителем интуиционизма после Бауэра, опубликовал работу с изложением формальных правил интуиционистской логики высказываний, которая, по словам Клайна, явилась своеобразным символическим выражением намерения наладить отношения взаимопонимания с формальными логиками.

В логике Гейтинга из истинности высказывания вида p следует: *неверно, что p ложно.* Однако из утверждения «неверно, что p ложно» еще не следует, что p истинно, так как высказывание вида p может оказаться неконструктивным, т. е. закон исключенного третьего в логике Гейтинга не используется.

Формализация Гейтинга не была единственной. Уже в середине 30-х гг., Г. Генцен осуществил новую формализацию интуиционистской логики. Позднее было доказано, что часть интуиционистской математики может быть выражена в том же языке, что и соответствующий фрагмент классического математического анализа.

Особо хотелось бы отметить большой вклад в развитие конструктивной математики и логики нашего выдающегося соотечественника Андрея Андреевича Маркова (1903 1979).

Марков, как и Брауэр, резко критически относился к канторовской теории множеств. Он отказывался признавать теорию множеств в качестве основы для построения математики и предлагал строить ее конструктивно.

Что имеется в виду, когда говорится о конструктивности? На этот вопрос Марков отвечает следующим образом. По его мнению, самым простым примером конструктивного процесса является построение ряда вертикальных черточек (||||||) посредством начертания слева направо одной черточки за другой. Результатом подобного конструктивного процесса является так называемый конструктивный объект, изображаемый в нашем случае шестью черточками.

Ряды вертикальных черточек вроде наших, включая и пустой ряд, в состав которого не входит ни одна черточка, можно назвать не черточками, а натуральными числами. Тогда натуральное число, представленное шестью черточками, можно изобразить с помощью арабской цифры 6. Натуральное число, представленное пустым рядом, будем называть нулем и изображать цифрой 0.

Вместо черточек можно использовать элементарные знаки других типов. Конструктивный процесс будет тем же самым, т. е. мы напишем первый элементарный знак, затем припишем к нему справа другой элементарный знак и т. д. К разряду таких элементарных знаков можно отнести буквы какого-либо алфавита. Как подчеркивает Марков, сами буквы мы не будем определять в духе Аристотеля (например, через ближайший род и видовое отличие). Философский вопрос о том, что такое буква вообще, нас не должен интересовать. Конструктивистов вполне устроит, что всякий раз, начиная что-то строить, мы будем считать такие-то и такие-то знаки элементарными, имея в виду, что требующиеся нам выражения будут строиться из этих элементарных знаков.

Конечный набор букв может задаваться тем или иным списком. Такие списки условимся называть *алфавитами*.

Ряды букв подобного типа алфавита назовем *словами*. Подобным образом построенные слова будут примером конструктивных объектов. Кстати, нас, как математиков, а не лингвистов, не должно волновать, что некоторые из слов конструктивного словаря будут чем-то совершенно бессмысленным для лингвиста (например, *папагиглема*).

Как с этой точки зрения можно охарактеризовать используемое в математике и в математической логике понятие исчисления?

Обычно, говоря об исчислении, мы начинаем с аксиом, затем указываем правила вывода. Исходя из аксиом и пользуясь правилами вывода, мы осуществляем сам процесс вывода. Вывод, имеющий некоторый объект в качестве своего последнего члена, называется *выводом этого объекта*. Объект считается выводимым в данном исчислении, если может быть *построен его вывод* в этом исчислении. Таким образом, вывод данного объекта может рассматриваться как его *построение*.

Сделаем следующий шаг и зададим новый вопрос: что должно означать в контексте конструктивной математической логики соединение математического термина «исчисление» с логическим термином «высказывание»?

Начнем с «высказывания». Данное слово заимствовано из естественного языка (!). Подчеркиваю: заимствовано из языка (естественного). В связи с этим интуиция подсказывает, что исчисление высказываний это особого рода язык.

В логических языках правила построения высказываний формулируются точно, но по-разному. При этом некоторые правила квалифицируют определенные *логические слова*, точнее, *выражения как высказывания*. Другие правила позволяют строить новые высказывания из уже построенных. В конструктивной математической логике высказываниями считаются те объекты, которые могут быть построены по данным правилам. Эти правила образуют синтаксис нашего искусственного логического языка. В грамматике естественных языков под синтаксисом (гр. syntaxis *составление*) понимаются правила соединения и сочетания слов в предложении.

Однако мало знать правила синтаксиса естественного или искусственного языка. Мы всегда хотим знать, что выражает то или иное высказывание. Ставя вопрос о понимании высказывания, мы переходим от синтаксиса языка к его семантике (гр. semantikos *обозначающий*), т. е. к *смысловой* стороне языка.

Чтобы высказывания стали для нас понятными, особенно когда дело касается иностранных языков или различных научных языков, включая язык логики, нам

следует заключить некоторые семантические соглашения. Такие соглашения помогают понять, о чем повествует (сообщает) то или иное высказывание. Понимание высказываний позволяет ставить вопрос об их истинности, т. е. вопрос о том, действительно ли имеет место то, о чем высказывание нас информирует. Высказывание считается истинным, если то, о чем оно сообщает, действительно имеет место. Высказывание считается ложным, если то, о чем оно сообщает, не имеет места.

Необходимо запомнить, что *семантические соглашения образуют семантику данного языка.*

Таким образом, любой язык можно рассматривать как состоящий из двух частей синтаксиса и семантики. В логике «синтаксис» и «семантика» это весьма специфические понятия, отличные от их аналогов в грамматике естественного языка. Отличие настолько существенно, что логики, которым в чувстве юмора не откажешь, рассматривают естественные языки как плохие искусственные языки. Тем самым неявно подчеркивается, что к «хорошим» искусственным языкам типа языка математической логики применимо понятие исчисление, т. е. язык логики может быть использован математиками, включая представителей конструктивной математики.

В чем состоит специфика конструктивной логики высказываний?

Как отмечал в свое время академик Петр Сергеевич Новиков (1901 1975), основатель отечественной научной школы математической логики, конструктивная логика была порождена попытками освободить математическое мышление от неэффективных методов.

Что такое неэффективность в данном контексте?

Типичными примерами неэффективности в классической математике являются такие доказательства существования математических объектов с заданными свойствами, которые не позволяют осуществить конструктивное построение индивидуального объекта с этими же свойствами. Другим распространенным типом неэффективных результатов в математике являются теоремы об истинности высказываний, построенных в виде дизъюнкции. Дело в том, что традиционные методы доказательства не позволяют однозначно установить, какой член дизъюнкции действительно истинен. Препятствием на этом пути является закон исключенного третьего. Новиков иллюстрирует это следующим примером. Пусть p обозначает высказывание «Великая теорема Ферма истинна». Принимая закон исключенного третьего, мы должны считать доказанным высказывание вида $p \vee \neg p$. Однако это доказательство ни на шаг не продвигает нас к знанию того, какой же на самом деле член этой дизъюнкции истинен. Понятно, если бы подобное знание было получено, то проблема выдающегося французского математика и юриста Пьера Ферма (1601 1665) была бы решена. Поэтому, резюмирует Новиков, конструктивный подход диктует иное, чем в классической математике, осмысление основных логических понятий. В связи с этим конструктивисты стремятся на свой манер реабилитировать понятие потенциальной бесконечности, на которое замахнулся Г. Кантор.

Осуществляя конструктивные процессы, писал Марков, мы часто наталкиваемся на препятствия, связанные с нехваткой времени, места и материала. К сожалению, наши конструктивные возможности далеко не безграничны. Тем не менее кое-чем можно пренебречь и рассуждать так, как если бы этих препятствий не существовало. Это отвлечение (абстрагирование) от ограниченности наших реальных возможностей принято называть *абстракцией потенциальной осуществимости.*

Данная абстракция позволяет рассуждать о сколь угодно длинных конструктивных процессах и сколь угодно больших конструктивных объектах.

Между прочим, классическая математика использует абстракции, во много раз превосходящие абстракции конструктивной математики. Например, классическая математика пользуется абстракцией «актуальная бесконечность», позволяя тем самым говорить о бесконечных множествах как о законченных *неконструктивных* (*непостроенных*) объектах.

Особое место в классической и неклассической математике занимают *теоремы существования*, утверждающие существование абстрактных объектов, которые удовлетворяют соответствующим требованиям. Что касается конструктивной математики, то проблему существования она решает, исходя из того, что *построение конструктивных объектов потенциально осуществимо*, т. е. мы владеем определенным способом их построения (конструирования).

Конструктивная трактовка теорем существования расходится с их пониманием в классической математике. Например, классики считают возможным утверждать существование абстрактного объекта тогда, когда удается посредством доказательства reductio ad absurdum (*приведение к нелепости*) опровергнуть предположение о том, что ни один объект не удовлетворяет выдвинутому требованию. Характерно, что конструктивный способ построения искомого абстрактного объекта может при этом и не быть известен, но потенциально он допустим.

Как уже отмечалось, в логическом плане конструктивная математика отличается от классической математики (в ее теоретико-множественной интерпретации) пониманием дизъюнкции. В конструктивной математической логике дизъюнкция понимается как осуществимость указания ее истинного элемента. Иначе говоря, в данном случае дизъюнкция трактуется как потенциальная осуществимость конструктивного процесса, дающего один из элементов дизъюнкции, который будет истинным. Классики же считают дизъюнкцию истинной тогда, когда им удается опровергнуть предположение о том, что ни один из ее элементов не истинен. По этому поводу Марков иронично замечает, что классики не утруждают себя объяснениями понимания дизъюнкции и, как следствие, не заботятся об умении находить истинный элемент дизъюнкции.

Из сказанного явствует, что конструктивная математика нуждается в особой логике, отличной от логики, базирующейся на теоретико-множественных представлениях, в основе которых лежит понятие актуальной бесконечности.

По справедливому мнению Маркова, в идее неединственности логики нет ничего удивительного или крамольного. Практика свидетельствует, что все наши рассуждения не могут и не должны управляться одними и теми же законами. Для последнего нет никаких серьезных оснований. Однако это не означает, что конструктивисты непочтительно относятся к классическому наследию. Задачу построения конструктивной математической логики они видят не в разрушении и последующем созидании с нуля, а в решении путем надлежащего истолкования уже известного.

Этим же путем пошел в 60-е гг. XX столетия профессор Л. А. Заде (L. A. Zadeh, родился в 1921 г. в Баку (Азербайджан), учился в Иране, а затем переехал в США), известный американский ученый, автор теории *нечетких множеств*, точнее, *подмножеств*, который весьма своеобразно попытался укрепить пошатнувшееся здание классической теории множеств. В отличие от Брауэра и его последователей он решил обвенчать актуальную и потенциальную бесконечности, сделав применительно к неклассическим подмножествам классических множеств базовыми понятиями своих теоретических изысканий «нечеткость», «неясность», «случайность», «возможность», «правдоподобность».

Для новой теории потребовалась и новая логика, получившая название *нечеткой логики*, философская основа которой, к сожалению, недостаточно ясна, но практическая цель уже определена исследования по «искусственному интеллекту».

Еще раз подчеркну, что теория Заде это именно *теория нечетких подмножеств, а не множеств.* Американский ученый не покушается на интуицию математиков, понимающих под множеством совокупность хорошо определенных объектов. По отношению к таким объектам только подмножества могут быть нечеткими. Но это не означает, что теория нечетких подмножеств должна выступать в роли капризного и своенравного пасынка. Скорее наоборот: традиционную теорию множеств можно рассматривать как частный случай теории нечетких подмножеств. Сохранение же термина «четкое множество» обусловлено тем, что областью определения нечеткого подмножества является обычное множество. Говоря проще, Заде пытается преодолеть противоречие между формализмом и конструкционизмом, между потенциальной и актуальной бесконечностью. Насколько это ему удастся, покажет время, но уже сегодня у него много сторонников из числа математиков, логиков, кибернетиков и инженеров.

Что собой представляет нечеткая логика? Как отмечает известный пропагандист теории нечетких подмножеств французский профессор А. Кофман, в сочетании «нечеткий» и «логика» заключено нечто необычное. Но что есть необычное? Для кого оно необычно?

Математики и логики давно заметили, что в практике научного познания мы пользуемся не одной «универсальной» логикой, а различными логическими системами и методами. Все определяется выбором соответствующих теоретико-методологических установок, обусловленных типом решаемых задач. Так, если говорить об аксиоматической логике, то вопрос упирается в выбор системы аксиом. Как только аксиомы выбраны, то ни о какой нечеткости наших рассуждений не может быть и речи. Все утверждения, формулируемые на основе выбранной системы аксиом, должны быть строго и без противоречия увязаны друг с другом согласно правилам, установленным в данной системе аксиом. Соответственно, если булева логика   это логика, связанная с булевой теорией множеств, то нечеткая логика связана с теорией нечетких подмножеств. Рассмотрим некоторые характерные черты теории нечетких подмножеств.

Пусть M есть множество, а P подмножество M ($P \subset M$).

Тот факт, что элемент x множества M есть элемент подмножества P (*принадлежит* P), обычно выражается так: $x \in P$, где $\in$ символ принадлежности.

Для выражения указанной принадлежности можно использовать понятие *характеристическая функция* μ_P. Эта функция указывает, является ли (да или нет) x элементом P :

$$\mu_P(x) = \begin{cases} 1, \text{ если } x \in P \\ 0, \text{ если } x \in P \end{cases}.$$

В качестве примера рассмотрим конечное множество из пяти элементов.

$$M = \{x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5\}$$

и пусть

$$P = \{\ x_2,\ x_3,\ x_5\}.$$

Выпишем для каждого элемента из M степень его принадлежности множеству P :

$$\mu_P(x_1) \quad 0,\ \mu_P(x_2) \quad 1,\ \mu_P(x_3) \quad 1,\ \mu_P(x_4) \quad 0,\ \mu_P(x_5) \quad 1.$$

Это позволяет представить P через все элементы множества M, сопроводив каждый из них значением его функции принадлежности:

$$P = \{(x_1,\ 0)\ ,\ (x_2,\ 1),\ (x_3,\ 1),\ (x_4,\ 0),\ (x_5,\ 1)\}.$$

Теперь представим, что характеристическая функция принимает любое значение в интервале [0, 1]. В соответствии с этим элемент x множества M может не принадлежать P ($\mu_P = 0$), может быть элементом P в небольшой степени (μ_P близко к 0), может более или менее принадлежать P (μ_P ни слишком близко к 0, ни слишком близко к 1) и может быть элементом P ($\mu_P = 1$).

Математический объект, определяемый выражением

$$\underset{\sim}{P} = \{(x_1 \mid 0{,}2),\ (x_2 \mid 0),\ (x_3 \mid 0{,}3),\ (x_4 \mid 1),\ (x_5 \mid 1)\}.$$

где $\sim$ символ нечеткости, x_i элемент универсального множества M, а число после вертикальной черты дает значение характеристической функции на этом элементе, будем называть нечетким подмножеством множества M и обозначать так: $\underset{\sim}{P} \subset M$ или $P \underset{\sim}{\subseteq} M$.

Принадлежность нечеткому подмножеству обозначим следующим образом:

$$x \underset{0{,}2}{\in} P,\ y \underset{1}{\in} P,\ z \underset{0}{\in} P.$$

В случае с нечеткими подмножествами символ $\in$ можно считать эквивалентным традиционному $\in$, а символ $\notin$ можно считать эквивалентным традиционному символу $\notin$.

Определенное здесь нечеткое подмножество $\underset{\sim}{P}$ содержит в небольшой степени x_1 не содержит x_2, содержит x_3 в немного большей степени, чем x_2, полностью содержит x_4 и в значительной мере x_5.

Из сказанного видно, что мы в состоянии создать некую математическую структуру, которая позволяет оперировать с относительно неполно определенными элементами и принадлежность которой к данному подмножеству лишь в какой-то мере иерархически упорядочена. К таким структурам можно отнести, например, в заданном множестве людей, способных на убийство князя Отто Гроссенмаркского, уже известного нам персонажа честертоновской «Волшебной сказки отца

Брауна», некоторое подмножество людей в солдатской форме.

Дадим с помощью профессора Кофмана строгое определение понятия нечеткое подмножество.

Пусть M есть множество (счетное или нет), а x элемент M. Тогда нечетким подмножеством $\underset{\sim}{P}$ множества M будет называться множество упорядоченных пар, а именно:

$$\{(x \mid \mu_{\underset{\sim}{P}}(x))\}, \ \forall x \in M,$$

где $\mu_{\underset{\sim}{P}}(x)$ степень принадлежности x в $\underset{\sim}{P}$, т. е. где $\mu_{\underset{\sim}{P}}(x)$ *характеристическая функция принадлежности*, принимающая свои значения во вполне упорядоченном множестве M. Эта функция указывает *степень* или *уровень* принадлежности элемента x подмножеству $\underset{\sim}{P}$. Множество M будет называться множеством принадлежностей.

Если $M = [0, 1]$, то нечеткое подмножество $\underset{\sim}{P}$ будет рассматриваться уже не как нечеткое, т. е. будет рассматриваться как обычное подмножество.

Таким образом, констатирует Кофман, понятие нечеткого подмножества связано с понятием множества в обычном его смысле и позволяет изучать нестрого определенные понятия, используя привычные математические структуры.

Для нечетких подмножеств можно применить геометрические рисунки, отдаленно напоминающие диаграммы Венна Эйлера.

Рассмотрим прямоугольную систему координат (рис. 20), на оси ординат которой откладываются значения $\mu_{\underset{\sim}{P}}(x)$, а на оси абсцисс в произвольном порядке расположены элементы M. Если же M вполне упорядоченное множество, то такой же порядок должен сохраняться в расположении элементов на оси абсцисс. На рис. 20 принадлежность каждого элемента изображена его ординатой. Заштрихованная часть прямоугольника представляет нечеткое подмножество $\underset{\sim}{P}$ и все нечеткие подмножества (подподмножества),

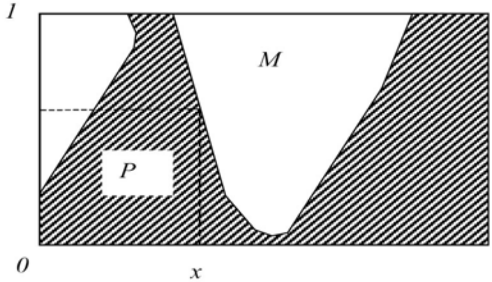


Рис. 20

содержащиеся в подмножестве $\underset{\sim}{P}$. В данном случае заштрихованные части изображают отношение нечеткого подмножества $\underset{\sim}{P}$ к множеству M ($\underset{\sim}{P} \subset M$). Такое графическое представление делает зримыми простые операции на нечетких подмножествах. Соответственно, на рис. 22, 23, 24 отражено свойство *включения*, на рис. 25, 26, 27 *дополнения*, на рис. 28, 29, 30 *объединения*, на рис. 31, 32, 33 *пересечения*.
Полагаю, в первом приближении всего этого достаточно, чтобы иметь самые общие представления о специфике теории нечетких подмножеств. Теперь обратимся к понятиям нечеткой логики.

Будем использовать следующие обозначения для нечетких переменных: $\underset{\sim}{P} = \mu_{\underset{\sim}{P}}(x)$, $\underset{\sim}{Q} = \mu_{\underset{\sim}{Q}}(x)$ и т. д.

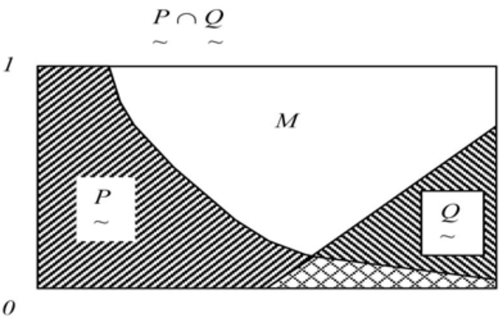


Рис. 21

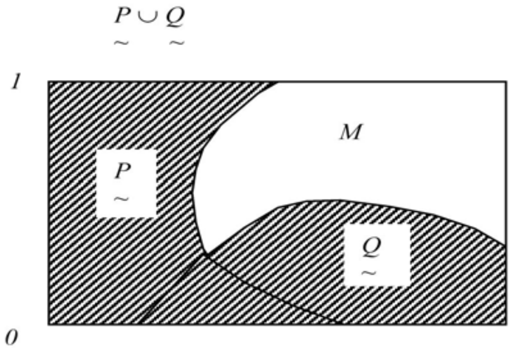


Рис. 22

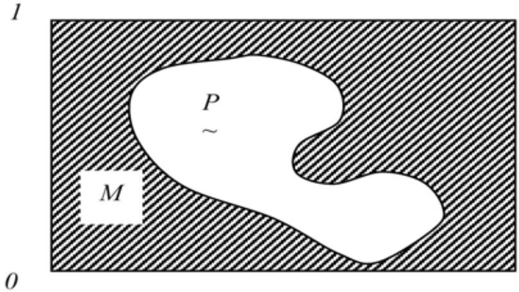


Рис. 23

В бинарной булевой алгебре переменные могут принимать только одно из двух значений истина (1) или ложь (0). Нетрудно догадаться, что в нечеткой логике это требование не соблюдается, вернее, чаще всего не соблюдается, ибо они могут принимать любое значение в интервале истина ложь (1 0), о чем свидетельствует следующая запись: $a, b, c, ... \in [0, 1]$, где a, b, c и т. д. нечеткие переменные. Функции, построенные с помощью нечетких переменных, будем называть функциями нечетких переменных, если выполнено следующее условие.

Пусть $f(x, y, ...)$ есть функция от аргументов $p, q, ...$ Чтобы эту функцию можно было назвать функцией нечетких переменных, необходимо и достаточно, чтобы

f зависела только от нечетких переменных и чтобы мы имели $0 \leq f \leq 1$.

В отличие от булевых функций для систематического анализа функций от нечетких аргументов нельзя воспользоваться методом составления таблиц истинности. Поэтому нечеткая логика опирается не на таблицы истинности, а на операции, производимые на нечетких подмножествах.

Каким образом осуществляется функциональное представление нечетких утверждений (высказываний) в нечеткой логике?

Ответ на этот вопрос Кофман начинает со сравнительного примера, основанного на сказке «Красная Шапочка». Учитывая его опыт, обратимся к знакомой нам «рассказке», поведанной в предыдущем разделе патером Брауном.

Пусть имеется множество потенциальных убийц князя Отто Гроссенмаркского:

M {отшельник, слуги отшельника, разбойники, солдаты}.

Рассмотрим $P \subset M$, формальное подмножество лиц, которые могли бы, минуя все посты охранения, напасть на князя.

P {(отшельник $|$0), (слуги отшельника $|$0,5), (разбойники $|$1), (солдаты $|$0)}.

Рассмотрим $Q \subset M$, т. е. подмножество лиц, которые могли бы знать пароль, чтобы пройти посты охранения.

Q {(отшельник $|$0), (слуги отшельника $|$0,1), (разбойники $|$0,2), (солдаты $|$1)}.

Тогда нечеткое подмножество лиц, которые могли бы знать пароль и убить князя, это:

$P \cap Q$ {(отшельник $|$0), (слуги отшельника $|$0,1), (разбойники $|$0,2), (солдаты $|$0)}.

Как видим, в убийстве могли быть замешаны только слуги отшельника или разбойники, но никак не солдаты. Почему же патер Браун указал на солдата, вопреки самой элементарной логике? А пуля и пробитая пулей перевязь! Выстрел был один, что могут подтвердить солдаты постов охранения, но тем не менее мы имеем два отверстия в голове и в перевязи. Патер Браун предположил, что перевязью была обмотана голова князя. Кто мог это сделать?

Рассмотрим $Z \subset M$, формальное подмножество лиц, которые способны были, не опустошая княжеских карманов, крепко-накрепко обмотать перевязью голову князя, чтобы он не смог крикнуть.

$$Z \quad \{(\text{отшельник} \mid 0), (\text{слуги отшельника} \mid 1), (\text{разбойники} \mid 0), (\text{солдаты} \mid 0)\}.$$

Тогда нечеткое подмножество лиц, которые могли бы завязать рот князю, узнать пароль и убить князя, это:

$$P \cap Q \cap Z \quad \{(\text{отшельник} \mid 0), (\text{слуги отшельника} \mid 0{,}1), (\text{разбойники} \mid 0), (\text{солдаты} \mid 0)\}.$$

Опять неутешительный вывод, хотя круг подозреваемых лиц сузился, ибо остались только слуги. Слуги не знают пароля, а солдаты, остающиеся вне всяких подозрений, не должны завязывать рот своему грозному и всесильному начальнику, но должны неуклонно выполнять приказ стрелять во всех, кто не знает пароля. Отсюда сам собой напрашивается вывод, что в убийстве князя замешаны солдаты, слуги и... отшельник, т. е. совершенно неподозреваемые и подозреваемые лица. Князь не мог сорвать перевязь, закрывающую ему рот, и назвать пароль. Солдат не мог не выполнить приказ. Отшельник, зная ситуацию вокруг замка, в лучшем случае не воспрепятствовал своим слугам завязать рот князю, а в худшем санкционировал эту операцию. Таким образом, князя случайно убил солдат, а убийству способствовали отшельник и его слуги.

Отмщение свершилось!

Итак, в реальной жизни нам постоянно приходится сталкиваться со множеством случаев, когда мы просто обязаны учитывать неясность и неточность информации о явлениях в процессах окружающего мира.

Теория Заде   это интересная и многообещающая попытка дать хотя бы схематичный набросок решения проблем, в которых субъективные суждения и оценки играют значительную роль при учете факторов неясности и неопределенности. Для нас особенно значимо то, что предлагаемая теория строится на базе теории множеств, хотя в совершенно неожиданной интерпретации некоторых из этих множеств (нечетких подмножеств). Данная значимость объясняется тем, что прослеживается связь между математикой и современной логикой, которая своим появлением на свет во многом обязана теоретико-множественному подходу к пониманию основ математической науки. В противном случае вариант нечеткой логики был бы просто экзотическим образцом паранаучной фантастики. Важно еще и то, что с помощью нечетких множеств (подмножеств) перебрасывается мостик к так называемой *модальной логике*.

Заде противопоставляет двузначной и даже многозначной логике традиционного образца логику с нечеткой истинностью, нечеткими связями и нечеткими выводами. По его мнению, именно такая нечеткая логика, которая еще недостаточно изучена, играет основную роль в способности человеческого мышления выбирать из широкого информационного потока и оценивать только те сведения, которые имеют хотя бы косвенное отношение к решаемой задаче. Особенно это касается способности человека извлекать полезную ему информацию из сообщений, формулируемых на естественном языке.

В связи с таким взглядом на естественный язык американский ученый вводит понятие «лингвистическая переменная». Что это такое и для чего оно требуется?

Лингвистическая переменная определяется как переменная, значениями которой являются выражения естественного и искусственного языков. Так, например, если «высокий», «очень высокий», «невысокий» и т. д. суть значения слова «высота», то «высота» считается лингвистической переменной, поскольку ее, так сказать, «высотность» варьируется в довольно широком диапазоне.

Идея лингвистической переменной была выдвинута в 1972 г. Эта идея служила указанием на лингвистические аспекты отношения принадлежности в нечетких подмножествах, т. е. указывала на принадлежность какому-либо нечеткому подмножеству некоего предмета, характеристика которому дается словами естественного языка. Скажем, если высказывание о некотором факте несет оттенок неуверенности, то данное высказывание можно охарактеризовать как, предположим, *истинное, не очень истинное* и т. д.

Таким образом, нечеткими высказываниями называются высказывания вида из *p следует q*, в которых переменные (*p, q, z* и т. д.) имеют нечеткое значение. Например, из того, что *p* мало, следует, что *q* велико, где *мало* и *велико* рассматриваются как элементы нечетко определенных множеств.

Позже Заде предложил ввести в рассмотрение нечеткую логику с лингвистическими, а не числовыми (1, 0) значениями истинности. Согласно этой логике высказывание может принимать истинностное значение типа: *истинно, ложно, абсолютно ложно, абсолютно истинно* и т. д. Каждое такое значение представляет нечеткое подмножество единичного интервала [0, 1].

Чтобы сказанное сделать яснее, обратимся к словарю и грамматике нечеткой логики с лингвистическими переменными.

Пусть L язык, T множество терминов (допустимо считать, что T определенное множество), x элемент (термин) множества T ($x \in T$), U область рассуждений, y элемент (объект) множества U ($y \in U$), N нечеткое отношение номинации (именования) из T в U.

Будем считать, что L есть соответствие между T и U, а N связывает с каждым термином x в T и каждым y в U степень применимости (принадлежности) x к y $\mu_N(x, y)$.

Например, если x молодой, y 23 года, то μ_N (молодой, 23) может быть 0,9 из числового интервала [0, 1].

Заметим также, что термин может «быть элементарным» (например, x высокий) или составным, когда он является сочленением элементарных терминов (например, x очень высокий мужчина).

В конце 70-х гг. Заде обновил интерпретацию понятий теории нечетких множеств и наметил новые перспективы развития своей теории, сформулировав так называемую *теорию возможностей*. В контексте этой теории нечеткие множества (подмножества) рассматриваются как *распределения возможностей*, т. е. как множества более или менее возможных значений переменной.

По мнению одного из последователей Заде, предложенная теория возможностей представляет собой обобщение обычной *модальной семантики*.

Что стоит за этими логическими терминами «модальность» и «семантика»!

Слово «модальность» происходит от латинского слова «модус» (*способ, отношение*). Посредством слова «модальность» обозначается определенный способ отношения высказывающегося субъекта к предмету высказывания.

Когда-то немецкий философ И. Кант, следуя традиции, относил к разряду модальных суждений *ассерторические суждения* (суждения действительности, утверждающие факты, но не выражающие их непреложную логическую необходимость), *суждения проблематические* (суждения возможности) и *суждения аподиктические* (суждения необходимости, выражающие необходимую связь между предметами). Эти три вида суждений не исчерпывают все богатство возможных отношений модальности. Например, просьбы, приказы, команды, клятвы и т. д. тоже выражают определенные отношения высказывающегося к предметам высказывания, но в традиционной логике они не находят себе места. К тому же далеко не всегда и не так просто установить различия между действительным и необходимым, так как подчас случайность приобретает статус действительности, посрамляя необходимость. Поэтому какое-то время представители математической логики считали, что модальность есть скорее предмет психологического, а не строго логического исследования. Но в XX столетии отношение логиков к модальности резко изменилось.

Развитие идей модальной логики обычно связывают с тремя периодами. К первому периоду относится античная и средневековая логика. Второй период датируется началом XX в. Наконец, третий период это 50 60-е гг. XX столетия.

Логический анализ модальностей впервые был осуществлен Аристотелем, но только в XX столетии модальности стали предметом всестороннего, глубокого и систематического логико-философского анализа. В данном случае первый и самый весомый вклад был сделан американским философом и логиком Кларенсом Ирвингом Льюисом, который во всеоружии современной ему символической логики вплотную занялся изучением модальностей.

Окончив Гарвардский университет (США), Льюис преподавал в alma mater (лат. букв. *кормящая мать*) с 1920 по 1953 г.

В теории познания и этике Льюис придерживался так называемого концептуалистического прагматизма, коренящегося в кантовской философии, т. е. стремился развивать свою логико-философскую концепцию в манере Канта.

В логике Льюис выступал как оппонент формалистических систем, представители которых зачастую неявно апеллировали к содержательным (интуитивно ясным), а не к формально корректным аргументам. Иначе говоря, он отклонял логические системы, которые не ограничивали себя строго от всего сомнительного в эмпирическом опыте.

Основными работами Льюиса являются: «Символическая логика» (в соавторстве с Cooper Harold Langford; 1932), «Анализ знания и оценки» (1947), «Основание и природа права» (1955).

В своих публикациях 1916 и 1932 гг. Льюис достаточно полно представил формализованную систему классических модальностей и попытался построить теорию строгой импликации.

Основная идея Льюиса состояла в проведении различия между связками, выражающими логическую необходимость, и связками, не выражающими таковую. В результате было намечено разграничение между *материальной* (интуитивно-содержательной) импликацией и *строгой* (необходимо-формальной) импликацией.

Строя свою теорию модальностей, Льюис попытался испытать на прочность разные аксиоматические системы. Позднее эти системы получили название систем: S1, S2, S3.

В дальнейшем идеи Льюиса были развиты в логических системах S4 и S5. При этом логики обратили внимание на один давно известный факт, касающийся суперпозиций модальностей вида: *необходимо, что необходимо...*; *необходимо, что возможно...* . Подобные суперпозиции могут показаться обыденному сознанию чем-то слишком заумным, но в этих заумностях коренится много ценного для логики и ее практических приложений. Поэтому логики попытались сформулировать аксиомы, позволяющие сводить (редуцировать) модальности к определенному их числу или к модальностям определенной формы.

Если упростить изложенное, можно сказать: Льюисом были построены исчисления так называемых алетических (*близких к истине*; гр. aletheia *истина*) модальностей, позволяющих изучать проблемы логического следования, ибо Льюис полагал, что логическое следование тесно связано с понятиями *необходимости* и *возможности*. Правда, впоследствии оказалось, что построенные им исчисления строгой импликации не вносят существенной ясности в проблему логического следования, но тем не менее имеют большое значение для совершенствования логического инструментария.

В 1948 г. английский логик Р. Фейс предложил своему коллеге и другу Дж. Маккинси ознакомиться с проспектом трактата «Модальная логика», вторую часть которого мог бы написать Маккинси, если его заинтересует такого рода работа. Предложение было принято, но в 1953 г. Маккинси умер, успев подготовить лишь несколько фрагментов будущей книги. Правда, он оказал Фейсу значительную помощь своими советами и критическими замечаниями.

Фейс продолжал упорно трудиться над рукописью, уточняя по ходу работы первоначальный план трактата. К сожалению, трактат так и не был завершен, ибо в 1961 г. Фейс умер. Однако сделано было многое, и поэтому друзья ученого решили издать рукописное наследие Фейса. В 1965 г. книга Фейса «Модальная логика» увидела свет.

По мнению Фейса, модальная логика, или логика модальностей, это логика, которая изучает не только утверждения и отрицания, но и так называемые *сильные* и *слабые* утверждения и отрицания. К сильным относятся утверждения типа: *Это необходимо истинно*; *Это необходимо ложно*. К слабым относятся утверждения типа: *Это возможно истинно*; *Это возможно ложно*.

Сегодня модальная логика весьма развитая отрасль формализованной логики. Логический анализ свидетельствует, что модальности можно использовать для разъяснения некоторых трудных логических понятий.

В модальной логике изучаются такие рассуждения, в состав которых входят выражения, аналогичные словам «необходимо», «возможно» и т. п. Эти логические константы называются *модальностями* или *модальными операторами*.

Модальные операторы тесно связаны с пониманием сути импликации.

Импликация *если p, то q*, считающаяся ложной только тогда, когда *p* истинно, а *q* ложно, получила название *материальной импликации*.

Материальная импликация преподносит сюрпризы не только недостаточно посвященным, но и мэтрам логической науки. Так, с точки зрения логики и вопреки здравому смыслу высказывание «Если $2 + 2 = 5$, то Париж столица Франции» является истинным, поскольку истинным является простое высказывание (консеквент) «Париж столица Франции». Как так получается?

Понятия типа «*p* необходимо» и «*q* возможно» возникают в тех областях логических рассуждений, где, по словам Клини, допускаются два вида «истинности», один из которых имеет более универсальный и принудительный характер, чем другой. Так, с точки зрения математиков невозможно, чтобы $2 + 2 = 5$, но возможно, чтобы с географических карт исчезло Аральское море (это противоречит законам природы, но не бюрократическому произволу). Зоолог, пишет Клини, может утверждать, что существование саламандр, живущих в огне, невозможно; однако возможно (хотя и неправдоподобно), что существует снежный человек. Изучением этих причуд занимается модальная логика, в развитие которой внесли большой вклад Х. Мак-Колл, К. И. Льюис, К. Г. Лэнгфорд и другие.

Логика давно стремилась сделать отношение *если ..., то ...*, играющее важную роль в формулировке научных законов, более ясным, превратив материальную (содержательную) импликацию в формальную (строгую). Именно с этой целью Льюис и построил ряд логических систем, содержащих модальные операторы.

К основным модальностям относят оператор *необходимости*, символически обозначаемый квадратиком $\Box$, и *оператор возможности*, обозначаемый небольшим ромбиком $\Diamond$. Модальные операторы указанного вида читаются: *необходимо, что ...*; *возможно, что ...* . Для строгой импликации и строгой эквиваленции (эквивалентности) используются символы $\Rightarrow$ и $\Leftrightarrow$.

Модальную логику высказываний (модальную пропозициональную логику) можно построить в виде расширения логической системы немодального пропозиционального исчисления (немодальной логики высказываний). Для этого берутся уже известные нам переменные, связки, аксиомы и правила вывода, к которым добавляются символы (*необходимо*) и а (*возможно*) и соответствующие им постулаты. Идея этих постулатов состоит в том, что высказывания модальной логики являются не категорически истинными или ложными, а истинными или ложными в определенных случаях, в некоторых случаях или во всех случаях. Иначе говоря, логическое значение истинности сложных высказываний, в которых используются модальные операторы, не определяется однозначно, как это имеет место в классической логике высказываний.

Рассмотрим следующее высказывание: *Число планет Солнечной системы равно 9.* Любой школьник, знакомый с элементарными астрономическими сведениями, уверенно скажет, что это высказывание истинно. Теперь рассмотрим другое высказывание, а именно: *Необходимо, что число планет Солнечной системы равно 9.* Каждому мало-мальски образованному и здравомыслящему человеку ясно, что в реальном физическом мире не действует столь жесткая необходимость, ибо господин Случай идет рука об руку с госпожой Необходимостью.

Таким образом, в модальной логике значение истинности сложного высказывания не определяется однозначно значением истинности высказывания, к которому применяется модальный оператор. Поэтому модальные операторы не служат функциями истинности.

Рассмотрим простые высказывания вида *p* (*p необходимо*) и □ *p* (*необходимо, что p необходимо*). Если *p* ложно, то □ *p* также ложно, ибо предполагается, что необходимое не может быть ложным. Но если *p* истинно, то □ *p* может быть или истинным, или ложным. Например, если высказывание вида *p* выражает, что 2 + 2 = 4, то p и $\Box\, p$ оба истинны. Но если высказывание вида p выражает какой-то эмпирический факт, то весьма сомнительно, что высказывание вида $\Box\, p$ выражает непреложность и безусловность данного факта. В качестве иллюстрации рассмотрим следующее высказывание: *Этот гадкий лебеденок белый.* Обязательно ли фигурирующий в нашем высказывании лебеденок будет белым на протяжении всей своей жизни? Весьма вероятно, что действительно он будет иметь белое оперение. Однако не следует сбрасывать со счетов и тот факт, что некоторые лебеди имеют черный цвет. Это допускает пусть незначительную, но возможность того, что в результате каких-то мутаций белый лебеденок может стать из гадкого замарашки красивым черным лебедем.

Следовательно, если p ложно, то $\Box\, p$ также ложно, но если p истинно, то $\Box\, p$ или истинно, или ложно в зависимости от ситуации. Вот почему $\Box\, p$ не есть функция истинности от p. Из этого вытекает, что модальный оператор $\Box$ (*необходимо*) не является функционально истинностным.

Аналогично, но только в обратном смысле ведет себя модальный оператор возможности $\Diamond$. Так, если p истинно, то $\Diamond p$ также истинно, но если p ложно, то $\Diamond p$ или истинно, или ложно. Например, если p ложное высказывание, это не означает, что в одном из возможных миров $\Diamond p$ также ложно.

Можно ли использовать кванторы в модальной логике?

Да, можно, но делать это надо осторожно. Присоединение модальных операторов к формулам, содержащим кванторы, порождает определенные проблемы, связанные с использованием кванторов в модальных контекстах. Анализ показывает, что для модальных операторов $\Box$ и $\Diamond$ верны следующие соотношения:

$$\forall x\ \Box F(\mathrm{x}) \equiv \forall x\ \Box F(x);\quad \exists x\ \Diamond F(x) \equiv \Box\ \exists x\ F(x).$$
$$\exists x\ \Box F(x) \to \Box\ \exists x\ F(x);\ \Diamond\forall x\ F(x) \to \forall x\ \Diamond F(x).$$

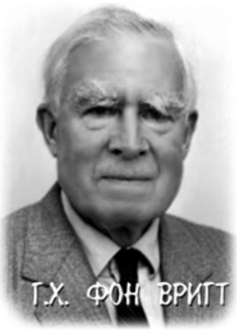
Запомним, что данные соотношения оправдываются стандартной теорией квантификации. И тем не менее нельзя закрывать глаза на определенные трудности при построении теории квантификации именно для модальной логики. О некоторых из этих трудностей любознательный читатель может узнать самостоятельно из книги Фейса «Модальная логика».

Модальные операторы $\Box$ и $\Diamond$ не обязательно должны пониматься как символы, указывающие на необходимость в смысле законов объективной действительности и на возможность в смысле объективно возможного. В некоторых случаях слово «необходимо» понимается как *доказуемо*, а «возможно» как *неопровержимо*. Тогда выражение «необходимо, что p» означает, что p выводимо или доказуемо в некоторой научной теории. Соответственно, выражение «возможно, что p» означает, что *не* p ($\neg p$) не выводимо или не доказуемо. В одном и другом случаях мы имеем дело с логикой алетических модальностей.

Иногда $\Box$ означает приемлемость некоторого эмпирического утверждения (например, в естественных науках), а $\Diamond$ его неотвергаемость. Здесь мы имеем дело с индуктивными модальностями. Поэтому к разряду модальной логики можно отнести с известными оговорками индуктивную логику, занимающуюся изучением таких рассуждений, в которых заключения носят проблематический характер, даже если все посылки истинны. Индуктивные логические исчисления содержат специальные модальные операторы.

Порой $\Box$ означает *везде* или *всегда*, а $\Diamond$ *кое-где* или *иногда*. Тогда мы имеем дело с пространственно-временными модальностями, используемыми в так называемой *временной логике*.

Одним из важных разделов модальной логики является *деонтическая логика*, изучающая выражения типа *обязательно*, *позволено*, *запрещено* и т. п. Кстати, слово «деонтический» в переводе с древнегреческого означает «как должно быть». В деонтической логике слово «необходимо» используется в смысле *должно*, а



слово «возможно» в смысле *допустимо*. В контекстах, где имеет место такая смысловая трансформация слов «необходимо» и «возможно», «должно» и «допустимо», указывают, например, на моральное или юридическое долженствование, допустимость. Следует подчеркнуть, что нормативные выражения составляют предмет изучения деонтической логики.

Особый раздел модальной логики представляет собой *эпистемическая логика*, в которой изучаются модальности типа «знаю», «верю», «сомневаюсь» и соответствующие им выражения типа: *«некто знает, что...»*; *«некто верит в то, что...»*; *«некто сомневается в том, что...»*. Слово «эпистема» в переводе с древнегреческого означает «знание».

Все указанные модальности имеют как общие черты, так и свои специфические особенности. С учетом последнего необходимо иметь в виду, что перечисленные аспекты модальностей формально несводимы друг к другу, хотя и не разделены непреодолимой стеной.

Познакомимся еще с одним человеком, стоящим у истоков современной модальной логики. Им является Георг Хенрик фон Вригт (1916 2003), который своими логико-философскими работами оказал сильное влияние на развитие теоретической мысли в Скандинавских странах, Великобритании, США. Родился он 14 июля 1916 г. в Гельсингфорсе (Хельсинки), где закончил школу и поступил в университет. Студенческие годы Вригта связаны также с Кембриджем (Англия). Во время учебы в Англии он сблизился с выдающимся логиком и философом Людвигом Витгенштейном (1889 1951). После ухода Витгенштейна на пенсию Вригт стал его преемником в Кембриджском университете. В 1951 г. он возвращается в Финляндию и через десять лет становится действительным членом Академии Финляндии.

Научной и общественной деятельности финского ученого можно только позавидовать. Его избирали президентом Международного союза истории и философии науки, президентом Международного института философии, вице-президентом Федерации международных обществ философии.

Талантливым учеником фон Вригта, а ныне всемирно известным ученым является Якко Хинтикка, финский философ и логик.

В послевоенные годы фон Вригт много и успешно работал над проблемами модальной логики, результатом чего явилось создание системы модальной логики, носящей название логики Вригта Фейса.

В 1951 г. им была выдвинута идея построения деонтической логики. По мнению специалистов, работу фон Вригта «О деонтической логике» можно считать первым и наиболее значительным исследованием в этой области, хотя изучением данной проблематики занимались и до него. Попытки осмыслить проблемы деонтической логики привели его к мысли о необходимости разработки *логической теории человеческих действий, логики предпочтений и оценок.*

Логико-философский анализ человеческого действия чрезвычайно ценен с теоретической и практической сторон. Во-первых, такой анализ способствует развитию понятийного аппарата деонтической логики. Во-вторых, с помощью подобного анализа логики получают выход на этику, аксиологию (науку о ценностях) и юриспруденцию.

Исключительно велика заслуга фон Вригта в деле публикации творческого наследия Витгенштейна и работ о его жизни и творчестве.

С именем Витгенштейна связан важный этап в развитии западноевропейской логики и философии. В своих воспоминаниях фон Вригт писал, что творческая деятельность Витгенштейна инспирировала образование двух значительных философских школ, хотя сам Витгенштейн отвергал приписываемую ему инициативу. Первая школа это школа так называемого

логического позитивизма, или *логического эмпиризма*, которая играла видную роль на протяжении всех 30-х гг. XX столетия. Вторая школа это школа *аналитической* (*лингвистической*) *философии*; иногда ее еще называют *Кембриджской школой*.

Людвиг Йозеф Йохан Витгенштейн родился в Вене 26 апреля 1889 г. Его семья в свое время эмигрировала из Саксонии в Австрию. Дед перешел из иудаизма в протестантизм. Мать принадлежала к римской католической церкви. Отец, по образованию инженер, был видной фигурой в сталелитейной промышленности.

Мать оказывала сильное художественное влияние на семью. Она и муж имели музыкальное образование. В доме Витгенштейнов часто бывали такие выдающиеся музыканты, как И. Брамс (1833 1897) и Г. Малер (1860 1911).

Людвиг был самым молодым среди пяти братьев и трех сестер. До четырнадцати лет он обучался дома, а затем три года в школе, после окончания которой в 1906 г. поступил в Высшую техническую школу в Берлине. То, что он выбрал инженерное дело, было, по словам фон Вригта, следствием его ранних интересов к технике, нежели отцовского влияния. На протяжении всей своей жизни Витгенштейн интересовался техникой. Даже в последние годы своей жизни он мог посвятить целый день изучению паровой машины, представленной в музее.

Витгенштейн пробыл в Берлине до весны 1908 г. Затем он направляется в Англию, где поступает на инженерный факультет Манчестерского университета. В течение трех лет наш пилигрим занимается исследованиями в области аэронавтики. Одновременно у него растет интерес к чистой математике и ее основаниям.

Когда Витгенштейн увлекся математикой, ему посоветовали ознакомиться с книгой Б. Рассела и А. Н. Уайтхеда (1861 1947) «Принципы математики», первый том которой увидел свет в 1910 г. Считается, что эта книга оказала сильное влияние на последующее развитие его теоретического мышления, и она же, вероятно, заставила его с головой уйти в чтение теоретических работ Г. Фреге, оказавшего мощное воздействие на становление логической семантики. По мнению фон Вригта, идеи новой логики Фреге и Рассела послужили теми воротами, которые открыли Витгенштейну дорогу в философию.

Надо заметить, что интерес к философии проявился у Витгенштейна еще в юности. Уже в ту пору он был знаком с книгами Б. Спинозы (1632 1677), С. Кьеркегора (1813 1855) и других выдающихся философов прошлого. Увлечения математикой, логикой и философией поставили Витгенштейна перед проблемой выбора жизненного пути, и он отправляется в Йену за советом к Фреге. Произошло это осенью 1911 г. Фреге, внимательно выслушав молодого человека, посоветовал ему отправиться в Кембридж и там заняться научными изысканиями под руководством Рассела. Витгенштейн так и поступил. Он пробыл в Кембридже с 1912 по 1913 г.

Наступила осень 1913 г. Витгенштейн со своим другом, молодым кембриджским математиком, отправляется в Норвегию. Чем привлекли его молчаливые сопки и фиорды далекой северной страны?

Он ищет уединения, чтобы осмыслить полученные знания и успокоить свою мятущуюся душу. Север должен ее остудить и закалить. Он овладевает норвежским языком, строит себе хижину в уединенном месте и все крепче привязывается к этому суровому краю. Но мир так мал! Не укрыться в нем от смертельно леденящих ветров войны.

Август 1914 г. спутал все творческие планы нашего отшельника. Витгенштейн возвращается на родину и вступает добровольцем в австро-венгерскую армию.

Что это было вспышка патриотизма, испытание своего характера или нечто другое? Ответов нет.

В 1915 г. он отправляется в Моравию для подготовки к получению офицерского чина. В 1918 г. его переводят на Южный фронт, где бравый офицер доблестной австро-венгерской армии попадает в итальянский плен. В вещмешке пленника находились черновые наброски знаменитого в недалеком будущем «Логико-философского трактата», основная цель которого постичь сущность языка, его главные функции и структуру. Логика, язык и мир таковы три главные проблемы «Трактата».

В плену заканчивается работа над рукописью, один из экземпляров которой пересылается в Кембридж Расселу, а другой в Германию Фреге. Вскоре после войны рукопись была опубликована вначале в Германии (1921), а затем в Англии (1922).

В 1920 г., успешно пройдя краткосрочную подготовку на педагогических курсах, Витгенштейн начинает учительствовать в горной австрийской деревушке. Австрийские Альпы это не сопки Норвегии, но общее и здесь и там молчаливые каменные громады, словно предрасполагающие к неспешным размышлениям.

Период войны был периодом мучительных исканий и духовного кризиса. В ходе этой чудовищной мясорубки, находясь в Галиции, он открыл для себя Л. Н. Толстого (1828 1910) и русскую литературу вообще. И сейчас, став деревенским учителем, Витгенштейн соединил толстовство с идеями толстовской педагогики, аскетизм с высокой моральностью и искренностью чувств.

Занятия с детьми и опыт составления словаря для начальных школ способствовали выработке нового взгляда на язык. Особое внимание Витгенштейн обращал на то, как дети употребляют слова в зависимости от ситуации (контекста).

С 1920 по 1926 г. он учительствует в различных отдаленных деревушках Австрии.

В результате конфликта с окружающими Витгенштейн оставил свой пост школьного учителя и стал садовником в монастыре около Вены, но проработал там недолго. Вскоре он занялся постройкой большого особняка в Вене для одной из своих сестер. В это же время он начинает увлеченно заниматься скульптурой в студии своего друга-художника.

В начале 1929 г. Витгенштейн переезжает в Кембридж, почувствовав, что снова может заниматься творческой работой. После гитлеровского аншлюса Австрии он становится британским подданным.

В 1935 г. Витгенштейн посетил СССР, предварительно овладев русским языком. К сожалению, мотивы и цели этого посещения совершенно невнятно представлены в его литературных биографиях.

Но вернемся в Кембридж. Работая в 30-е гг. в одном из самых престижных университетов Англии, Витгенштейн блестяще защитил докторскую диссертацию на основе своего «Трактата» и занялся преподавательской работой. В этот период у него начинает зреть новый взгляд на язык. Вероятно, сказались годы учительствования, а также знакомство с идеями математического интуиционизма Брауэра и психологическими концепциями. Он начинает отказываться от некоторых важнейших идей «Трактата» и вступает на путь экспериментирования с языком. В фокусе его внимания теперь находится теория значения (семантика), схематичные наброски которой представлены в «Голубой книге», а также в «Коричневой книге».

Этой переоценке ценностей предшествовали некоторые небезынтересные события в жизни философа.

Катализирующее влияние на становление философии позднего Витгенштейна оказали двое его кембриджских коллег   английский математик и логик Ф. П. Рамсей и итальянский экономист П. Сраффа (1898 1983), близкий друг основателя итальянской компартии Антонио Грамши (1891 1937).

Витгенштейн рассказывал, что его дискуссии с итальянцем напоминали обрубку веток у дерева, которое может вновь зазеленеть только благодаря своим собственным жизненным силам, если таковые имеются.

В качестве едва ли не легендарного события приводится курьезный эпизод из беседы Витгенштейна со Сраффом. Однажды, когда Витгенштейн доказывал, что пропозиция (высказывание) имеет ту же логическую форму, что и факт, Сраффа сделал жест, используемый неаполитанцами для выражения презрения, и спросил Витгенштейна, какова логическая форма того, что он сделал. Витгенштейн вспоминает, что это был вопрос, пошатнувший его веру в возможность рассматривать факт как логическую форму. Озадаченный подобным вопросом, он предпринимает ревизию традиционных взглядов на значение слов естественного языка, в результате чего делает решительные шаги в сторону от установок «Трактата».

Первая глобальная попытка переоценки семантических идей относится к 1933 1934 гг., когда Витгенштейн начал читать два курса лекций, один из которых назывался «Философия для математиков». После 3 4 недель занятий он заявил слушателям, что не может продолжать чтение лекций. Из всего количества слушателей (30 40 человек), выбрав пятерых, он начал диктовать им то, что впоследствии получило название «Голубой книги». Как и «Голубая книга», следующая книга («Коричневая книга») явилась результатом лекций, продиктованных в период 1934 1935 гг.

«Голубая книга» начинается с вопроса о природе значения слова. Отвечая на поставленный вопрос, Витгенштейн приходит к выводу, что понятие «значение» применительно к естественному языку следует заново переосмыслить и существенно уточнить. По его мнению, значение слова или фразы следует искать в *способах их употребления*, или, как он сам говорит, *значение фразы для нас характеризуется ее употреблением*.

По Витгенштейну, язык есть множество типов деятельности, один из которых относится к разряду обозначающих (знаковых деятельностей), а другие к обозначаемым (значимых деятельностей, значений).

Получить значение слова   значит применить одну форму деятельности для воспроизводства другой. Относительно языка такой формой воспроизводства, вернее, производства (конструирования) значений служат соответствующие типы грамматических правил. Следовательно, чтобы усвоить язык, необходимо усвоить совокупность различных форм знаково-значимой деятельности (например: жестикуляция, мимика, звуковая речь и т. д.). В витгенштейновском смысле умение пользоваться языком означает овладение не одним видом практики, но многими ее разновидностями.

Апофеозом витгенштейновского экспериментирования с языком явились «Философские исследования» (1945 1949). Здесь мы сталкиваемся с наиболее яркими чертами его воззрений на смысловую сторону выражений естественного языка.

С давних пор считалось, рассуждает Витгенштейн, что слово имеет значение, если оно является именем чего-то внелингвистического. Предполагалось, что слово   это своего рода индикатор, указательный знак. Таким образом, спрашивать о значении слова   значит спрашивать, что данное слово замещает. В качестве типичного исторического примера Витгенштейн ссылается на Августина Блаженного (354 430), своего любимого автора. При этом он замечает, что Августин ничего не говорит о различии между видами слов (*существительное, глагол, прилагательное* и т. д.).

Полагаясь на здравый смысл и житейский опыт, мы относительно легко можем определить значение таких слов, как «яблоко», «красное», но уже гораздо труднее это сделать применительно к словам более абстрактного содержания (например, «фрукт», «бесцветный» и т. п.). Мы в состоянии указать на яблоки, на красный цвет, но не в силах аналогичным образом указать, ткнув пальцем, на фрукт вообще, на цвет вообще, на бесцветность вообще. Поэтому, считает Витгенштейн, если кто-то спрашивает, что слово именует, это значит, что вопрос базируется на неправильном понимании сути дела. В данном случае вопрос должен формулироваться так: как используется то или иное слово?

В исторической перспективе мы можем рассматривать весь процесс развития языка как разделение языкового труда. В индивидуальном же плане речь должна идти об использовании слов в качестве одной из возможных игр, посредством которой дети усваивают свой родной язык. Витгенштейн предлагает называть такого рода игры *языковыми играми*. В более строгом научном смысле термин «языковая игра» используется им с целью подчеркнуть тот факт, что разговорный язык является частью активности как таковой или своего рода формой жизни, т. е. одним из видов собственно человеческой, а не животной жизнедеятельности.

Как многообразен мир человеческой деятельности, так многообразны и виды языковой деятельности в пределах одного естественного языка, не говоря уже о других языках, других культурах и цивилизациях. По Витгенштейну, Августин ошибался, полагая, что значение каждого слова зависит от замещаемой им чувственной или образной предметности. При этом философ проявляет известное снисхождение ко взглядам Августина на язык, отмечая, что августиновская концепция языка истинна лишь для одной специальной и довольно примитивной языковой игры, а не для всего их разнообразия. Действительно, мы вполне можем представить ситуацию, где имеются все основания для утверждения, что значением слова является вещь, на которую данное слово указывает. Но как быть в тех случаях, когда требуется отдать приказ, выразить сочувствие, гнев, задать вопрос и т. д.? Здесь августиновская концепция демонстрирует свою полную беспомощность. Вот почему Витгенштейн настаивает, и не без оснований, на том, что язык можно считать более или менее усвоенным, когда некто в состоянии играть в различные языковые игры, т. е. в состоянии использовать слова согласно определенным целям (например, задавать вопросы, отдавать приказы и т. д.), а не как вербальную этикетку.

По-видимому, не случаен тот факт, что «Философские исследования» открываются полемикой с Августином, взгляды которого в определенном смысле соответствуют взглядам Витгенштейна периода «Логико-философского трактата». В «Трактате» слово является значимым, если и только если оно является именем чего-то конкретного. В «Философских исследованиях» слово более не является только именем; слово может быть использовано как имя, указывающее на вещь, но, кроме этого, оно может быть использовано и многими другими способами. Соответственно изменившимся воззрениям Витгенштейн вкладывает совершенно новое содержание в термин «язык». Теперь этот термин применим не только к одному-единственному феномену, а охватывает обширный класс неопределенного числа языковых игр. Стало быть, язык нельзя сводить только к картине реальности. Его мировоззренческие возможности настолько богаты, что язык способен выполнять множество самых разнообразных функций.

Последние два года жизни Витгенштейн тяжело болел, мучимый раком. Умер он 29 апреля 1951 г.

Ранние логико-философские исследования Витгенштейна осуществлялись в кругу тех проблем, с которыми имели дело Фреге и Рассел. Он сделал интересные открытия, касающиеся нового символизма для так называемых *функций истинности*, что позволило ему объяснить логическую истину (и только логическую истину!) как тавтологию. Хорошо известные сегодня таблицы (матрицы) истинности были изобретены также им.

Поздние логико-философские исследования Витгенштейна целиком сосредоточены на теории значения. Здесь мы вплотную приблизились к вопросу о том, что такое семантика.

Семантика довольно молодая дисциплина, хотя корни ее следует искать в античности, в первых опытах этимологического анализа. В XIX в. французский филолог М. Ж. А. Бреаль (1832 1915) ввел в научный обиход термин «семантика» (гр. sema *знак*; гр. semantikos *обозначающий*). Правда, спорадические попытки в этом ключе делались и раньше. Так, в 1825 г. немецкий ученый, преподаватель латинской филологии Х. Райзиг весьма определенно высказался о необходимости теоретических исследований в области значений выражений естественного языка. В своих лекциях он говорил о насущной потребности развивать новое направление лингвистических исследований *семасиологию*, представители которой должны изучать принципы, регулирующие эволюцию значений слов. Сам он, однако, не развернул эту идею в теорию. Его лекции, опубликованные посмертно, были известны очень узкому кругу специалистов. Прочное же утверждение идей семантики в филологии связано с именем Бреаля, который не только дал название новой науке, но и внес существенный вклад в ее теоретическое обоснование. В одной из своих программных статей французский ученый доказывал, что помимо исследований формальных элементов человеческой речи (фонетика и морфология) существует также наука о значении лингвистических выражений, которую он предложил назвать *la semantique*.

Вскоре после работ Бреаля усилиями философов, логиков и психологов значение термина «семантика» было значительно расширено. Семантику стали рассматривать уже не как отрасль филологии, а как отрасль общей науки о знаках (семиотики).

Ко времени, когда семантика появилась на исторической сцене в лице ее теоретиков, наука о языке была исключительно исторической дисциплиной, прочными узами связанной со сравнительно-исторической грамматикой. Поэтому и семантика некоторое время носила сугубо исторический характер. Ее основной целью являлась классификация изменений значений слов в историческом плане, а также выявление некоторых закономерностей, которым подчиняются эти изменения.

После опубликования в 1916 г. знаменитого соссюровского «Курса общей лингвистики» произошла существенная переоценка взглядов на язык и лингвистическую теорию. Новая концепция языка, предложенная швейцарским языковедом Фердинадом де Соссюром (1857 1913), получила название *структуралистской*. Представление о том, что мир скорее состоит из отношений, чем из вещей, является исходной установкой того способа мышления, который мы называем *структуралистским*. Посредством этого термина подчеркивается, что природа изолированного элемента лишена всякого значения. Элементы определяются через отношения ко всем другим элементам, включенным в некоторую ситуацию. Эта методологическая установка является следствием критики традиционной лингвистики, рассматривающей язык как агрегат отдельных единиц, называемых словами, каждое из которых имеет свое отдельное значение.

Структуралистская теория языка значительно подчеркнула роль синтаксиса. Что же касается семантики, то в этой сфере структуралисты испытали серьезные трудности, в результате чего большинство из них сосредоточили свои усилия на анализе в областях фонологии и грамматики. Дело в том, что фонетические и грамматические ресурсы того или иного языка являются хорошо организованными и ограниченными в своем количественном составе. Лексический же словарь это весьма разрозненное собрание многочисленных элементов. Помимо того, фонетическая и грамматическая системы относительно стабильны в определенных промежутках исторического времени, словарь же непрерывно изменяется. Поэтому естественно, что слова не могут анализироваться с той строгостью и точностью, с какой это делается в фонологии и грамматике.

В этот кризисный для науки о языке момент свое слово сказали логики, точнее, повторили уже сказанное.

Первым из них был уже известный нам немецкий математик и логик Готлоб Фреге, осуществивший подлинную революцию в сфере логической семантики, что не только сказалось на всем последующем развитии логической науки, но и отразилось на решении вопросов лингвистической семантики.

Некоторые исследователи творческого наследия Фреге считают, что его научную карьеру можно разделить на шесть периодов. Первый период длился с 1879 по 1883 г. В 1879 г. им был написан фундаментальный труд «Исчисление понятий». В течение последующих четырех лет он пытался разобраться с логической системой, представленной в этой работе.

Второй период начинается с 1884 г. и длится до 1890 г. В 1884 г. были изданы «Основания арифметики». В этой работе поднято большинство главных тем, интересовавших Фреге. В частности, он подчеркивал центральную роль предложений в языке, ибо считал, что только в контексте предложения слово имеет значение. Одновременно резкой критике подвергается так называемая образная теория значения.

Третий период охватывает годы с 1891 по 1904. В 1891 г. были опубликованы его лекции «Функция и понятие», а через два года вышел в свет первый том капитального труда «Основные законы арифметики». Второй том был опубликован в 1903 г. Именно в этот период было осуществлено разграничение *смысла* (нем. Sinn) и *значения* (нем. Bedeutung), что нашло свое отражение в статье «О смысле и значении».

Четвертый период   1905 1913 гг. Этот период был самым непродуктивным в творчестве Фреге, что обусловливалось крахом программы выведения арифметики из логики. Он даже не попытался опубликовать третий том «Основных законов арифметики».

Пятый период длился четыре года   с 1914 по 1918. Весной 1914 г. Фреге написал, но не опубликовал статью «Логика в математике».

Наконец, шестой период (1919 1925)   это период окончательного и печального смирения с крахом своей логицистской программы. За это время ученый ничего не опубликовал.

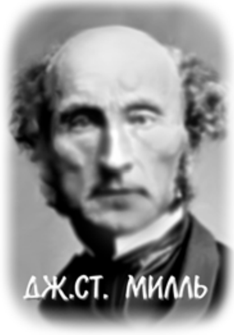
Творчество Фреге это последний шаг в математизации логики в XIX столетии. Несмотря на многие неудачи, Фреге внес большой вклад в развитие математической логики и логической семантики. Своими трудами по логике он стремился заложить новую основу арифметики, алгебры и математического анализа.

Первые фрегевские произведения были нацелены на разработку формальной системы, внутри которой могут быть выполнены математические доказательства. Это было вызвано тем, что в конце XIX столетия математика находилась в кризисном состоянии, и Фреге посвящает большую часть своей жизни преодолению этого кризиса. Поставленная цель заставила его вплотную заняться вопросами логики. Существующий аппарат логических систем, методы и теории было невозможно использовать в математике. Поэтому Фреге пришлось приложить значительные усилия для разработки адекватного математике логического инструментария. В свою очередь это побудило его обратиться к философским основам традиционной логики.

В начале XX в. еще трудно было оценить значение разработок Фреге для логики, лингвистики и философии. К тому же в годы своей активной творческой деятельности немецкий ученый не имел широкой популярности. Его имя было известно только узкому кругу лиц.

Семантическая концепция Фреге произросла на основе анализа имен собственных. Его ближайшим предшественником по данному вопросу был английский философ и логик Дж. Ст. Милль (1806 1873), чье сочинение «Система логики» представляет собой индуктивистскую трактовку логики как общей методологии наук.

В «Системе логики» Милль различает *коннотативные* и *неконнотативные имена*. По его мнению, коннотативные имена это такие имена, которые обозначают предметы и подразумевают их атрибуты. Так,



девушка это коннотативное имя, обозначающее предмет, который предполагает атрибуты, выражаемые такими словами, как «ребенок», «взрослый», «женщина» и т. д. По Миллю, все конкретные общие имена являются коннотативными. Например, слово «человек» приложимо к Петру, Джону и т. д. Что же касается собственных имен, то они не являются коннотативными именами, поскольку ими обозначаются индивидуумы, которые только называются, но при этом не указываются их атрибуты. Быть коннотативным именем, или иметь значение, значит сообщать, выражать какую-то информацию. На это оппоненты Милля возражают следующим образом. Допустим, собственные имена не выражают познавательно значимую информацию. Следовательно, имена «Наполеон», «Веллингтон» и «Ватерлоо» соответственно не выражают подобного рода информации. Но почему в таком случае выражает информацию высказывание «Наполеон был разбит Веллингтоном при Ватерлоо»? Казалось бы, исходя из взглядов Милля, можно безболезненно заменить в указанном высказывании собственные имена одного вида на собственные имена другого вида без ущерба для значения высказывания. Но это очевидный нонсенс. Выход из создавшегося положения был предложен Фреге, а затем и другими логиками, которые попытались дифференцировать *обычные собственные имена* и *логические собственные имена*. Впрочем, справедливости ради стоит отметить, что Фреге никогда не затруднял себя попыткой дать точную характеристику категории имени собственного. Впоследствии это вызвало нарекания и острые прения среди логиков.

Фреге приписывает логически уточненным собственным именам не только значение (нем. Bedeutung), но и смысл (нем. Sinn), поскольку значение (в широком смысле слова) высказывания может быть существенно изменено посредством замещения одного собственного имени другим, хотя и с тем же самым значением (нем. Bedeutung). Из этого он делает вывод, что собственные имена должны иметь две семантические функции. Во-первых, они должны *обозначать* (нем. bedeuten) объекты. Во-вторых, они должны *выражать* (нем. drucken aus) смысл. Например, рассмотрим два имени, а именно «вечерняя звезда» и «утренняя звезда». В одном и другом случаях имеется в виду один и тот же объект   планета Венера. Однако хотя их значения (*планета Венера*) и совпадают, но по смыслу они различаются, так как фигурируют разные семантические ситуации (*утренняя* и *вечерняя* звезда). Обратимся еще к одному примеру. Есть два имени   «Вальтер Скотт» и «автор «Веверлея». Известно, что король Георг IV интересовался, является ли Вальтер Скотт автором «Веверлея». Если говорить только об объектах упомянутых имен, то получается абсурд: Георг IV хотел знать, является ли Вальтер Скотт Вальтером Скоттом. Во избежание подобных недоразумений и вводится дистинкция «смысл / значение».

Таким образом, Фреге разграничивает смысл (нем. Sinn) и значение (нем. Bedeutung) «собственных имен». Собственные имена с одним и тем же смыслом имеют одно и то же значение, но, с другой стороны, имея одно и то же значение, они далеко не всегда имеют один и тот же смысл. Кроме того, Фреге признает право на существование (но только не в языке науки!) за такими именами, которые имеют смысл, но не имеют значения (например, *крылатый конь Пегас, Мефистофель, золотая гора* и т. п.).

В свое время нечто аналогичное предвосхитил в XVIII столетии гениальный Готфрид Вильгельм Лейбниц, сформулировавший ряд идей современной математической логики и логической семантики.

Фамилия Лейбница славянского происхождения (Лубенец). В своей биографии философ писал, что предки его по отцу были из Польши и Богемии (Чехии). Его отец, Фридрих Лейбниц, был довольно известным юристом, выполнявшим обязанности делопроизводителя Лейпцигского университета.

Мальчику было шесть лет, когда он потерял отца, старательно развивавшего в ребенке любознательность. От отца он унаследовал практическую сметку и деловитость. После смерти отца воспитание ребенка перешло в руки матери. Мать, умная и практичная женщина, проявляла большую заботу об образовании сына. Она отдала Готфрида в одну из лучших школ Лейпцига.

К двенадцати годам Готфрид хорошо овладел латинским языком и принялся за греческий. Ему не было еще и четырнадцати лет, когда он изумил своих школьных учителей блестящими филологическими и поэтическими способностями.

Во времена Лейбница в школах преподавалась схоластическая логика, рассчитанная на бездумную зубрежку. К тому же она, как правило, преподавалась настолько сухо и бездарно, что вызывала нестерпимое отвращение у преподавателей и учеников. Однако юный Лейбниц сумел увидеть под трухлявым покровом схоластических формул животворное начало. Он начал догадываться, что цели развития логики как научной дисциплины и цели ее преподавания в школе не совпадают. Им предпринимаются попытки сопоставить логику и математику с тем, чтобы расположить элементы логики в математическом порядке   когда одно вытекает из другого.

В своих логических изысканиях Лейбниц не находит поддержки у школьных учителей. Они не только не разрешают его сомнений, но даже укоризненно говорят, что негоже мальчику делать попытки к изобретению новшеств в таких предметах, которые он еще недостаточно изучил.

Двигаясь по дороге, на которую он вступил еще мальчиком, Лейбниц развивал на протяжении всей своей жизни проект *азбуки мыслей*, опираясь на аналогию с языком. Идея эта давно витала в воздухе. Ближайший предшественник Лейбница в данном случае был

Р. Декарт (1596 1650), мечтавший о создании универсального языка науки. Что касается Лейбница, то стоящая перед ним задача была относительно скромна изобрести письменность, с помощью которой можно было бы выражать строгие и однозначные научные мысли. Этот вариант всеобщей научной письменности (*пазиграфии*) наилучшим образом представлен языком математики.

Лейбниц проявил свой яркий гений не только в философии, математике и логике, но и в юриспруденции, истории, литературе, богословии. По мнению его биографов, каждое из перечисленных занятий обеспечило бы ему славу на века.

Немецкому ученому принадлежит несомненная заслуга в создании интегрального и дифференциального исчислений, а также комбинаторного анализа, чрезвычайно полезного инструмента для описания дискретного. Как известно, в комбинаторном анализе мы интересуемся не сходством, а различием индивидуальных элементов, между которыми существуют определенные, выясняемые нами отношения. Лейбниц первым понял, что структура логики есть предмет комбинаторного анализа, исключительная важность которого для математики и логики была окончательно установлена только в XX столетии.

Предпринятая им попытка реформировать логику, доставшуюся в наследство от схоластов Средневековья, была зародышем науки, сводящей все точные рассуждения к оперированию символами. Логика Дж. Буля, изобретенная в середине XIX столетия, являлась частью того, что Лейбниц называл *исчислением высказываний*.

В двадцать лет Лейбниц писал в своем сочинении «О комбинаторном искусстве», что его целью является создание общего метода, с помощью которого все истины могут быть сведены к некоторому виду вычислений.

Лейбниц был одним из первых европейских ученых, который всерьез заинтересовался двоичной системой счисления. На это его вдохновило знакомство с иезуитским патером К. Ф. Гримальди, побывавшим в Китае. Еще до знакомства с патером Лейбниц живо интересовался Китаем. Просветительская деятельность китайского императора, который, по словам Гримальди, высоко ценил европейскую науку и был знаком с трудами Евклида (III в. до н. э.), привела Лейбница в восторг. От иезуита он узнал о древнем китайском счислении. Рассказы на эту тему навели его на мысль изобрести новую арифметику, в которой достаточно двух цифр   1 и 0. Эта двоичная система счисления настолько понравилась философу, что он усмотрел в ней нечто глубоко символическое. По его мнению, двоичная система показывает как бы воочию, что единицы, или монады, достаточно для построения картины Вселенной, ибо комбинации единицы и нуля, дающие всевозможные числа,   это символический аналог комбинаций монад (единиц в философско-физическом смысле) и небытия, дающих всевозможные миры. Однако, как считают историки науки, при всей своей гениальности Лейбниц не смог найти полезного научного применения полученным результатам. Изобретенный им механический калькулятор предназначался для работы только с десятичными числами. Он даже не пытался переделать свою машину под двоичные числа. Возможно, его устрашила очень длинная цепочка двоичных разрядов, необходимых для представления чисел.

Что касается вычислительной машины, то благодаря ее изобретению Лейбниц стал членом Лондонской Академии наук. Эта Академия, известная как Королевское общество, приняла его в свои члены через год после вступления в ее ряды Ньютона.

Работа над вычислительной машиной была инициирована сочинениями выдающегося французского ученого Блеза Паскаля (1623 1662) и его арифметической машиной. Кстати, в честь Паскаля назван один из самых распространенных современных языков программирования. Этот язык разработал швейцарский ученый

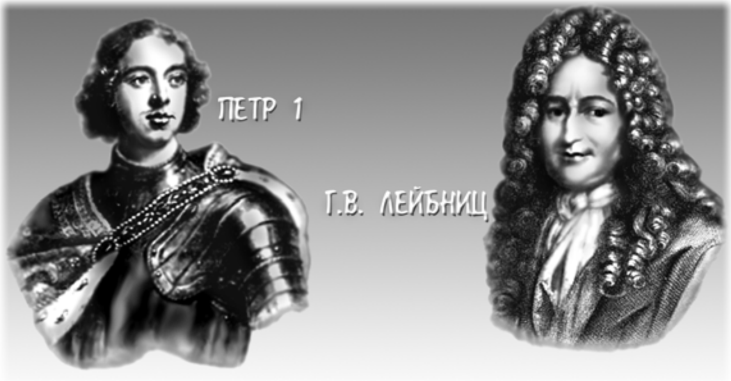
Никлаус Вирт в конце 60-х гг. В 1983 г. язык ПАСКАЛЬ был объявлен официальным языком программирования для учащихся американских средних школ, которые намерены специализироваться в области вычислительной техники и программирования.

Свою работу над арифметической, или суммирующей, машиной Паскаль начал в возрасте девятнадцати лет. Эта машина, известная под названием «паскалина», представляла собой механическое устройство, точнее, ящик с многочисленными шестеренками. Приблизительно за десятилетие, начиная с 1642 г., он построил более пятидесяти различных вариантов машины.

При работе на «паскалине» складываемые числа вводились в машину путем соответствующего поворота наборных колесиков. Изобретенный Паскалем принцип связанных колес явился основой, на которой строилось большинство вычислительных устройств на протяжении следующих трех столетий.

Основной недостаток «паскалины» состоял в неудобстве выполнения на ней операций, отличных от простого сложения. Лейбниц потратил много сил и денег на усовершенствование этой машины. В результате была создана машина, которая могла умножать, делить, возводить в степени и извлекать корни, не говоря уже о сложении и вычитании. Рассказывают, что один экземпляр этой машины попал к Петру I, который подарил ее китайскому императору, желая поразить того достижениями европейского технического гения.

Лейбницу было более пятидесяти лет, когда он впервые встретился с русским царем Петром Великим (1672 1725). Произошло это в середине лета 1697 г. в замке Копенбрюк близ Ганновера. В то время двадцатипятилетний самодержец путешествовал по Европе,



намереваясь посетить Голландию с целью изучения морского дела. До этой встречи с молодым и энергичным русским царем Лейбниц имел о России самые смутные представления как о нецивилизованной, полуварварской стране. Первое знакомство Лейбница с Петром I было непродолжительным, но, тем не менее, у философа осталось сильное впечатление от этого свидания. Второй раз царь и философ встретились осенью 1711 г. при следующих обстоятельствах. Одна из принцесс брауншвейгской фамилии, София-Христина, вышла замуж за царевича Алексея. Дед невесты, Антон Ульрих, взял с собой Лейбница на торжества по этому поводу. Теперь Лейбниц увидел не молодого прожектера, а дальновидного политика, основателя Петербурга, победителя шведов под Полтавой. Петр I с удовольствием беседовал с философом, внимательно выслушивая его идеи и предложения. Особенно его заинтересовал план реформы учебного дела и проект учреждения Академии наук в Петербурге. Осенью следующего года Петр I прибыл в Карлсбад. По желанию царя Лейбниц сопровождал его в Теплиц и Дрезден. Во время этого путешествия был разработан во всех деталях план русской Академии наук. Академия была основана уже после смерти Лейбница. Впрочем, некоторые историки считают, что роль Лейбница в создании русской Академии наук изрядно преувеличина.

Предпоследнее свидание Лейбница с Петром I имело важные следствия для немецкого ученого: он был принят на русскую службу в высоком звании тайного юстиц-советника с пенсией в две тысячи гульденов. В последний раз Лейбниц видел русского царя незадолго до своей смерти.

Лейбниц умер при странных обстоятельствах 14 ноября 1716 г. В последние годы жизни он страдал подагрой. Из всех лекарств доверял тому, которое было ему когда-то подарено приятелем-иезуитом. Приняв лекарство, он почувствовал себя очень дурно. Прибывший врач нашел положение настолько опасным, что сам поспешил в аптеку за лекарством. Во время его отсутствия Лейбниц почувствовал приближение смерти, хотел что-то написать, но был уже не в силах прочесть даже ранее написанное. Тогда он лег в постель, закрыл глаза и умер. Произошло это около десяти часов вечера. Ходили слухи, что философ был отравлен. Завистников и злопыхателей у него хватало.

Ганноверцы равнодушно встретили известие о смерти выдающегося соотечественника. Целый месяц тело философа лежало в церковном подвале без погребения. Почему? Кто-то пустил слух о самоубийстве придворного историографа, объясняя этим задержку в погребении. Как известно, церковь запрещает хоронить на христианском кладбище самоубийц. Но вернее всего причиной задержки было неприязненное отношение лютеранских пасторов к свободомыслящему философу, который равнодушно относился к обрядовой стороне религии, редко ходил в церковь и к причастию. Похороны были настолько скромны и поспешны, что один из приятелей Лейбница написал в своих воспоминаниях: «Его погребли скорее как разбойника, чем как человека, каким он был в действительности, являясь гордостью своей страны». Место, где покоятся останки великого философа, неизвестно.

Главными философскими сочинениями Лейбница считаются «Новые опыты о человеческом разуме», «Теодицея» и «Монадология».

Что такое монада?

Монада (от гр. monas (monados) *единица, неделимое, цельное*) это не единица в арифметическом смысле слова. Монада это не материальный атом. Монада это некое подобие математической точки, которая лишена пространственной протяженности. Физический смысл монады состоит в том, что она есть своеобразный центр физических сил. Монады не возникают и не гибнут. Их возраст равен возрасту мира. «Поэтому сумма вселенной всегда одна и та же», напишет Лейбниц.

Лейбницовская монадология связана с его учением о предустановленной гармонии и с понятием Бога. По Лейбницу, существование мира само по себе не доказывает существования Бога. Существование Бога выводится из наличия мирового порядка, связывающего воедино бесчисленное множество монад. Бог это наивысшая монада, наивысший центр силового притяжения. Если нет иного силового центра, то наш мир, подчиняющийся закону мировой гармонии, есть наилучший из возможных миров.

Как объяснить зло, царящее в этом наилучшем из возможных миров?

Отвечая на этот каверзный вопрос, Лейбниц разрабатывает учение о теодицее (богооправдании). Проблематика теодицеи это лейбницевский вариант традиционной проблематики христианского богословия, в фокусе которой находится вопрос о том, как снять с Бога ответственность за зло, царящее в мире.

Иронизируя над рационализмом Лейбница, насмешливый Вольтер (1694 1778) рисует следующий карикатурный образ доктора философии Панглоса в своем «Кандиде».

Однажды маленький чернявый человечек, свой среди инквизиторов, вежливо сказал, обращаясь к Панглосу:

 По-видимому, вы, сударь, не верите в первородный грех, ибо, если всё к лучшему в мире, тогда не было бы ни грехопадения, ни наказания за грехи.

Ваша милость, но без падения человека и проклятия не мог бы существовать этот лучший из возможных миров, вежливо ответил Панглос.

Панглос не успел полностью высказаться ни о грехопадении, ни о свободе и необходимости. Чернявый сделал знак своему слуге и... Через неделю Панглос, утверждая идею наилучшего из возможных миров, был повешен инквизиторами.

О философской стороне лейбницевской трактовки возможных миров можно спорить до хрипоты. Кто хочет, тот пусть и спорит. Мы же будем помнить, что лейбницевская идея возможных миров была взята в XX столетии на вооружение логиками, занимающимися вопросами семантики. Появилось даже особое направление в логической семантике, известное под названием *семантика возможных миров*.

В логике понятие *возможного мира* соответствует понятию *модели*, которое используется в связи с логико-семантическими процедурами *интерпретации*.

Предположим, у нас есть некоторый формализованный язык *L*. Обычно допускается определенный *универсум* (или, если угодно, *логическая вселенная*), который является совокупностью всех возможных моделей *L* (или всех возможных миров, о которых можно говорить в *L*). Для этого языка подходят только такие знаки (имена), которые имеют ту же самую интерпретацию во всех возможных мирах, какую они имеют в актуальном (нашем) мире. Другие знаки и их комбинации, интерпретация которых в разных мирах может отличаться от интерпретации, имеющей место в актуальном мире, не являются знаками нашего языка *L*.

Но возвратимся к Лейбницу. Наряду с тенденцией к формализму у Лейбница отчетливо прослеживается и другая тенденция, получившая в свете разработок Фреге название «логицизм». Суть логицизма состоит в том, чтобы из логики вывести математику. Для представителей логицизма характерен повышенный интерес к проблемам логической семантики. Этот интерес наблюдается и у Лейбница, который за неимением лучшего вынужден интерпретировать формальные исчисления на материале естественного языка посредством подстановки соответствующих определений вместо символов универсального логического языка. В связи с этим доказательство как формальное следование в системе логического исчисления заменяется доказательством как умением оперировать определениями. Это умение заключается в замене эквивалентного эквивалентным. Здесь Лейбниц сталкивается с феноменом синонимии в его логически препарированном виде.

Исходя из чисто формальных представлений о тождестве (в смысле математического равенства), можно было бы ожидать, что синонимы взаимозаменяемы в любом контексте. Однако детальный анализ показывает, что это далеко не так. Каждый контекст как бы вынуждает их по-разному светиться. Поэтому Лейбниц различает вещь, о которой идет речь, и *способ ее понимания*, иллюстрируя данное различие на следующем примере. Имена «Петр» и «апостол, отрекшийся от Христа», обозначают одну и ту же личность. Следовательно, одно имя может быть поставлено на место другого в силу понятия равенства и правила замены равного (эквивалентного) равным (эквивалентным), но только при условии, что мы не будем рассматривать способ понимания одного и того же индивидуума в разных ситуациях. Учитывая последнее, мы получаем, что высказывание «Петр, поскольку он был апостолом, отрекшимся от Христа, согрешил», имеющее смысл и истинное, становится ложным и бессмысленным при подстановке вида: *Петр, поскольку он был Петром, согрешил.*

Лейбницевский пример анализа феномена синонимии с учетом способа понимания, обусловленного тем или иным контекстом, может быть переформулирован так: *полагать две вещи неразличимыми означает полагать одну и ту же вещь под двумя именами.* Эта формулировка содержит в себе идею фрегевской дистинкции «смысл / значение».

Центральной проблемой фрегевской логики является проблема, остро волновавшая Лейбница, проблема тождества. В своей программной статье «О смысле и значении» Фреге предлагает радикальное решение данной проблемы.

Какова природа тождества? Является ли тождество отношением между вещами или отношением между именами (знаками)?

Анализируя понятие тождества, Фреге отдает предпочтение тождеству между именами вещей. Это объясняется тем, что он пытается объяснить информативность тождественно-истинных утверждений.

До Фреге, если не считать наброски Лейбница, отношение тождества обычно ассоциировалось с отношением между вещами, тогда как познавательная роль различных языковых систем практически игнорировалась. Так, например, «вечерняя звезда» и «утренняя звезда» (вещь X и вещь $У$) после того, как было установлено, что речь идет о планете Венера, рассматривались как целиком взаимозаменяемые имена, поскольку тождество понималось как самотождественность некоторой вещи. Однако, утверждая, что $X = У$, мы неявно выделяем обозначающую функцию знаков. Следовательно, отношение тождества связано не только с вещами, но и со знаками, эти вещи обозначающими.

Так ли это?

В XX столетии Лейбница и Фреге кое-кто обвинял в том, что они плохо дифференцировали и неправильно понимали соотношение знаков и объектов, ошибочно объясняя тождество как отношение между знаками, а не как отношение между наименованными объектами. Критики Лейбница и Фреге при этом ссылались на крайности радикально настроенных философов, утверждавших, что, например, уравнение $1 = 1$ должно быть ложно по той причине, что левая и правая стороны уравнения являются пространственно различными.

И все же понятие тождества у Лейбница и Фреге гораздо богаче, чем это пытаются представить некоторые авторы. Рассмотрим уравнение: $2 + 2 = \sqrt{16}$. В первых классах средней школы дети знакомятся с простейшими арифметическими операциями по типу левой части уравнения, тогда как в старших классах они узнают о существовании иных математических дисциплин, более абстрактных и более сложных. Поэтому левая и правая части уравнений указанного типа несут разную познавательную информацию. К тому же объединение этих математических выражений («$2 + 2$» и «$\sqrt{16}$») в одно уравнение сообщает дополнительную информацию   информацию о единстве разных отделов математического знания.

Таким образом, если мы согласимся с тем, что акт обозначения произволен, зависит от индивидуальных прихотей, то выражение $X = Y$ будет касаться не сути дела, а только принятого нами способа обозначения, что влечет за собой путаницу в голове и препятствует передаче полезной информации. Поэтому Фреге и предлагает дополнить понятия «знак» и «значение» понятием «смысл», которое является в определенном плане отражением способа представления обозначаемого данным знаком содержания (значения).

Говоря иначе, если отношения тождества целиком зависят от отношений между значениями (референтами, предметами) тождественных выражений, то форма выражения не имеет познавательного значения. Следовательно, если выражение «$A = A$» не расширяет нашего знания, то не может расширить нашего знания и выражение «$A = B$». Тем не менее интуитивно ясно, что два указанных выражения отличаются по своей познавательной ценности: если «$A = A$» не сообщает нам ничего нового, то «$A = B$» что-то новое сообщает. С учетом этой интуиции можно заключить, что тождество не является отношением только между значениями (референтами).

Допустим теперь, что тождество   это отношение между формами выражений. В таком случае форма выражения «$A = B$» сообщает нам, что знаки A и B используются для представления одного и того же предмета. Иными словами, тождественные утверждения должны сообщать нам не только информацию о знаках и их комбинациях, но и нечто о реальном мире. Поэтому тождество не может быть отношением только между выражениями.

Как же разрешить эту задачу?

Согласно Фреге, помимо формы выражений и их значений (референтов) следует принимать в расчет еще третий фактор *способ, посредством которого значение представляется.* Поскольку один и тот же объект познания может быть представлен различными теориями, то утверждение тождества типа $A = B$ сообщает нам больше, чем утверждение типа $A = A$. Но и здесь не всё так просто. Ученые не без оснований предостерегают от мнения, что тавтология (вспомним Витгенштейна) является чем-то семантически неинформативным. Дело в том, что существуют определенные утверждения, которые являются тавтологиями, поскольку они логически вытекают из других утверждений, взятых аксиоматически, и которые тем не менее рассматриваются в качестве информативных. Самым очевидным примером этого являются математические утверждения. Например, $x^2 \quad y^2 = (x + y) \times (x \quad y)$ необходимо истинно для всех значений x и y. Однако сообщение этого утверждения тому, кто недостаточно хорошо знаком с математикой, рассматривается как увеличение его знания.

Наш экскурс в историю идей лингвистической и логической семантики обусловлен тем, что человек должен отдавать себе ясный отчет в следующем: язык это не сотрясение воздуха и не каракули на клочке бумаги, а исключительно важный инструмент познания. Поэтому знание функциональных возможностей различных языковых систем (естественные языки, различные искусственные языки) является сегодня едва ли не обязательным условием для вхождения в царство чистой науки.

Так как в данном случае мы имеем дело с вопросами логической семантики, следует сделать сразу же некоторые уточнения, взяв за исходные рассуждения профессора математики Принстонского университета (США) Алонзо Чёрча (1903 1995), известного научному сообществу своим большим вкладом в математическую логику.

Чёрч был одним из американских пионеров в области математической логики. Он сделал большой вклад в кибернетику, в частности благодаря своей теории алгоритмов.

Получил образование в Принстонском университете, был стипендиатом Гарвардского университета и год провел в университете Гетингена (Германия). После возвращения в США преподавал математику и философию в Принстонском университете (1929 1967).

Его учениками были: А. М. Тьюринг, С. К. Клини, Дж. Кемени, Р. М. Смульян, М. Дэвис и др. Многие из его научных инноваций относятся к 30-м гг. В то время им было разработано теория *лямбда*-исчисления, которая позднее сыграло очень важную роль в развитие кибернетике. Чёрч и Тьюринг, независимо друг от друга, сформулировали идею, гласящую, что функция вычислима, если она рекурсивна.

Так называемый «тезис Чёрча Тьюринга» помог К. Гёделю в его математических исследованиях. Как известно, в 1931 г. Гёдель доказал, что в элементарной математике имеются истины, которые не могут быть доказаны или опровергнуты на базе соответствующих аксиом внутри данной системы.

В 1936 г. Чёрч принял участие в создании «Журнала Символической Логики» («Journal of Symbolic Logic»), редактором которого оставался до 1979 г. Его перу принадлежит хорошо известный во всем мире учебник «Введение в математическую логику» («Introduction to Mathematical Logic», 1956).

Чёрч предлагает нам представить себе людей, пользующихся формализованным письменным языком, а также представить себе сторонних наблюдателей, которые не только не понимают этого языка, но и вообще не верят, что это язык. Такого скептика не стоит переубеждать. Лучше предложить ему поиграть в одну любопытную игру, связанную с конструированием логического языка. Вначале мы расскажем ему о синтаксических критериях, в соответствии с которыми формулы конструируемого языка признаются правильно построенными. Затем мы познакомим его с критериями, в соответствии с которыми последовательность правильно построенных формул признается в качестве вывода или доказательства.

На этом уровне наблюдатель-скептик вполне довольствуется тем, что используемые символы искусственного языка имеют такое смысловое содержание, которым обладают, например, различные фигуры в шахматах. Для него формула языковой игры аналогична позиции на шахматной доске и имеет значение лишь как один из этапов игры. Поэтому, пока он будет смотреть на использование какого-либо научного языка просто как на игру, мы не выйдем за рамки синтаксиса данного языка. Не случайно, когда дело доходит до семантики, наш скептик становится до неприличия раздражительным. Представьте себе такую удивительную картину: вы передвигаете шахматную фигуру, а у нее есть на этот счет свое особое мнение и она на маленьких кривых ножках бежит, куда ей заблагорассудится. В области логической семантики случается и не такое.

Что относится к семантике формализованного языка?

В данном случае к ней относится то, что можно понять, лишь зная следующее: правильно построенные формулы обладают вполне определенным смысловым содержанием, т. е. они тем или иным способом принимают значения. Принять значение в логическом контексте значит осуществить вполне определенные логические процедуры интерпретации.

Изучение средствами логики интерпретации формализованного языка относится к компетенции *логической семантики*. Этим логическая семантика существенно отличается от семантического анализа естественного языка. Говоря проще, логической семантикой можно назвать науку, занимающуюся связыванием логических символов с некоторыми логически сконструированными предметами (объектами), выступающими в роли значения (референта).

Логическая семантика не занимается изучением всего круга семантических проблем. Она занимается лишь теми проблемами, которые изучаются строгими методами. В данном случае имеется в виду построение логических языков.

Сужение круга семантических проблем, решение которых доступно логической семантике, определяется выбором способов избавления от семантических парадоксов. Этот выбор позволяет оценить логическую эффективность той или иной семантической теории.

Решение проблем семантических парадоксов привело в конечном счете к различению языка-объекта (языка, о котором идет речь) и метаязыка (языка, на котором говорят о языке-объекте).

Сегодня можно считать бесспорным, что нельзя смешивать выражения, которые мы применяем для высказываний о внеязыковой реальности, и выражения, с помощью которых мы высказываемся о выражениях по поводу внеязыковой реальности. В связи с этим необходимо разделить первоначально единый язык на два языка. Первый из них является языком, на котором мы говорим о предметах окружающего нас мира. Иногда этот язык называют *предметным языком* (*языком предметов*), но чаще используют термины «язык-объект», «язык объектов», «объектный язык». Другим языком является тот, в котором можно формулировать высказывания о выражениях языка-объекта. Этот язык называется *метаязыком.* Метаязык должен быть всегда богаче языка-объекта, т. е. все выражения языка-объекта должны быть выразимы в метаязыке (А. Тарский).

При построении формализованного языка (языка-объекта) необходимо располагать соответствующим метаязыком, без помощи которого невозможно формулировать основные правила построения языка-объекта.

Построение формализованного языка можно разделить на две части   синтаксическую и семантическую. Синтаксическая часть состоит из неинтерпретированного формализованного языка, а семантическая касается интерпретации формализованного языка.

С синтаксической точки зрения формализованная языковая система определяется следующим образом:

1. Класс исходных символов (словарь), включающий переменные, константы и вспомогательные символы. Конечная последовательность символов называется *выражением.*
2. Класс термов   это подкласс класса всех выражений. Каждая переменная есть терм.
3. Класс формул   подкласс класса всех выражений.

Если p *и* q *термы, то* $p \vee q$ *формула.*
Если p *формула, то и* $\neg p$ *формула.*
Если p *и* q *формулы, то* $p \to q$ *формула.*

4. Класс аксиом   подкласс класса всех формул.
5. Конечный класс правил вывода, согласно каждому из которых формула, именуемая *заключением*, непосредственно выводима из конечного класса формул, называемых *посылками.*

Правила, определяющие принадлежность первым трем из перечисленных классов, называются *правилами образования*, а те, которые определяют принадлежность к последним двум классам, *правилами преобразования*.

Достаточно ли сказанного для получения формализованного языка?

Нет, недостаточно. Мы не будем иметь формализованного языка до тех пор, пока не будет указана его интерпретация. А для процедур интерпретации требуется наличие метаязыка.

С помощью метаязыка, более богатого по сравнению с конструируемым формализованным языком (языком-объектом), мы формулируем определенные семантические правила. Посредством этих правил для каждой правильно построенной формулы определяется то, каким образом данная формула принимает значение (например, *истина* или *ложь*). Иными словами, семантические правила, указывающие интерпретацию, должны быть такими, чтобы аксиомы нашего формализованного языка всегда имели соответствующее истинностное значение.

Интерпретация формализованной языковой системы будет считаться правильной, если при этой интерпретации все аксиомы будут всегда принимать значение *истина*. В противном случае интерпретация считается неправильной.

Формализованный язык называется правильным или неправильным в зависимости от того, правильна или неправильна интерпретация, при помощи которой он получен в рамках определенной логической системы.

Применительно к логике вопросы семантики должны формулироваться специфическим образом, с учетом следующего общего положения: *изучение интерпретации языка именно как интерпретации называется семантикой* (А. Тарский, А. Чёрч). Что же касается специфики, то она определяется использованием соответствующего метаязыка.

Сложно?

Да.

Должен признаться, этот раздел один из наиболее сложных. И если что-то или многое покажется непонятным, то пусть читатель не отчаивается. В данном случае преследовалась цель продемонстрировать сложность логических проблем и рассуждений, но не для отпугивания, а для выработки уважительного отношения к работе тех, кто прокладывает новые пути развития теоретической мысли и расширяет диапазон практического использования логического инструментария. Хочу с сожалением добавить: еще очень мало хороших популярных книг по модальной логике и логической семантике. По-видимому, сказывается относительная молодость этих логических дисциплин, в результате чего ученые, занятые серьезными делами, просто не успевают оглянуться и вспомнить о тех, кто готовится или только надеется прийти им на смену. Не будем их упрекать. Каждый из них, если он действительно ученый, а не представитель от науки, занят нужным, полезным делом. Давайте же им помогать своим внимательным и почтительным отношением к науке, которую мы выбираем и как профессию, и как смысл своего повседневного трудового бытия.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Почему представители интуиционизма в математике отвергают закон исключенного третьего?
2. Какова связь интуиционизма с конструктивными тенденциями в математике?
3. Что такое конструктивность в математике и логике?
4. Охарактеризуйте теорию нечетких множеств (подмножеств).
5. Что вы можете сказать о нечеткой логике и ее основных понятиях?

6. Что изучает модальная логика? Перечислите основные направления исследований в области модальной логики.

7. Объясните функциональное назначение дистинкции «смысл / значение».

8. Кто автор понятия «возможные миры»? Что вы знаете об этом авторе?

6

ВОЗВРАЩАЯСЬ НА КРУГИ СВОЯ

ГЛАВА 6
ВОЗВРАЩАЯСЬ НА КРУГИ СВОЯ

Об одном происшествии на Военно-Грузинской дороге, а также об ангелах и кибернетике. Из жизни того, кто придумал оригинальное название для науки об управлении и связи в животном мире и в мире машин. Что же такое кибернетика? Вклад в теорию логических автоматов. О талантливом сыне преуспевающего будапештского банкира. Всё началось с «дифференциального анализатора». На заре «искусственного интеллекта». Упражнения.

Бейте его, товарищ Бендер! истошно завопил Ипполит Матвеевич.

Отец Федор, похитивший концессионную колбасу, стремительно лез на совершенно отвесную скалу.

Отдай колбасу, дурак! Я всё прощу! напрасно взывал Остап.

Отец Федор уже ничего не слышал. Он очутился на ровной площадке, где им овладел тоскливый ужас. Несчастный понял, что слезть вниз ему никак не удастся.

Спустилась ночь. В кромешной тьме анахорет-неудачник ревел так, что временами заглушал Терек.

На третий день отец Федор стал проповедовать птицам, почему-то склоняя их к лютеранству.

Только через десять дней из Владикавказа прибыла пожарная команда и, сняв проповедника, увезла его в психиатрическую лечебницу.

Если бы у отца Федора была эффективная обратная связь, ему бы не пришлось вести душеспасительные беседы с царицей Тамарой и вертлявыми, любознательными ангелами, которые палец о палец не ударили, чтобы помочь пострадавшему.

По-видимому, о таком «ангельском» коварстве догадывался и другой отец отец кибернетики Норберт

Винер (1894 1964), но он это не афишировал. Упорно трудясь над рукописью книги, посвященной вопросам управления и связи в животном мире и в мире машин, он был озадачен необходимостью придумать название для будущей книги. Вначале ему пришла в голову мысль использовать слово «ангел» для обозначения идеи «передающий сообщение», так как ангел это посланник Бога. Однако данное слово, к сожалению, уже было записано за церковью. Тогда он стал искать нужное слово среди терминов, связанных с областью управления и регулирования. Вскоре было найдено греческое слово «kybernetes», обозначающее *рулевой, штурман, кормчий*.

В слове кибернетика Винера привлекало то, что оно больше всех подходило для выражения идеи всеобъемлющего искусства регулирования и управления, применяемого в самых разнообразных областях. Широкое распространение это слово получило в 1948 г., после выхода в свет книги Винера «Кибернетика» с характерным подзаголовком «Управление и связь в животном и машине».

Норберт Винер родился 26 ноября 1894 г. в Колумбии (США). Его родители, польские евреи, были подданными Российской империи. Перебравшись в США, отец Норберта, Лео Винер, стал профессором славянских языков и литературы Гарвардского университета.

Окончив начальную школу в 1906 г., Норберт поступает в Тафтс-колледж, где через три года получает звание бакалавра. Затем на протяжении нескольких лет он слушает лекции в Гарвардском и Корнуэльском университетах. В возрасте 18 лет Винер защищает в Гарвардском университете докторскую диссертацию по философии математики. А вскоре в качестве стипендиата этого же университета он едет в Англию и Германию.

В Кембридже его главным учителем и наставником становится Бертран Рассел. Под его руководством юноша изучает математическую логику и осваивает новые идеи философии науки. Расселу удалось убедить своего ученика в том, что нельзя заниматься философией математики, не овладев глубоко самой математикой.

Весной 1914 г. Винер отправляется в Геттинген, где его учителями становятся Давид Гильберт и Эдмунд Ландау (1977 1938). Летом того же года Винер вернулся в Соединенные Штаты. В Европе уже гремели пушки первой мировой войны.

В начале 20-х гг. Винер снова приехал в Германию. В те годы главным событием математической недели в Геттингене было регулярное заседание Математического клуба. В заседаниях клуба принял участие и Винер.

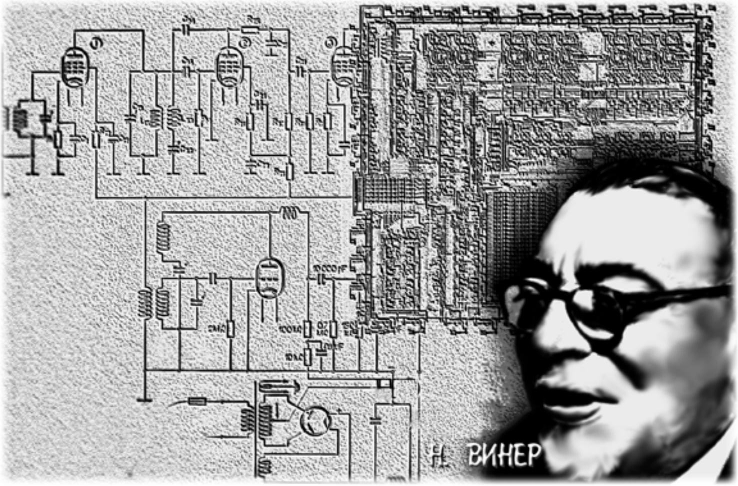
Как-то раз после доклада Винера в Математическом клубе все отправились на совместный ужин. Во время ужина Гильберт начал высказываться о выступлениях ученых, которые ему довелось выслушать за годы жизни в Геттингене.

Доклады, с которыми выступают в наши дни, говорил метр, намного хуже, чем это было раньше. В мое время сделать доклад было искусством. Люди долго готовились к тому, что они хотели сказать, и их выступления были хорошими. Теперь же молодые люди не в состоянии сделать хорошего доклада. Особенно с этим плохо у нас, в Геттингене. Мне кажется, что самые плохие доклады в мире делаются в Геттингене. В этом году они были на редкость плохи. Были, впрочем, нет, я совсем не слышал хороших докладов. Недавно это выглядело совсем плохо. Но сегодня случилось исключение.

Винер застыл, приготовившись выслушать комплимент.

Сегодняшний доклад, сделав небольшую паузу, заключил Гильберт, был самым плохим из всех, когда-либо слышанных здесь.

На докладчика жалко было смотреть. Его кумир произнес ужасные слова. Надо поскорее забыть этот злосчастный ужин, и он его забывает, вернее, никогда не вспоминает.



Во время второй мировой войны Винер участвует в разработке и применении электронно-вычислительной техники для баллистических расчетов, связанных с задачами управления артиллерийским огнем. Занимаясь решением этих задач, он постепенно приходит к идеям, изложенным позднее в книге «Кибернетика».

Умер Винер 19 марта 1964 г.

Один из первых теоретиков кибернетики, талантливый ученый У. Р. Эшби (1903 1972) однажды совершенно точно заметил, что кибернетика относится примерно так же к реальным машинам, как геометрия к физическим объектам. По его словам, современная геометрия не ограничивается представлениями о трехмерных земных телах и их отражением в двухмерном пространстве чертежей. Она свободно рассматривает многообразие форм и пространств. Это многообразие далеко превосходит возможности нашего наглядного мышления. Аналогичное можно сказать и о кибернетике. Ее предметом является область всех возможных машин, а не только тех, которые доступны современной промышленности. Поэтому кибернетики не боятся критиков, указывающих на то, что некоторые из кибернетических идей сегодня не имеют реального физического смысла. Парируя такого рода критику, кибернетики ссылаются на теорию информации, которая характеризуется тем, что она всегда имеет дело с некоторым множеством возможностей.

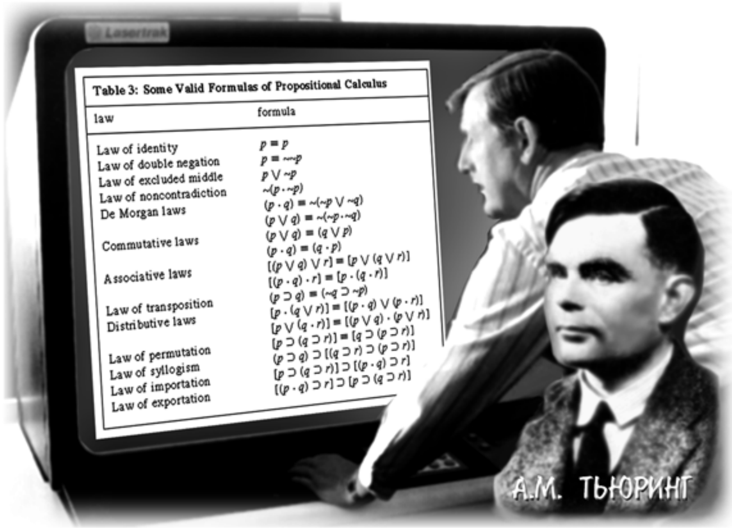
Что же такое кибернетика?

Если судить по книге Винера, то кибернетика включает в себя следующие теории: теорию информации, отрицательной обратной связи, автоматов, сложных машин и еще ряд других теорий. Позднее ученые скажут, что Винер первым понял необходимость выделить и изучить задачи, являющиеся общими для проблем управления и связи, которые живо интересуют физиков, электротехников, математиков, философов, психологов, биологов и т. д. По мнению Винера, все эти задачи имеют общие свойства, изучаемые кибернетикой. Поэтому о кибернетике можно говорить как о междисциплинарной науке, цементирующим началом которой являются математика и математическая логика.

Кибернетиков логика заинтересовала в первую очередь в связи с так называемыми *конечными автоматами*, являющимися в известном смысле продуктами развития логических систем.

Затрагивая вопрос о конечных автоматах, мы возвращаемся к уже известной нам теории релейных устройств, которую еще называют теорией *дискретных автоматов*. Создание подобной теории во многом обусловлено поиском различных возможностей переработки информации в кибернетических системах, а также анализом и синтезом сложных релейных схем и конструированием цифровых электронно-вычислительных машин. Кстати, методы теории автоматов используются для доказательства теорем, связанных с основаниями математики.

Если рассмотреть работу простейшего из дискретных автоматов, входные и выходные величины которого обозначаются двумя символами 0 и 1, то



можно легко убедиться в том, что преобразования таким автоматом входных величин в выходные эквивалентны преобразованиям, совершаемым в логике. Вот почему их можно еще называть логическими автоматами, а функции, описывающие данные преобразования, можно называть логическими функциями. Из элементарных логических функций составляются сложные логические функции, которые описывают свойства различных логических автоматов.

Большой вклад в теорию логических автоматов внес Алан Мэтисон Тьюринг, еще в 30-е гг. доказавший, что универсальная вычислительная машина теоретически возможна и ей по силам решение практически неограниченного числа различных задач. Своей идеей воображаемого вычислительного устройства, названного *универсальной машиной*, он предвосхитил главные свойства современных компьютеров. Воображаемое механическое устройство было названо универсальным потому, что машина должна была справляться с любой теоретически разрешимой задачей, будь то задача математическая или логическая.

«Собственные попытки Тьюринга построить машину окончились безрезультатно, но его идея о том, как это сделать, оказалась непревзойденной» так писал о своем учителе Дональд Мичи, директор Института имени Алана Тьюринга в Глазго.

Будущий создатель теории универсальных автоматов родился 23 июня 1912 г. в Лондоне. В школьные годы начал увлекаться математикой. Поступив в 1931 г. в Кембриджский королевский колледж, вскоре проявил незаурядные математические способности. Через несколько лет после окончания колледжа избирается его членом и начинает вплотную заниматься математической логикой.

В 1936 г. Тьюринг уезжает работать в США. Здесь в Принстонском колледже он пишет докторскую диссертацию «Система логики, основанная на порядковых числительных», которую защищает в 1938 г., и получает степень доктора философии. Летом того же года ученый возвращается в Англию и начинает проектировать вычислительную машину с широкими логическими возможностями.

В годы войны он работал в секретной лаборатории в Блетчли-Парке, где нашли свое воплощение некоторые его идеи. Сначала удалось создать несколько дешифраторов, в которых использовались электромеханические переключатели. Немного позднее были построены более мощные машины, где вместо электромеханических реле содержались электронные вакуумные лампы.

В послевоенные годы Тьюринг участвовал в создании компьютера, ряд свойств которого был воплощением его гипотетической универсальной машины. Опытный образец компьютера начал эксплуатироваться в мае 1950 г. Примерно в это же время он увлекся проблемами «машинного интеллекта» и даже придумал тест, который, по его мнению, позволял выяснить, может ли машина мыслить.

Алан Тьюринг был неиссякаемым источником смелых, неординарных идей. Оригинален он был и как личность. Длинноволосый молодой человек с открытым симпатичным лицом заслуженно считался теоретиком Кембриджского университета. Обычно он ходил в измятом костюме и никогда не ставил часы по сигналам точного времени, предпочитая отмечать положение определенной звезды и затем вычислять время в уме. Экстравагантность его этим не ограничивалась. Например, в Блетчли-Парке он ездил на работу на велосипеде, часто надевая противогаз, чтобы избежать аллергии в период цветения трав.

Вероятно, Тьюринг мог бы еще многого достигнуть на научном поприще, если бы ему не мешала его эксцентричность. В 1954 г., занимаясь игрой, которую он называл *Необитаемый остров* и смысл которой заключался в изготовлении химических веществ из обычных бытовых продуктов, Тьюринг получил цианистый калий, принял его и ушел в мир иной, озадачив современников и потомков своим выбором небытия.

Возвращаясь к «машине Тьюринга», еще раз подчеркну, что это не машина в собственном смысле слова, а ее теория. Согласно данной теории вычислительная машина должна содержать конечный автомат, который соединен с читающей и пишущей головкой. Эта головка может записывать символы на бумажной ленте и считывать их. Лента, разделенная на ячейки, где зафиксированы соответствующие символы (скажем, 1 и 0), представляет в указанной «машине» запоминающее устройство.

Память является важнейшей частью любого компьютера. В ней записываются команды и данные. Последовательность команд образует то, что называется *программой*. Поскольку внешне команды и данные неотличимы друг от друга (с точки зрения машины каждая команда, как и данные, является числом), постольку перед машиной стоит задача следить за тем, где записаны команды, а где данные. Решение этой задачи осуществляется с помощью счетчика команд. В счетчике содержится адрес команды.

Закодированные в виде чисел команды машины образуют ее *машинные коды.* В принципе программы для машин можно составлять прямо в машинных кодах, но это слишком трудоемко и чрезвычайно сложно для программиста. Во избежание этих трудностей были изобретены машинные языки, где выражения естественного языка представлены машинным кодом с помощью особой программы, записанной в памяти машины.

Наиболее распространенные языки программирования содержат многие слова естественного языка. Например, в языке АЛГОЛ используются слова «начать», «конец», «для», «пока», «если, то», «иначе». Некоторые из этих слов включены также в языки ФОРТРАН и БЕЙСИК. Языки программирования, содержащие такие слова, существенно облегчают задачу программирования.

В данном случае мы имеем дело с некоторыми результатами развития идей Тьюринга. Его теория «универсальной машины» имеет большое значение для выяснения таких важных вопросов, как существование алгоритма решения соответствующего класса задач и определение тех функций, которые могут или не могут выполняться автоматически.

К сожалению, секретный характер многих работ в области электронно-вычислительной техники, унаследованной со времен второй мировой войны и усугубленный длительным периодом «холодной войны», не способствовал широкой популяризации имен и теорий. Поэтому порой случалось так, что пальма первенства вручалась не по адресу. Примером может служить Джон фон Нейман и его отчет, обобщивший опыт работы над электронно-вычислительной машиной «Эдвак». Этот отчет представлял собой прекрасное описание не только самой машины, но и её логических свойств. Только благодаря военному представителю Герману Голдстейну, контролировавшему работу над проектом, доклад был размножен и разослан ученым США и Великобритании. Так на волю была выпущена первая рассекреченная ласточка, позволившая научной общественности познакомиться с засекреченной работой по цифровым электронным компьютерам. Увы, некоторые читатели отчета склонны были полагать, что все содержащиеся в нем идеи исходили от самого фон Неймана. Мало кто знал, что, по крайней мере за полгода до появления фон Неймана, в группе разработчиков компьютера уже кое-кто сформулировал некоторые исключительно важные научно-технические идеи. Большинство ничего не знало о разработках Тьюринга, с которыми фон Нейман был хорошо знаком.

Я не хочу умалять заслуги фон Неймана как ученого. Сын преуспевающего будапештского банкира, он рано зарекомендовал себя вундеркиндом. В шесть лет мальчик уже свободно владел древнегреческим, а в восемь освоил основы высшей математики.

В двадцатилетнем возрасте фон Нейман занимался преподавательской и исследовательской работой в Германии. Тогда же им был сделан значительный вклад в развитие квантовой механики, а также разработана теория игр, которая нашла широкое применение в различных областях человеческой деятельности, от экономики до военной стратегии.

Интерес фон Неймана к компьютерам отчасти связан с его участием в сверхсекретном Манхэттенском проекте по созданию атомной бомбы. Он математически доказал осуществимость взрывного способа детонации атомной бомбы.

В Принстонском институте перспективных исследований фон Нейман принял участие в разработке нескольких компьютеров новейшей конструкции. Среди них была машина, которая использовалась для решения задач, связанных с созданием водородной бомбы.

Фон Нейман был человеком весьма добродушным и несколько экстравагантным. Одевался он, скорее, как банкир, а не как профессор. Любил красивых женщин, изысканную еду, очень увлекался автомобилями, которые разбивал примерно раз в год.

В пятьдесят четыре года он умер от саркомы в вашингтонском госпитале Уолтера Рида.

В середине 30-х гг., когда фон Нейман прочно осел в Соединенных Штатах, Мичиганский университет покинул его выпускник Клод Шеннон (1916 2001), получивший два диплома бакалавра по электротехнике и по математике. Свои стопы дважды бакалавр направил в Массачусетский технологический институт. Здесь, желая подработать, он начал выполнять обязанности оператора на весьма неуклюжем механическом вычислительном устройстве под названием «дифференциальный анализатор». Эту громоздкую штуковину построил в 1930 г. научный руководитель Шеннона профессор В. Буш.

Машина Буша призвана была решать довольно сложные дифференциальные уравнения, которые позволяли предсказывать поведение таких движущихся объектов, как, например, самолет. Ранее на решение подобных уравнений уходили иногда целые месяцы. «Дифференциальный анализатор» существенно ускорял этот процесс. Главным его недостатком было то, что расчеты проводились в десятичной системе счисления, а это усложняло механику вычислительного устройства. Чтобы поставить машине задачу, оператор вынужден был вручную, пачкаясь в машинном масле, подбирать множество шестереночных передач. На это обычно уходило несколько дней.

В качестве темы диссертации Буш предложил Шеннону изучить логическую организацию своей машины. Соискатель настолько увлекся поставленной задачей, что решил усовершенствовать «дифференциальный анализатор». Как это сделать?

Шеннон вспоминает булеву алгебру и поражается ее сходству с принципами работы электрических схем, которые гораздо удобнее шестеренок и валиков. Если построить электрические цепи в соответствии с принципами булевой алгебры, то можно было бы не только выполнять сложные вычисления, но и выражать логические отношения, определять истинность тех или иных формально-логических утверждений. Эти идеи Шеннон изложил в своей докторской диссертации, опубликованной в 1938 г. Данная работа считается поворотным пунктом в развитии вычислительной техники.

Десятилетием позже Шеннон опубликовал еще одну основополагающую работу под названием «Математическая теория связи», где изложил идеи, которые впоследствии легли в основу новой отрасли науки *теории информации.* В данном случае автором был предложен оригинальный метод, позволяющий определять информацию в математических терминах, точнее, измерять информацию, сводя ее к выбору между двумя значениями 1 и 0. Довольно быстро двухсимвольное представление информации было принято за основу языка ЭВМ. Начиная с 50-х гг. практически во всех цифровых вычислительных машинах применялась уже двоичная система.

Шенноновскую математическую теорию связи не случайно рассматривают в качестве фундамента теории информации. Объясняется это тем, что теория, возникшая в результате изучения электрической связи, не

ограничивается сферой физики. Благодаря абстрактной математической форме она имеет широкую область применения. Однако не следует преувеличивать ее возможности. Полезно иметь в виду, что не сбылись надежды тех, кто без всяких уточнений пытался применять данную теорию, не заботясь о соответствии метода предмету исследования.

И все же джин был выпущен из бутылки, т. е. между понятиями «информация» и «знание» (знание как содержание человеческого сознания) был поставлен знак приблизительного равенства. Возникла потребность установить, так ли это на самом деле.

За решение вопроса взялись Р. Карнап (1891 1970) и И. Бар-Хиллел (1915 1975).

Они предложили меру для информационного аспекта языка, которую назвали *семантической информацией*.

В свое время Шеннон настойчиво подчеркивал, что смысл сообщений не имеет никакого отношения к его математической теории информации. Однако шенноновский скептицизм лишь подстегнул исследователей. Карнап и Бар-Хиллел попытались дать определение количественной стороне смысла, содержащегося в некотором предложении. При этом главная ставка делалась на использование метода экстенц(с)ионала и интенц(с)ионала.

Данный метод был разработан Карнапом, который хотел распространить семантическую концепцию Г. Фреге на все языковые выражения. Разрабатывая свой метод, Карнап осуществил определенную корректировку базисных понятий фрегевской концепции. Вместо понятия «значение» (нем. Bedeutung) он ввел понятие «экстенционал», а вместо понятия «смысл» (нем. Sinn) понятие «интенционал». Этим понятиям в аристотелевской логике соответствуют понятия «объем» и «содержание».

Карнаповская семантическая концепция обусловлена попытками построить такие абстрактные объекты, которые могли бы соответствовать *смыслу* и *значению*, но не выглядели бы посторонними языку сущностями. Иными словами, нам предлагалось построить в уме воображаемые идеальные объекты, которые можно было бы характеризовать как экстенционал (значение) или как интенционал (смысл) соответствующего языкового выражения.

Указанный метод, будучи применен к понятию информация, дал мало обнадеживающего, хотя и катализировал познавательную деятельность логиков. Усилия сторонников семантической информации не намного продвинули вперед предлагаемую теорию. Некоторые скептики считают, что такую теорию нельзя построить в принципе. Но эти теоретические дискуссии пока не смущают кибернетиков, которые заняты исследованиями в области «искусственного интеллекта».

После второй мировой войны появились электронно-вычислительные устройства, зародившие надежду, что ученым наконец-то удастся реализовать дерзкий замысел смоделировать техническими средствами человеческий разум.

К концу 50-х гг. сформировалась новая самостоятельная ветвь научно-технического поиска, получившая название «искусственный интеллект» (ИИ). Наиболее вдумчивые исследователи, работавшие в области ИИ, довольно рано обнаружили, что проблематика по ИИ вплотную касается философии, психологии и лингвистики. Они соглашались с тем, что самой трудной проблемой, стоящей перед ними и современной наукой вообще, является познание процессов функционирования человеческого интеллекта, а не просто техническая имитация его работы. Однако нашлись ученые с инженерным складом ума, которые мало заботились о выяснении механизма мышления, полагая, что для их работы по ИИ нет особой пользы от философских споров. Правда, со временем они поубавили свой технократический пыл, столкнувшись с очень серьезными трудностями. Некоторые из них даже впали в пессимизм и переключились на решение более скромных задач.

Первые попытки построить машины, способные к разумным действиям, были в значительной мере вдохновлены Винером. Под влияние его идей попал и нейрофизиолог Уоррен МакКаллок (1898 1972). В соавторстве с блестящим математиком Уолтером Питтсом (р. 1924) он разработал теорию деятельности головного мозга, на основе которой сформировалось мнение, разделяемое многими учеными, что функции компьютеров и мозга в значительной мере сходны. Эта аналогия базировалась на гипотезе, согласно которой нейроны можно упрощенно рассматривать как устройства, оперирующие двоичным кодом. Американские ученые предложили конструкцию сети из электронных нейронов и показали, что подобная сеть может выполнять любые числовые или логические операции. Затем было выдвинуто предположение, что данная сеть в состоянии обучаться и обобщать, т. е. осуществлять интеллектуальные действия.

Историки кибернетики констатируют, что теоретические построения МакКаллока Питтса в сочетании с книгами Винера вызвали огромный интерес к «разумным машинам». Из кибернетического, а точнее,

нейромодельного подхода к «машинному разуму» скоро сформировался так называемый *восходящий метод* метод движения от простых аналогов нервной системы примитивных существ к сложнейшей нервной системе человека.

По пути, намеченному МакКаллоком и Питтсом, уверенно зашагал Фрэнк Розенблат, чья докторская диссертация была посвящена проблемам экспериментальной психологии. В середине 1958 г. он продемонстрировал компьютерную модель электронного устройства, названного им *перцептроном*. Эта модель должна была имитировать процессы человеческого восприятия.

Считается, что перцептрон Розенблата оказался наивысшим достижением восходящего, или нейромодельного, метода создания ИИ.

Противники восходящего метода выдвинули альтернативу, получившую название *нисходящего метода*. Яркими сторонниками последнего стали два профессора Массачусетского технологического института Марвин Минский (р. 1927) и Сеймур Пейперт.

Вдохновленный идеями Уоррена Маккаллока, но не разделявший взгляды его последователя и своего однокашника Розенблата, Минский в соавторстве с южноафриканским математиком Пейпертом написал книгу «Перцептроны», где доказывалось, что перцептроны, подобные розенблатовским, принципиально не могут выполнять многие из приписываемых им функций. Позднее Минский, столкнувшись с трудностями применения нисходящего метода, публично выразил сожаление относительно своей критики в адрес Розенблата. Он также заявил, что для реального прорыва вперед в создании «разумных машин» потребуется устройство, во многом похожее на перцептрон.

Каков реальный смысл идеи перцептрона?

Суть дела касается распознавания зрительных образов, т. е. с помощью компьютера ученые пытаются воспроизвести сложные процессы зрительного восприятия (перцепции).

Сегодня системы машинного зрения используются в различных областях. Например, с их помощью осуществляется технический контроль и сортировка деталей на конвейерном производстве. Это не может не радовать ученых и предпринимателей, но вместе с тем нельзя закрывать глаза на то, что большинство из этих машин работают лишь в строго определенных условиях. Такая ограниченность снижает эффективность затрат. Судите сами, машина, запрограммированная для распознавания объекта в некотором определенном ракурсе, не срабатывает, когда ракурс меняется. Сложности возникают и при изменении освещения. Если машина будет гоняться за тенью от объекта, а не за самим объектом, то плакали наши денежки.

Некоторые ученые, раздосадованные неудачами коллег, пытаются, не отказываясь от проблематики по ИИ, сфокусировать внимание на тех вопросах, которые они называют *обработкой сложной информации*. Так, в частности, поступили два известных американских ученых   Аллен Ньюэлл (1927 1992) и Герберт А. Саймон (1916 2001).

Ньюэлл и Саймон изрядно сомневались в том, что развитие исследований в области ИИ должно идти

по пути имитации нейронов мозга средствами электроники. Основную ставку они делали на программное обеспечение компьютеров, утверждая, что программы легче изменять, чем тратить деньги на дорогостоящие, но малоэффективные технические устройства, грубо копирующие человека.

В январе 1956 г. профессор Школы промышленной администрации Технологического института Карнеги (США) Герберт Саймон радостно заявил своим слушателям, что они вместе с Ньюэллом и присоединившимся к ним Дж. К. Шоу изобрели «мыслящую машину». Конечно, речь шла не о машине, а о программе для компьютера под названием «ЛОГИК-ТЕОРЕТИК». Эта программа могла доказывать теоремы символической логики.

За тринадцать лет до этого в Чикагском университете Саймоном была получена степень доктора политических наук. В основу диссертации он положил свои исследования методов принятия решений. Впоследствии эти исследования позволили ему построить теорию ограниченного рационализма, доказывающую, что при решении проблем управления промышленностью иррациональные мотивы играют не меньшую роль, чем рациональные. Эта оригинальная теория принесла Саймону Нобелевскую премию по экономике за 1978 г.

Возможности компьютеров для анализа проблем принятия решений Саймон открыл для себя в 1952 г. Своим энтузиазмом он заразил Ньюэлла и Шоу, работавших в «Рэнд корпорейшн», куда Саймон был приглашен, чтобы оказать помощь в разработке программы-тренажера для компьютерной системы ПВО. Через несколько лет сдружившиеся ученые задались целью создать программу, которая моделировала бы человеческие рассуждения. Центральной фигурой в группе Саймона стал Шоу, проявивший блестящий талант программиста.

Первоначально отважная тройка намеревалась составить программу для игры в шахматы, но потом ученые переключились на вопросы геометрии. Однако геометрические задачи оказались тоже слишком сложны для программирования, и тогда все внимание было обращено на символическую логику.

Результатом логических изысканий и стала уже известная нам программа «ЛОГИК-ТЕОРЕТИК». Ее авторам казалось, что потенциальные возможности компьютера в плане манипуляции логическими символами безграничны. Они поспешили заявить о способности компьютера, вооруженного программой «ЛОГИК-ТЕОРЕТИК», заниматься решением сложных проблем, используя эмпирические правила и общие стратегии так, как это делал бы склонный ошибаться человек. При этом свое кредо они сформулировали следующим образом: «Нас не интересуют методы, которые гарантируют получение решения за счет гигантских вычислений. Мы хотели бы понять, каким образом, например, математик может доказывать теорему, не зная заранее, как он это сделает и сделает ли вообще».

Замысел был явно претенциозным и неосуществимым. Возникшие вскоре трудности и проблемы уводили далеко в сторону от намеченного маршрута. В

этот период ряд исследователей сосредоточился на программах, получивших название «экспертных систем» (ЭС). Данные программы сохраняли известную связь с «ЛОГИКОМ-ТЕОРЕТИКОМ», но решали более узкий круг вопросов.

Своеобразной точкой отсчета для работ по созданию «экспертных систем» специалисты считают 1965 г., когда ученые из американского Станфордского научно-исследовательского института Эдвард Фейгенбаум (р. 1944) и Брюс Бучанан вместе с нобелевским лауреатом Джошуа Ледербергом (р. 1925) приступили к созданию компьютерной системы, предназначенной для определения молекулярной структуры химических соединений. При построении этой системы они создали программу, основанную на артистотелевской логике. В программе формулировалась серия вопросов типа ***если*** → ***то***, которые описывали правила атомных связей.

Надо заметить, что Фейгенбаум заинтересовался проблематикой «искусственного интеллекта» примерно в середине 50-х гг., будучи студентом электротехнического факультета Технологического института

Карнеги. Интерес этот пробудил Саймон, который читал студентам выпускной курс по математическому моделированию и в один из январских дней сообщил своим слушателям о создании «ЛОГИКА-ТЕОРЕТИКА». Позднее Фейгенбаум рассказывал, что в исследованиях по «искусственному интеллекту» его прежде всего заинтересовало, как, имея набор исходных данных, построить гипотезу, которая объясняла бы эти данные.

В повседневной жизни мы часто сталкиваемся с факторами неопределенности, но не всегда это приводит нас в трепет. Используя накопленный опыт, мы либо устраняем эту неопределенность, либо как-то упорядочиваем наш выбор в неопределенных ситуациях, если они доступны нашим знаниям.

Людям легче удается справиться с неопределенностями, а вот с компьютерами дела обстоят гораздо сложнее. Чтобы машина могла нормально работать, необходимо представить в логически ясном виде сообщаемые ей эмпирические факты. Там, где царит эмпирия, действует индуктивный метод сбора и обработки фактического материала. Этот метод непригоден для машинного «мышления», ибо даже самая «умная» машина не в состоянии делать «алогичный скачок» от суммы фактов к их обобщенному представлению. Машина обрабатывает сообщаемые ей многочисленные факты по заранее установленным правилам дедуктивного характера. Аналогичным образом решаются задачи с помощью «экспертных систем».

В создании «экспертных систем» Фейгенбаум шел по пути изучения эмпирических знаний ученых-естествоиспытателей. В данном случае ими были химики. Свою роль в выборе химической науки сыграл Ледерберг, работавший над программой, призванной помочь химикам в определении молекулярной структуры плохо изученных органических соединений. Данная программа обладала одним существенным недостатком: она предсказывала значительно больше разнообразных моделей, чем может существовать в природе.

Ледерберг понял, что изобилие предлагаемых программой возможных химических моделей следует ограничивать, используя для этого эмпирические знания химиков. Тогда-то он и привлек к работе Фейгенбаума. Их сотрудничество завершилось созданием «экспертной системы» ДЕНДРАЛ.

Назначение компьютерных «экспертных систем» типа ДЕНДРАЛ а состоит в том, чтобы аккумулировать профессиональные знания и использовать их для экспертных оценок и рекомендаций. Такого рода «экспертные системы» должны не только оценивать ситуацию и предлагать варианты решений, но и давать в случае необходимости обоснования предлагаемых решений. Что касается ДЕНДРАЛ а, то когда основа системы была готова, ее наполнили сведениями о конкретных химических соединениях и способах рассуждений, которые приводят химиков к правильным выводам. Эти сведения были получены посредством опроса ученых, рассказывавших, как они анализируют и оценивают возникающие перед ними проблемы.

Программа ДЕНДРАЛ строилась на активном использовании логического правила ***если*** → ***то***. Иначе говоря, в данной программе представление всех необходимых для нее знаний осуществлялось в форме правила ***если* → *то***. Часть этого правила, обозначенная словом «если», указывала на некоторую ситуацию и представляла собой последовательность символов, которые компьютер применял для сопоставления. Другая часть правила, обозначенная словом «то», указывала на соответствующее действие, обусловленное ситуацией (*если*). Например, в ситуации, когда (если) идет дождь, (то) я беру зонтик, т. е. действую с учетом плохой погоды.

Составленные таким образом компьютерные программы характеризуются в качестве программ, основанных на *правилах*. Это значит, что в процессе работы программа сортирует символы в поисках сочетания, сопоставляемого с частями «если» имеющихся правил. После того как сопоставимое сочетание обнаружено, пускается в ход соответствующее правило, благодаря которому выполняется определенное *действие* (например, устанавливается медицинский диагноз, выводимый на экран компьютера). Показательно, что среди наиболее перспективных приложений «экспертных систем» выделяется область медицинской диагностики.

Работы с «экспертными системами» принесли интересные научные результаты, обогатившие методологию исследований по «искусственному интеллекту». В частности, учеными было обнаружено следующее: если из программы удалить базу знаний, т. е. всю конкретно-научную информацию, остается лишь чистая логика, связывающая воедино фактические знания. Эта логика получила название «машины вывода». Данная «машина» работает благодаря использованию правил логического вывода.

Кое-кто из ученых объясняет идею создания «экспертных систем» попытками выйти за границы традиционных программ, которые имеют дело лишь с полунейтральными фактами, тогда как «экспертные системы» опираются на профессиональную культуру. Под этой культурой подразумевается совокупность неформальных эвристических приемов, интуитивных суждений

и умение делать выводы на основе плохо формализуемого практического опыта. Между прочим, сами эксперты обычно не вполне осознают наличие у себя подобной профессиональной культуры и с трудом представляют, как именно они работают, хотя, разумеется, годы учебы и работы вселяют в них уверенность в собственном профессионализме.

Несмотря на рациональную непостижимость всего богатства профессиональных знаний экспертов, все-таки оказывается возможным вложить их в машинные программы, благодаря чему те могут сегодня поспорить по уровню компетентности с высококвалифицированными практиками.

Разработки «экспертных систем» повлекли за собой появление новой дисциплины *познавательной инженерии*. Это понятие ввел в научный обиход Эдвард Фейгенбаум в 1977 г.

Представители инженерии знаний занимаются преимущественно изучением профессиональных тестов и интервьюированием экспертов, в результате чего определяется состав экспертных знаний, выявляется их структурная организация, а затем полученные данные представляются в виде базы знаний и систем правил, позволяющих осуществлять автоматическое получение экспертных оценок и рекомендаций.

Обращаю внимание читателей на следующее. Обработка данных всегда считалась основной функцией компьютеров. Однако в последнее время все чаще звучит утверждение, что компьютеры могут оперировать не только нейтральными информационными данными, но и знаниями.

Составление программ было бы делом чрезвычайно сложным и утомительным, если бы для этого использовались нули и единицы двоичного кода. Но тем не менее эти нули и единицы единственный доступный компьютеру способ общения. Чтобы упростить общение с бездушной машиной, необходимо связать воедино языки программирования высокого уровня, которые позволяют конструировать наборы машинных команд, не пользуясь двоичными символами, с языком самого нижнего уровня, где эти символы являются главным и единственным кодом. Интересующая нас связь осуществляется с помощью *языка ассемблера*, который разрешает вместо единиц и нулей использовать мнемонические коды для обозначения соответствующих команд.

Устав кодировать каждую инструкцию на двоичном языке, создатели вычислительной техники занялись поисками более удобного способа общения с машиной. В конечном счете на свет появились новые коды, составленные из букв и коротких слов, взятых, например, из английского языка. Видную роль в этом деле сыграл Морис Уилкс, работавший в Кембриджском университете. Он-то и считается создателем одного из первых *языков ассемблера*. Такого типа язык обычно состоит из команд с легко запоминающимися символами, которые заменяют в программе весьма длинную цепочку нулей и единиц. Данные символы автоматически преобразуются в двоичные коды машинного языка при помощи специальной программы, называемой АССЕМБЛЕРОМ. Другими словами, программа называется АССЕМБЛЕРОМ, если она преобразует мнемонику *языка ассемблера* непосредственно в двоичные коды машинных команд.

Существенным недостатком АССЕМБЛЕРА является прежде всего то, что он ближе к языку машины, чем к естественному языку, а это создает трудности в работе с программами. Кроме того, программа, написанная на АССЕМБЛЕРЕ одного компьютера, абсолютно непонятна компьютеру иного типа. И все же АССЕМБЛЕР это важный шаг на пути от базы данных к базам знаний, так как общение с машиной на квазичеловеческом языке открывало возможность применения компьютера для обработки текстов, включая тексты на естественных языках.

Использование программистами языков высокого уровня предполагает наличие ТРАНСЛЯТОРА, являющего собой специальную программу. ТРАНСЛЯТОР состоит из *компилятора* и/или *интерпретатора*. Компилятор читает всю программу целиком и делает ее перевод на язык, доступный машине. После того как программа откомпилирована, исходная программа больше не нужна. Затем начинается работа интерпретатора, который выполняет загруженную в компьютер программу строка за строкой. Но такая последовательность присуща далеко не всем языкам. Большинство языков ориентированы либо на компиляцию, либо на интерпретацию. Эта ориентация зависит от того, для каких целей создавался данный язык. Например, ФОРТРАН обычно реализуется с помощью компилятора, а БЕЙСИК с помощью интерпретатора. В отличие от интерпретирующей программы, которая должна работать параллельно с интерпретируемой, компилирующую программу можно удалять из памяти компьютера перед выполнением компилированной программы. Дело в том, что интерпретатор преобразует лишь небольшой фрагмент исходной программы в машинные команды, а затем, дождавшись, когда компьютер их выполнит, переходит к обработке следующего фрагмента. В противовес этому компилятор транслирует всю программу и помещает команды в память компьютера, не выполняя их.

Чтобы компьютер мог пользоваться информацией, хранящейся в его памяти, каждая ячейка памяти обозначается определенным двоичным адресом. В программе на АССЕМБЛЕРе для представления информации программист использует легко запоминающиеся имена.

Итак, языки программирования это тщательно составленные последовательности слов, букв, чисел и мнемонических сокращений. Каждый язык имеет свою грамматику и синтаксис. Языки программирования, имитирующие естественные языки, принято считать языками высокого уровня. Этими языками обычно пользуются для представления базы знаний.

Не на данные, а на знания, точнее, на связь данных со знаниями ориентированы исследования по «искусственному интеллекту». Манипулирование знаниями   главное назначение наиболее перспективных компьютерных систем, в основе которых лежат достижения в области «искусственного интеллекта». Это манипулирование состоит в использовании определенных правил интерпретации соответствующих данных, объединенных в ту или иную структуру.

Сами по себе структуры данных не являются знаниями. Чтобы они были осмыслены в терминах того или иного знания, необходима определенная программа, т. е. знания формируются в процессе использования структур данных в программе. Что касается «экспертных систем», то здесь мы имеем дело с особой интеллектуальной программой, которая способна делать логические выводы на основе знаний в конкретной предметной области, обеспечивая тем самым решение интересующих нас задач. Не случайно многие специалисты считают, что именно с «экспертных систем» начинается новая эра в исследованиях по «искусственному интеллекту», поскольку эти системы способны производить свои «умозаключения», обращаясь к базе знаний.

Процесс формирования знания из структур данных осуществляется с помощью правил, которые представляют (репрезентируют) знания, формируя их из данных.

Запомним, что «представление знаний»   это относительно новый термин, используемый в кибернетике для указания на методы моделирования и формализации профессиональных знаний, которые поддаются компьютерной обработке.

Существует несколько типов моделей представления знаний. Одной из них является логическая модель, в которой для представления знания используется логика предикатов первой ступени (порядка).

Основное преимущество использования логики предикатов для представления знаний заключается в том, что она обладает хорошо отработанным механизмом вывода, который относительно легко может быть запрограммирован. С помощью этих программ из имеющихся формализованных знаний могут быть получены новые знания.

Специалисты по «искусственному интеллекту» придерживаются следующего соглашения: *автоматическое преобразование предложений, написанных на естественном языке, в языки формальных систем типа логики предикатов называется пониманием естественного языка.* Исследования в этой области, проводимые с 60-х гг., не сопровождались впечатляющими успехами, так как проблема перевода с естественного языка на язык искусственный оказалась чрезвычайно сложной.

Надо иметь в виду, что со второй половины 50-х гг. большинство лингвистических теорий разрабатывались как теории синтаксиса.

О том, что собой представляет понятие «синтаксис» в современной лингвистике, можно сказать словами известного английского лингвиста Дж. Лайонза. По его мнению, синтаксис языка   это определенное множество правил, которые объясняют распределение словоформ в предложениях. Данная характеристика синтаксиса предполагает отнесение каждой словоформы к одному или более классам форм. Классы форм нельзя смешивать с частями речи (существительное, глагол, прилагательное и т. д.), поскольку части речи являются классами лексем (например: *мальчик, бежать*), а не классами словоформ (например: *мальчик, мальчики; бежит, бегут*).

Выдающуюся роль в развитии лингвистической теории как теории синтаксиса сыграли во второй половине XX столетия два знаменитых американских лингвиста   Ричард Монтегю (1930 1971) и Ноам Хомский (р. 1928).

Наиболее ярым сторонником синтаксической теории языка был Монтегю, согласно которому синтаксис является отраслью математики (!). По его мнению, синтаксис английского   в той же мере часть математики, как геометрия или теория чисел. Эта позиция предопределяет стратегию Монтегю относительно исследований естественных языков, а именно: он их исследует, пользуясь техникой, которая аналогична технике математиков, изучающих формализованные языки.

Цель исследовательской программы Монтегю состоит в том, чтобы создать математически элегантную знаковую теорию естественного языка. Для достижения этой цели он идет на крайний шаг, отвергая точку зрения тех, кто признает принципиальное различие между формальными и естественными языками.

Доктрина Монтегю не оказала такого сильного влияния на лингвистов и специалистов по «искусственному интеллекту», какое оказала генеративно-трансформационная грамматика Хомского, чье понимание синтаксиса приближено к реальной практике лингвистических исследований.

Говоря о предпосылках для создания совершенно нового типа грамматик, представленных работами Монтегю и Хомского, следует отметить, что эти предпосылки были заложены в 30-е гг. благодаря развитию математической *теории рекурсивных функций*, созданию «машины Тьюринга» и т. п. Впрочем, новые модели грамматики не являются моделями для машинного программирования, хотя Монтегю и Хомский так или иначе ориентировались на технологический подход к построению абстрактно-теоретических моделей грамматик. Характерно, что в некоторых диалоговых программах 60-х гг. упор делался не на семантику, а на синтаксис. В последнем случае большое влияние на программистов оказали разработки Монтегю и Хомского. Вдохновляемые их идеями и методами, исследователи «искусственного интеллекта» при создании своих систем исходили преимущественно из математики и логики, что проще для машины, ибо не требуется знать значения слов. Однако этих энтузиастов ждало разочарование, поскольку один синтаксический подход к естественному языку давал весьма мало для работы с машиной в диалоговом режиме. И всё же не стоит слишком унывать. Гораздо полезнее не

отворачиваться от идей Монтегю и Хомского, а ближе с ними познакомиться.

Генеративная (порождающая) грамматика выходит далеко за рамки традиционной грамматики, которая не обеспечивает себя точными и полными правилами, но только иллюстрирует регулярности структуры предложений с помощью примеров и контрпримеров без точного определения границ, внутри которых эти правила являются действенными.

Имеется много типов генеративных грамматик, но сегодня доминируют два из них (1) грамматика, которая различает глубинные и поверхностные структуры, и (2) грамматика, которая этого не делает.

Глубинная структура это исходная структура, опре-деляющая смысловое содержание предложения. Поверхностная структура это физическая форма актуальных высказываний в виде звучащей речи, письменного текста и т. д.

Одна и та же глубинная структура может быть по-разному реализована в различных языках, т. е. считается, что глубинная структура является в формальном плане общей всем языкам. Трансформационные правила, которые превращают глубинные структуры в поверхностные, могут отличаться от одного языка к другому. Среди трансформационных правил имеются такие, которые позволяют образовывать вопросы, приказы и т. д.

По Хомскому, грамматическая теория, если она стремится быть адекватной реальному опыту, должна объяснять не только факты языка, но и лингвистическую интуицию говорящего. В этом плане новая лингвистическая теория является одновременно описанием и объяснением языковой компетенции, т. е. того типа грамматического знания, который каждый говорящий имеет в своей голове. Но в таком случае со всей определенностью намечается выход за рамки лингвистики в сферу философии и психологии. Этого не отрицает и сам Хомский, который в работах 60-х гг. начинает оценивать лингвистику как отрасль когнитивной (познавательной) психологии и ратовать за реабилитацию декартовского учения о *врожденных идеях* с целью окончательного объяснения механизма усвоения ребенком родного языка.

Из истории философии нам известно, что родоначальник рационалистической философии Нового времени Рене Декарт преобразовал схоластическую *теорию универсалий* (общих понятий) в *теорию врожденных идей*. Он полагал, что в душе человека с самого начала имеется некоторый запас как бы дремлющих идей, которые ожидают удобного момента, чтобы, пробудившись, выступить в роли регуляторов психической жизни человека.

Учение Декарта о *врожденных идеях* вначале возбудило негодование в среде католического духовенства. Но когда в этом учении богословы почувствовали более устойчивое выражение «универсальных начал» схоластики, то всякие возражения против него были сняты, а критические поползновения в адрес Декарта были объявлены покушением на веру и религию.

Идея «универсальной грамматики» Хомского сродни «универсальным началам» схоластики. Это родство подтверждается попытками в духе Декарта трансформировать принципы «универсальной грамматики» в сомнительную гипотезу о генетическом (биологическом) фонде языковых способностей. Согласно Хомскому, проверку этой гипотезы можно осуществлять не только физиологически, но и лингвистически, выявляя врожденные свойства интеллекта посредством конструирования «универсальной грамматики». Правила подобной грамматики образуют своеобразную проекцию существенных свойств человеческого интеллекта.

По словам американского кибернетика Дж. Вейценбаума (р. 1923), наиболее серьезное значение в разработках Хомского имеют не систематические записи грамматических правил естественных языков, а гипотеза, согласно которой человек генетически наделен высокоспециализированными способностями и соответствующим набором ограничений, совместно определяющих число и характер степеней свободы, направляющих и устанавливающих границы развития языка человека.

Специфика концептуальных взглядов Хомского состоит в том, что грамматика рассматривается им как средство, которое отражает или даже точно воспроизводит внутреннее бессознательное лингвистическое знание человека, пользующегося этим знанием для продуцирования и понимания бесконечно большого числа предложений.

Уход Хомского от лингвистики в сферу психологии и даже биологии подтверждает чрезвычайную трудность решения проблемы автоматического преобразования предложений, написанных на естественном языке, в язык формальных систем. Пока же не редкость случаи, когда машины выдают сообщения такого рода: «Согласно вашим инструкциям я родила двойню, что и посылаю в том же письме».

И тем не менее упрямые головы стремятся разработать программы, которые позволили бы пользователю общаться с компьютером на естественном языке. К их числу принадлежит Джон МакКарти (р. 1927), который первым ввел в научный оборот выражение «искусственный интеллект».

Возглавляемая МакКарти группа исследователей разработала хорошо известный язык программирования ЛИСП (от английских слов «List Processing» *обработка списков*), предназначенный для работы с нечисловыми символами (например, со словами и фразами английского языка). В программе на ЛИСПе любые данные формулируются в виде списка, т. е. в виде множества, состоящего из одного или более элементов, обычно заключенных в скобки.

Во второй половине 60-х гг. на авансцене исследований по «искусственному интеллекту» появился Терри Виноград, начавший работать над программой под названием SHRDLU (совершенно бессмысленное буквосочетание). С помощью этой программы он ввел в компьютер знания о неком примитивном игрушечном мире. Как считают специалисты, данная программа явилась в известном смысле поворотным пунктом в развитии исследований по «искусственному интеллекту». Дело в том, что Виноград объединил функции синтаксиса, семантики и способности к логическим рассуждениям. Благодаря этому программа SHRDLU явилась предшественницей ряда современных программ, в которых используется естественный язык. Несмотря на свои впечатляющие эффекты, программа Винограда оказалась во многом бессильной за пределами простенького игрушечного мира. Более того, даже в пределах этого мирка она не могла понять вопрос, если он не был сформулирован на английском языке самым строжайшим образом, без каких-либо намеков на двусмысленность.

В программах подобного типа самым сложным является способ организации знаний и их представления в удобном для машины виде.

В конце 60-х гг. М. Росс Куиллиан попытался представить память человека в виде огромной паутины, которую он назвал *семантической сетью.* Эта сеть состоит из узлов, соответствующих понятиям и имеющих имена, и связей между узлами. Связи указывают на природу зависимостей между узлами. В компьютере узлы соответствуют группам ячеек памяти, а связи указателям, содержащим коды адресов памяти, посредством которых программа находит нужные ячейки.

В семантических сетях наиболее важны связи типа «есть некоторое» (ISA), позволяющие построить в сети иерархию понятий, в которых узлы низких уровней наследуют свойства узлов более высоких уровней. Наследование свойств помогает экономить места в памяти компьютера и дает возможность проводить дедуктивные рассуждения.

Первоначально казалось, что семантические сети весьма перспективны для кибернетических разработок, но время внесло свои безжалостные коррективы. В частности, психологические исследования показали, что сами по себе сети не являются хорошими психологическими моделями. Кибернетики же столкнулись с малоприятными формальными трудностями, вытекающими из того, что по мере рассмотрения более сложных данных ранее применявшиеся сети оказываются недостаточными.

Как бы там ни было, концепция семантических сетей стимулировала разработки аналогичных подходов к представлению знаний. Так, в 1974 г. Марвин Минский высказал предположение, что человеческий разум интерпретирует соответствующие объекты посредством особых структур памяти, которые он назвал *фреймами.* Фрейм это пакет знаний, хранимый в мозгу человека или в памяти компьютера. Подобно семантическим

сетям, фреймы могут образовывать иерархические структуры.

Исследователи в области «искусственного интеллекта» широко используют идею фреймов в своих попытках научить компьютеры понимать естественные языки и обучаться на аналогиях.

Большой вклад в исследования по «искусственному интеллекту» сделал признанный лидер факультета информатики Йельского университета в США Роджер Шенк. Получив степень доктора по лингвистике в Техасском университете, он на протяжении ряда лет преподавал лингвистику и проводил исследования по «искусственному интеллекту». В этот период им была выдвинута *теория концептуальной зависимости*, с помощью которой он попытался объяснить, как люди воспринимают естественный язык. По Шенку, человек не просто сравнивает слова и понятия, а переводит их в базовые концептуальные структуры, придающие смысл услышанному или прочитанному.

Применив свою теорию к программированию, Шенк изобрел язык, позволяющий свести обычный язык к элементарным концептам, которые можно было бы представить в машине. Созданный им язык сводил тысячи английских глаголов, обозначающих действия, к одиннадцати синтетическим словам, называемым *семантическими примитивами*.

Интересно, что программа Шенка разбирала предложения не в традиционной для лингвистике манере, расчленяя их на глаголы и существительные, а совершенно иначе, выявляя базовые семантические элементы, которые помогают машине расшифровывать взаимосвязи в предложениях.

В сотрудничестве с профессором психологии Робертом Абельсоном Шенк разработал схему представления знаний, называемую *скриптами* или *сценариями*. Скрипт это нечто вроде мини-сценария, описывающего действия, которые человек совершает в повседневной жизни. В скрипте предусматривается учет контекста, т. е. учет информации о том, что человек обычно ожидает при данных обстоятельствах. Это позволяет машине заполнять пробелы в информации, исходя из *контекста ситуации*.

В дальнейшем Шенк и его ученики выдвинули и начали развивать идею *пакета организации памяти* МОП (МОР Memory Organization Packets). В отличие от скриптов, которые представляли собой раздельные блоки знаний, МОПы связаны в более сложные переплетения, позволяющие распознавать аналогии между событиями, относящимися к различным контекстам.

На определенный вклад в решение проблем искусственного интеллекта претендует теория нечетких множеств Л. А. Заде. Так, например, в рамках этого подхода были разработаны новые языки *нечеткого программирования*, которые обеспечили благоприятные возможности для эффективного представления и оперирования нечеткими данными и нечеткими знаниями. Проблема в данном случае состоит в том, чтобы соответствующие нечеткие знания были удовлетворительно формализованы с точки зрения машины. Пока этого не сделано, нечеткие знания не могут быть использованы в компьютерных программах. Сегодня специалистам еще не ясно, можно ли создать унифицированные методы обработки нечетких знаний различного типа.

Как видим, будущим программистам открывается широкое поле деятельности для решения проблем, контуры которых намечены здесь в самых общих чертах.

Заканчивая последний раздел книги, хочу выразить надежду, что она хотя бы немного поможет пытливому молодому уму осуществить первый штурм твердынь Науки. Дерзайте!

УПРАЖНЕНИЯ

1. Кратко охарактеризуйте «универсальную машину» А. Тьюринга.

2. Кто заложил фундамент теории информации? Чем отличается математическая теория связи от теории семантической информации?

3. Когда начались исследования в области «искусственного интеллекта»? Опишите этапы развития этих исследований.

4. Что вы можете сказать об «экспертных системах»?

5. Чем занимаются представители *инженерии знаний*?

6. Что такое АССЕМБЛЕР?

7. Отличается ли база данных от базы знаний?

8. Каков кибернетический смысл выражения «представление знаний»?

9. Понятие «синтаксис» в современной лингвистике. Как его описывают лингвисты?

10. В чем суть философских основ «универсальной грам-матики» Н. Хомского?

11. Могут ли использоваться нечеткие знания в компью-терных программах?

12. Используется ли логика в компьютерных программах?

13. Докажите следующую «теорему»: «Если я умен и настойчив, то смогу овладеть не только популярными книгами по искусству программирования».

14. Решите следующую задачу-задание: соедините знания в области структурной лингвистики (Н. Хомский, Р. Монтегю) с логическими знаниями (особенно интересна логика предикатов) и попытайтесь взять штурмом высоты искусства программирования. Успехов вам на этом поприще!

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

ЛИТЕРАТУРА ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО ЧТЕНИЯ И САМООБРАЗОВАНИЯ

Предлагаемый перечень литературы ориентирован на читателя, начинающего знакомиться с логикой. Современная логика чрезвычайно разветвленная наука, связанная с философией, математикой, кибернетикой, лингвистикой, психологией и другими научными дисциплинами. Учитывая это, я постарался так подобрать литературу, чтобы она помогла читателю овладеть азами логической науки, узнать ее историю, проследить связи с другими науками и с решением практических задач.

Если читатель любознателен, трудолюбив и настойчив, то последовательная проработка рекомендуемых литературных источников поможет ему самостоятельно овладеть основами и техникой современного логического анализа. Литература дается в той последовательности, которая позволяет переходить от простого к сложному.

ПОПУЛЯРНАЯ ЛОГИКА

Гжегорчик А. Популярная логика: Пер. с польск. — М.: Наука, 1979. — 112 с.

Эту книгу написал известный польский ученый. Он блестяще справился с трудной задачей популярного изложения основных идей и методов современной логики. С этой книги старшеклассники могут начинать знакомство с техникой логического анализа.

Хаваш К. Так — логично!: Пер. с венг. — М.: Прогресс, 1985. — 260 с.

Автор книги — женщина, доктор философских наук (Венгрия). Пишет легко и изящно. Читается с интересом.

ОТ ШКОЛЬНИКА К СТУДЕНТУ

Зегет В. Элементарная логика: Пер. с нем. — М.: Высшая школа, 1985. — 256 с.

Книга написана немецким ученым. В Германии она выдержала восемь изданий. В ней хорошо изложены основные разделы современной формальной логики.

Калужнин Л. А. Что такое математическая логика. — М.: Наука, 1964. —152 с.

Хотя в аннотации говорится о том, что данная книга является популярным изложением математической логики, но это не совсем так. Книга действительно написана ясно и понятно. Однако от читателя требуется определенная подготовка в области логики и математики. Впрочем, она вполне доступна смекалистым и усидчивым старшеклассникам и студентам первых курсов.

ИСТОРИЯ ЛОГИКИ

Не спешите переходить к учебникам! После того как вы прочитали рекомендованную выше литературу, немного отдохните и, если решитесь двигаться дальше, познакомьтесь более основательно с историей логики. Поскольку история логики неотделима от истории философии, постольку полезно пополнить свои знания чтением литературы по истории философии. Не пренебрегайте философией!

Маковельский А. О. История логики. — М.: Наука, 1967. — 502 с.

Автор книги — известный советский историк философии, сделавший большой вклад в развитие философской мысли в нашей стране. Предлагаемая книга написана преимущественно с философских позиций, чем с позиций современной формальной логики, но подано это настолько обстоятельно и систематически, что компенсируется отсутствие инструментария математической логики. Что же касается последнего, то могу порекомендовать книгу *Н. И. Стяжкина* «Формирование математической логики» (М.: Наука, 1967), но читать ее следует, вооружившись знаниями из области математической логики.

Соколов В. В. Средневековая философия. — М.: Высшая школа, 1979. — 448 с.

Книга представляет собой первый на русском языке систематический курс истории средневековой философии. Читается с интересом и проливает свет на развитие логических идей.

Соколов В. В. Европейская философия XV—XVII веков. — М.: Высшая школа, 1984. — 448 с.

В книге рассмотрены все основные направления европейской философии с начала эпохи Возрождения и до конца XVII в. Знание этого периода особенно важно для понимания становления логики Нового времени.

ЛОГИКА И ТЕОРИЯ ПОЗНАНИЯ

Познакомившись с историей логики и философии, не торопитесь распрощаться с философией. Обратите пристальное внимание на такую философскую дисциплину, как теория познания. Теория познания поможет лучше понять глубинный смысл логической терминологии и связь логической проблематики с проблематикой философской. Правда, русскоязычная литература не блещет оригинальными исследованиями по данной проблематике.

Рузавин Г. И. Методы научного исследования. — М.: Москва, 1974. — 240 с.

В книге рассматриваются средства и методы эмпирических и теоретических исследований. Ее язык прост и понятен.

Хилл Т. И. Современные теории познания: Пер. с англ. — М.: Прогресс, 1965. — 533с.

Книга представляет собой перевод с английского обзорного исследования, посвященного описанию современных теорий познания и их связи с логико-методологическими изысканиями. Настоятельно рекомендую ознакомиться с этой книгой.

К ЛОГИКЕ ЧЕРЕЗ МАТЕМАТИКУ

Современная логика — это логика, имеющая математический характер. Овладеть математической логикой можно при условии знания эволюции математических идей в XVIII—XX вв. Поэтому я советую вооружиться книгами по истории математики, а также популярной литературой по современной математике.

Белл Э. Т. Творцы математики. — М.: Просвещение, 1979. — 256 с.

В книге удачно даны творческие портреты предшественников современной математики (Г. В. Лейбниц, К. Ф. Гаусс, Н. И. Лобачевский и др.).

Бурбаки Н. Очерки по истории математики: Пер. с фр. — М.: Иностранная литература, 1963. — 292 с.

Книга написана группой известных французских ученых, выбравших себе псевдоним *Н. Бурбаки.* Считается едва ли не классическим трудом по истории современной математики.

Ливанова А. Три судьбы постижения мира. — М.: Знание, 1969. — 352 с.

В живой манере излагаются биографии К. Ф. Гаусса, Н. И. Лобачевского, Я. Бояи и других ученых, внесших большой вклад в развитие математики и теоретической физики.

Клайн М. Математика. Утрата определенности: Пер.с англ. — М.: Мир, 1984. — 448 с.

Книга известного американского математика в яркой и увлекательной форме рисует панорамную картину развития математики от античности до наших дней. Особенно ценны разделы, посвященные современной математике и математической логике. Хорошо дополняет книгу К. Рид о Д. Гильберте.

Комаров В. Н. По следам бесконечности. — М.: Знание, 1974. — 192с.

В книге в доступной, популярной форме рассматривается история формирования понятия «бесконечность», без которого невозможно разобраться в современных логико-математических спорах.

Курант Р., Роббинс Г. Что такое математика? Элементарный очерк идей и методов: Пер. с англ. — М.: Просвещение, 1967. — 558 с.

Талантливо написанная книга, издававшаяся в СССР еще в 1947 г. Пользуется большим успехом у любителей математики самых различных возрастов и уровней подготовки.

Петер Р. Игра с бесконечностью: Пер. с нем. — М.: Молодая гвардия, 1967. — 368с.

В книге описаны основные идеи и методы математики и математической логики. Написана популярно и талантливо. Читается с большим интересом. Советую не проходить мимо этой книги.

Попов Ю. П., Пухначев Ю. В. Математика в образах. — М.: Знание, 1989. — 208 с.

Популярно излагаются основные понятия теории множеств, числовых рядов и других разделов математики, знание которых совершенно необходимо для понимания сути современной математической логики.

Рид К. Гильберт: Пер. с англ. — М.: Наука, 1977. — 368 с.

Эта чрезвычайно интересная книга посвящена выдающемуся немецкому математику Давиду Гильберту, который по праву

относится к классикам науки. Его работы оказали огромное влияние на современную математику и логику. Настоятельно рекомендую прочитать.

Штейнгауз Г. Задачи и размышления: Пер. с польск. — М.: Мир, 1974. — 400 с.

Ясно и доступно показана связь математики с логикой. Книга определенно полезна для начинающих постигать смысл современной логики.

ЛОГИКА ДЛЯ ПОДГОТОВЛЕННЫХ

Предлагаемая литература требует определенной логической подготовки, а также знаний ряда философских и лингвистических идей. Для тех, кто справится с этими книгами, открывается дверь в храм Науки.

Клини С. К. Математическая логика: Пер. с англ. — М.: Мир, 1973. — 480 с.

Книга написана одним из крупнейших специалистов в области математической логики и представляет собой университетский вариант логики. Ее необходимо иметь всегда под рукой, но не обязательно читать страницу за страницей. Со временем она должна стать настольной книгой тех, кто посвятил себя логике.

Кормен Т., Лейзерсон Ч., Ривест Р. Алгоритмы: построение и анализ: Пер. с англ. — М.: МЦНМО, 2000. — 960 с.

Книга представляет собой хороший учебник для вузов по курсу построения и анализа эффективных алгоритмов.

Кофман А. Введение в теорию нечетких множеств: Пер. с фр. — М.: Радио и связь, 1982. — 432 с.

Книга, написанная известным французским ученым, представляет собой первое и наиболее полное изложение теории нечетких множеств. Третья глава этой книги посвящена так называемой нечеткой логике. Несмотря на строгость изложения, книга доступна читателю, знакомому с азами теории множеств и современной логики.

Марков А. А., Нагорный Н. М. Теория алгорифмов. — М.: Наука, 1984. — 432 с.

Один из авторов этой книги (А. А. Марков) — ученый с мировым именем, сделавший большой вклад в развитие современной математики и логики. Первая глава книги посвящена изложению основных принципов и методов так называемой конструктивистской (интуиционистской) логики. Читается легко и не требует особой математической подготовки. Ее полезно дополнить чтением книги *В. Ф. Асмуса* «Проблема интуиции в философии и математике» (М.: Мысль, 1965).

Мулуд Н. Анализ и смысл: Пер. с фр. — М.: Прогресс, 1979. — 348 с.

Книга написана известным французским философом и посвящена вопросам семантики, анализируемым средствами логики и теории познания. Изящным стиль изложения не назовешь, но книга будет полезной для тех, кто заинтересуется семантической проблематикой.

Новиков П. С. Элементы математической логики. — М.: Наука, 1973. — 400 с.

Книга весьма сложная. Написана известным отечественным ученым, внесшим большой вклад в развитие математической логики в нашей стране. Знакомство с ней очень желательно, но штурмом ее содержанием не овладеть. Вначале можно ограничиться введением к книге.

Слупецкий Е., Борковский Л. Элементы математической логики и теории множеств: пер. с польск. — М.: Прогресс, 1965. — 368 с.

Книгу нельзя назвать удачной в плане изложения основных идей математической логики. На первых порах ее можно только просмотреть и дополнить чтением книги *Л. А. Калужнина* «Элементы теории множеств и математической логики в школьном курсе математики» (М.: Просвещение, 1978).

Тондл Л. Проблемы семантики: Пер. с чеш. — М.: Прогресс, 1975. — 485 с.

Книга представляет собой логический анализ семантической проблематики. Поэтому большое место в ней занимают вопросы логической семантики. Изложение тяжеловесно. Рекомендую дополнить чтением следующих книг: *Павилёнис Р. И.* Проблема смысла. — М.: Мир, 1983. — 288 с.; *Семиотика:* Пер. с разн. яз. — М.: Радуга, 1983. — 636 с.; Новое в зарубежной лингвистике. — Вып. X: Лингвистическая семантика: Пер. с англ. — М.: Прогресс, 1981. — 568 с.; *Новое в зарубежной лингвистике.* — Вып. XIII: Логика и лингвистика: Пер. с разн. яз. — М.: Радуга, 1982. — 432 с.; *Философия, логика, язык:* Пер. с разн. яз. — М.: Прогресс, 1987. — 333 с.; *Степанов Ю. С.* Основы общего языкознания. — М.: Просвещение, 1975. — 272 с.; *Бенвенист Э.* Общая лингвистика: Пер. с фр. — М.: Прогресс, 1974. — 448 с.; *Амирова Т. А., Ольховиков Б. А., Рождественский Ю. В.* Очерки по истории лингвистики. — М.: Наука, 1975. — 560 с.

Фейс Р. Модальная логика: Пер. с англ. — М.: Наука, 1974. — 520 с.

Книга, написанная всемирно известным автором, представляет собой обзор формальных систем модальной логики. Изложение материала, при всей строгости, не требует от читателя слишком глубоких знаний в области логики.

Черч А. Введение в математическую логику: Пер. с англ. — М.: Иностранная литература, 1960. — 486 с.

Эта довольно сложная книга написана в качестве учебника для студентов. Ее автор — один из самых известных современных специалистов в области математической логики. Вначале можно ограничиться введением к книге.

ЛОГИКА, ТЕХНИКА, КИБЕРНЕТИКА

Джордж Ф. Основы кибернетики: Пер. с англ. — М.: Радио и связь, 1984. — 272 с.

В книге дан достаточно полный обзор идей, принципов и методов современной кибернетики. Рассматривается связь кибернетики с логикой. Написана ясно, просто, понятно. Может служить хорошим справочным пособием.

Журавлев А. П., Павлюк Н. А. Язык и компьютер. — М.: Просвещение, 1989. —160 с.

Книга, рассчитанная на старшеклассников, в популярной форме рассказывает о союзе лингвистики с кибернетикой. Более подготовленному читателю советую ознакомиться со следующими книгами: *Новое в зарубежной лингвистике.* — Вып. XII: Прикладная лингвистика: Пер. с англ. — М.: Радуга, 1983. — 462 с.; *Новое в зарубежной лингвистике.* — Вып. XXIV: Компьютерная лингвистика: Пер. с англ. — М.: Прогресс, 1989. — 432 с.

Знакомьтесь — компьютер: Пер. с англ. — М.: Мир, 1989. — 240 с.

Первая книга научно-популярной серии «Знакомство с компьютером», выпускаемой американским издательством «Тайм-Лайф». Авторы живо и увлекательно рассказывают об истории

развития вычислительной техники, о системах взаимодействия человека с ЭВМ. Книга чрезвычайно полезна для школьников и студентов гуманитарных факультетов, желающих получить необходимый минимум знаний о современной компьютерной технике.

Калбертсон Дж. Т. Математика и логика цифровых устройств: Пер. с англ. — М.: Просвещение, 1965. — 268 с.

Книга написана крупным специалистом по теории автоматов. Хорошо показана связь логики с техникой.

Каррано Ф., М., Причард Дж. Дж. Абстракция данных и решение задач на С++. Стены и зеркала: Пер. с англ. — М.: Изд. дом «Вильям», 2003. — 848 с.

Книга представляет собой классический учебник для высшей школы, содержащий глубокое и достаточно ясное изложение вопросов, связанных с абстракцией и структурами данных, а также их реализацией на языке С++.

Кёршан Б., Новембер А., Стоун Дж. Основы компьютерной грамотности: Пер. с англ. — М.: Мир, 1989. — 256 с.

Популярное пособие по основам информатики и вычислительной техники для средних учебных заведений. Излагаются основные принципы построения, программирования и применения компьютеров при решении различных практических задач.

Колдуэлл С. Логический синтез релейных устройств: Пер. с англ. — М.: Иностранная литература, 1962. — 737 с.

Книга написана профессором Массачусетского технологического института (США) и представляет собой хороший, хотя и несколько устаревший образец использования математической логики в технике и технических науках.

Компьютер обретает разум: Пер. с англ. — М.: Мир, 1990. — 240 с.

Третья книга серии «Знакомство с компьютером». Это популярный рассказ о проблемах «искусственного интеллекта», об использовании компьютеров в различных областях человеческой деятельности.

Левин Р., Дранг Д., Эделсон Б. Практическое введение в технологию искусственного интеллекта и экспертных систем с иллюстрациями на Бейсике: Пер. с англ. — М.: Финансы и статистика, 1990. — 240 с.

Эта книга предназначена для начинающих, но для таких начинающих, которые знакомы с основными понятиями современной логики. Для ее чтения и понимания специальных математических знаний не требуется. Пытливым старшеклассникам она по силам.

Логика и компьютер. — М.: Наука, 1990. — 240 с.

Впервые в советской литературе, предназначенной для широкого круга уже немного знакомых с математической логикой читателей, показывается важная роль логики в подготовке программ для современных компьютеров. Книга довольно сложная. Ее авторы были не слишком озабочены решением учебно-педагогических или научно-популярных задач, хотя частично и пытались это сделать. Тем не менее книга может пригодиться современному читателю из числа студентов и аспирантов.

Рейуорд-Смит В. Дж. Теория формальных языков: Пер. с англ. — М.: Радио и связь, 1988. — 129 с.

Книга сложная, представляет собой вводный курс в теорию формальных языков. Предназначена прежде всего для разработчиков программного обеспечения ЭВМ.

Тей А., Грибомон П., Луи Ж. и др. Логический подход к искусственному интеллекту: от классической логики к логическому программированию: Пер. с фр. — М.: Мир, 1990. — 432 с.

Эта интересная и полезная книга написана специалистами из Бельгии и Швейцарии. В ней довольно ясно и просто излагаются проблемы и методы исследований в области «искусственного интеллекта». Изложение материала ведется с позиций современной символической логики. Книга доступна старшеклассникам. Настоятельно рекомендую почаще заглядывать в эту книгу.

Хант Э. Искусственный интеллект: Пер. с англ. — М.: Мир, 1978. — 560 с.

Книга написана американским профессором и представляет собой достаточно полный обзор проблематики по «искусственному интеллекту». Доступна старшеклассникам.

Язык компьютера: Пер. с англ. — М.: Мир, 1989.— 240 с.

Вторая книга серии «Знакомство с компьютером». Посвящена важнейшей проблеме вычислительной техники — программному обеспечению, без которого немыслима работа компьютеров. В увлекательной и доступной для неподготовленного читателя форме рассказывается о методах, задачах и многочисленных языках программирования.

СПРАВОЧНИКИ

Александрова Н. В. Математические термины: Справочник. — М.: Высшая школа, 1978. — 190 с.
Горский Д. П., Ивин А. А., Никифоров А. Л. Краткий словарь по логике. — М.: Просвещение, 1991. — 208 с.
Кондаков Н. И. Логический словарь-справочник. — М.: Наука, 1975. — 720 с.
Корн Г., Корн Т. Справочник по математике: Пер. с англ. — М.: Наука, 1978. — 832 с.
Логический словарь ДЕФОРТ (дедуктивная формализация теорий) / Ред. А. А. Ивин, В. Н. Переверзев, В. В. Петров. — М.: Мысль, 1994. — 269 с.
Математика. Большой энциклопедический словарь. — М.: Большая Российская энциклопедия, 1998. — 848 с.
Переверзев В. Н. Логистика. Справочная книга по логике. — М.: Мысль, 1995. — 220 с.
Справочная книга по математической логике / Под ред. Дж. Барвайса: В 4 ч. — М.: Наука, 1982.
Философский энциклопедический словарь. — М.: Советская энциклопедия, 1983. — 840 с.
Энциклопедический словарь юного математика. —М.: Педагогика, 1989. — 352 с.

ЖОЛЬ Константин Константинович

ЛОГИКА В ЛИЦАХ И СИМВОЛАХ

Учебное пособие для вузов

Обложка, дизайн, оригинал макет
книги и редакция текста
выполнены автором

Подписано к печати
Формат 84 × 108/32. Бумага тип. № .
Гарнитура Times ET.
Печать высокая. Авт. печ. л. 14 п. л. Усл. печ. л. .
Отпечатано с готового оригинал-макета. Тираж экз.
Цена договорная.