Российская Академия Наук
Институт философии

Е.А. СИДОРЕНКО

РЕЛЕВАНТНАЯ ЛОГИКА

(ПРЕДПОСЫЛКИ, ИСЧИСЛЕНИЯ, СЕМАНТИКА)

Москва
2000

ББК 87.4
УДК 164.02
С 34

В авторской редакции

Рецензенты:
доктор филос. наук *Ю.В.Ивлев*
доктор филос. наук *В.И.Маркин*

С 34 **Сидоренко Е.А.**
Релевантная логика (предпосылки, исчисления, семантика). – М., 2000. – 243 с.

Книга посвящена основам релевантной логики, причинам ее появления, построению для нее адекватной реляционной семантики крипкевского типа. Дается популярное изложение семантики возможных миров. Принципиальной особенностью предлагаемой автором двухуровневой (двухэтажной) реляционной семантики с бинарным отношением достижимости является то, что никакая формула логики не является истинной во всех возможных мирах, а семантически истинными оказываются такие формулы A, которые истинны во всех тех мирах, где постулируется верность $A \to A$. Предлагаемая семантика адаптирована для известных релевантных исчислений E, R и NR, а также авторской системы E_{NR}, непосредственно формализующей необходимую импликацию, описываемую в исчислении NR.

ISBN 5-201-01925-0

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение

Главными темами этой книги являются релевантная логика и адекватная этой логике семантика возможных миров некоторого принципиально нового типа. Дается популярное и неформальное изложение традиционной семантики возможных миров, которую называют также реляционной или крипкевской по имени одного из ее основателей С.Крипке. Именно он был в числе первых, кто предложил задать на множестве возможных миров отношение достижимости одних миров из других. Это нововведение позволило существенно усилить потенциал семантики возможных миров. Нам удается добиться нового его усиления за счет разбиения возможных миров надвое. Каждый возможный мир будет иметь, так сказать, два этажа. Первый из них – эмпирическая часть мира – представляет собой обычный крипкевский мир (карнаповское описание состояний). Второй этаж – это теоретическая часть мира, представляющая некоторый список выражений (формул) языка той теории, для которой строится семантика.

"Двухэтажность" возможных миров, которые содержательно можно рассматривать как универсумы рассуждений, позволяет отличить сложные утверждения о теоретических (выходящих за пределы эмпирической обоснованности) связях между событиями от тех, истинность которых представляет функцию истинности своих составляющих.

Мы строим здесь семантику для языка широко известных систем релевантной логики. И это стало основанием для названия книги. Возможно, наиболее точным названием книги было бы "Двухуровневая с бинарным отношением достижимости семантика возможных миров релевантной логики". Хотел бы я видеть, кто на подобное название осмелился бы. Будучи подходящим для статьи, оно для монографии звучало бы ужасно.

В основном свои взгляды на релевантную логику, причины и оправданность ее появления, достоинства ее и недостатки, возможные расширения я изложил в [7]. Имеются там и достаточно прозрачные ее семантические основания. Специально проблемы семантики релевантной логики я обсуждал в [24, 25, 32]. Предложенные там семантические подходы нельзя назвать совершенно стандартными. Они показывали, как из некоторого класса несомненно семантически истинных формул релевантной логики путем ряда преобразований, сохраняющих это свойство в силе, можно получить все остальные семантические истины, описываемые тем или иным релевантным исчислением.

Релевантная логика - логическое направление, которое возникло и развивалось в качестве альтернативы классической символической логике. В названии логики (термины *релевантный*, *релевантность* представляют собой кальку с английского, и их можно перевести как "*уместный*", "*относящийся к делу*", "*уместность*") нашло отражение то обстоятельство, что в ней исключаются свойственные классической логике принципы, которые с точки зрения интуиции и, главное, реальной практики рассуждений трактуются как неуместные, не соответствующие этой практике, *парадоксальные*. Грубо говоря, релевантная логика отличается от классической логики в двух основных пунктах.

Во-первых, в объектный язык такой логики и соответствующих ей исчислений вводится интенсионально понимаемая импликация, истинностное значение которой в отличие от экстенсиональной материальной импликации не детерминируется однозначно истинностными значениями связываемых этой импликацией высказываний. В одних исчислениях, таких как *R*, вводимая импликация близка к обычному условному союзу "*Если ..., то ...*" и часто именуется ***рлевантной*** импликацией. В других, например в известном исчислении *E*, импликация вводится в объектный язык как необходимая условная связь (в англоязычной литературе ее именуют entailment[1]), которая также понимается интенсионально и, по замыслу (с чем согласны одни [8] и не согласны другие [7]), должна служить формальным аналогом *логического следования*.

Технически для фигурирующих в релевантной логике импликаций интенсиональность означает, что принципов, аналогичных парадоксам материальной импликации:

$A\to .\, B\to A$ (*истинное высказывание A следует из любого*)

и

$A\to .\neg A\to B$ (*из ложного высказывания ¬A следует любое*),

в релевантной логике не имеется.

Во-вторых, в релевантной логике, чтобы принять утверждение об отношении логического следования между *A* и *B* (символически: $A\vdash B$) не достаточно того факта, что *B* - тождественно истинно, или *A* - тождественно ложно (противоречиво). Соответственно в релевантных исчислениях нет и теорем вида $A\to B$, где *B* - теорема, а *A* - произвольная формула, или *A* - отрицание теоремы, а *B* - произвольная

---

[1] Кальку этого слова ***интеилмент*** иногда используют и по-русски, когда хотят подчеркнуть, что речь идет о следовании (импликации), описываемой именно системой *E*.

формула. Символическая релевантная логика ближе к той логике, которая употребляется в обычных рассуждениях. Вместе с тем в ней, по сравнению с классической, возникают серьезные семантические проблемы. Например, отвергая утверждение $\neg AA \vdash B$ о выводимости произвольного B из противоречия $\neg AA$, необходимо обосновать отвержение утверждения о логическом следовании $\neg AA \vDash B$ в семантическом смысле, а также иметь семантику, в которой формулы вида $\neg AA \to B$, $\neg(A \to A) \to B$, $A \to (B \to B)$ и т.п., антецеденты которых противоречивы, или консеквенты общезначимы, не были бы семантически истинными.

Технические решения найти удалось. Однако с содержательной точки зрения предлагаемые семантики оказались весьма искусственными. В *семантику возможных миров* пришлось вводить "невозможные возможные миры" и (вместо обычного бинарного) тернарное отношение достижимости одних миров из других. Мы покажем далее как данный недостаток удается преодолеть на пути построения двухуровневой семантики возможных миров.

Моя первая публикация с идеей реляционной семантики, предполагавшей двухэтажные миры, относится к 1993 году [1]. Основные теоретические положения и технические результаты по двухуровневой реляционной семантике релевантной логики наиболее полно изложены мной в [3, 20 и 22]. Там главная цель состояла в том, чтобы "застолбить" оригинальный подход к проблеме, реализовать саму идею построения реляционной семантики (причем с бинарным отношением достижимости) для известных исчислений релевантной логики [5] и в первую очередь таких, как E, R и NR. Важно было сделать упор, во-первых, на то, что эта семантика является именно бинарной, так как для релевантной логики удавалось построить реляционную семантику только с тернарным отношением достижимости [6, 9, 13], что делало весьма проблематичной сколько-нибудь удачную ее содержательную интерпретацию. А во-вторых, на то, что предлагаемая семантика была адекватна названным исчислениям, ибо семантик как таковых, вообще говоря, строилось и может быть построено сколько угодно. Теперь, когда названная цель достигнута, можно сосредоточится на анализе самой семантики, ее содержательном и философском обосновании, рассмотреть наиболее интересные ее модификации и варианты, более тщательное внимание уделить проблеме адекватности семантик. В частности, с большей строгостью провести доказательства теорем о полноте соответствующих исчислений относительно сформулированных для них семантик.

В решении названных проблем определенную помощь дало мне их обсуждение с В.А. Смирновым, Е.Е. Ледниковым, В.М. Поповым, В.Л. Васюковым, J.M. Dann`ом, Н. Куртониной, P. Weingartner'ом, Д.В. Зайцевым, Н.Н. Непейвода. Я благодарен M. Nowak'у из Bulletin of the Section of Logic (University of Lódz) за конструктивные замечания в адрес подготавливаемой мною для BSL статьи [22]. Чрезвычайно полезной была рецензия, написанная D.Batens'ом на статью, написанную мной для журнала *Logique et Analyse*.

При работе над книгой я всегда держал в уме вероятную критику со стороны Е.К. Войшвилло, своего постоянного оппонента в вопросах понимания импликации и логического следования. Немалую роль сыграла возможность обсуждения предлагаемой семантики на заседаниях научно-исследовательского семинара сектора логики Института философии РАН. Я благодарен теперешнему руководителю семинара и заведующему сектором логики Е.Д. Смирновой, оказавшей поддержку данному направлению исследований. При подготовке книги полезными оказались критические замечания А.М. Анисова, П.И. Быстрова, И.А. Герасимовой, А.С. Карпенко, С.А. Павлова, Шалака В.И.

Во всех случаях мое неизменное признание и благодарность относятся к А.А. Зиновьеву, который когда-то привлек меня к исследованиям по релевантной логике (непарадоксальной теории следования) и около десяти лет руководил ими, начиная с того времени в 60-х годах, когда я был еще студентом и когда самого словосочетания *релевантная логика* еще не существовало. Свою первую, как потом оказалось, релевантную систему G я построил в студенческой курсовой работе 1966 года[2]. Позднее я обнаружил практически идентичную ей систему, именуемую как B (сейчас ее обычно называют первопорядковой теорией следования и обозначают как E_{fde}), в докторской диссертации Н. Белнапа (1960), которому я благодарен за полученную в свое время поддержку и компьютерную проверку ряда моих технических результатов.

Я благодарен за поддержку проведенных исследований Российскому гуманитарному научному фонду (РГНФ)[3].

---

[2] Публикация: *Sidorenko E.A. Variaten der Systeme der logischen Folgebensiehung* // Grundlagen einer logischen Theorie des Wissens. B., 1970.

[3] Разделы (главы) 3-10 книги выполнены при поддержке Российского Гуманитарного Научного Фонда (РГНФ) проект 99-03-19641.

1. Семантика возможных миров

Блестящая идея Лейбница о том, что логические и математические истины являются истинами во всех возможных мирах нашла широкое и плодотворное применение в логической семантике. Мы обсудим некоторые методологические и философские вопросы в связи с построением семантики, которая отказывается от этой лейбницевской предпосылки и исходит из того, что никаких беспредпосылочных универсальных истин, логических в том числе, не существует. Я ограничусь здесь рассмотрением эволюции логической семантики возможных миров в связи с ее адаптацией сначала к модальной, а затем к релевантной логике. При этом обсуждение не будет выходить за рамки пропозициональной логики (логики высказываний). Этого, во-первых, достаточно для наших целей и, во-вторых, позволит избежать (а к этому мы будем здесь стремиться) технических сложностей, уделяя основное внимание содержательным проблемам.

1.1. Возможные миры

В самом общем приближении понятие *возможного мира* можно описать следующим образом. Мы живем в некотором мире, который считаем реальным, действительным миром. Представим себе множество всех возможных предложений (высказываний). Наложим на это множество некоторые ограничения, имея при этом в виду, что эти ограничения, с одной стороны, не являются необходимыми и вводятся для удобства, а с другой, не изменяют степени общности дальнейших рассуждений.

Во-первых, ограничимся только теми предложениями, которые сами не состоят из других предложений и не являются отрицаниями предложений. Иными словами, наше множество включает только те предложения, которые принято называть атомарными.

Во-вторых, исключим из обсуждаемого множества все повторяющиеся предложения. При соотнесении входящих в образованное множество предложений с действительностью (с действительным миром) одни из них окажутся истинными, а другие ложными. В данном случае для нас не имеет значения, можем ли мы каким-либо образом решать вопрос об истинности и ложности того или иного предложения. Мы просто считаем, что одни высказывания соответствуют тому, что имеет место в реальности, а другие нет, независимо от того, знаем мы или не знаем (и даже, как бывает, принципиально не можем знать), какие именно соответствуют, а какие – нет. Множество предложений, образованное изо всех истинных атомарных предложений и отрицаний всех ложных, представляет собой описание состояний реального (действительного) мира на какой-то данный момент.

Упоминание о данном моменте, очевидно, приходится делать не случайно. Уже в некоторый следующий момент мир изменится, и какие-то из истинных ранее предложений станут ложными и, наоборот, некоторые ложные непременно станут поэтому истинными. Этому новому миру будет соответствовать иное описание состояний, получаемое за счет изменения (присоединения или устранения) отрицания перед атомарными высказываниями. Аналогичным образом будет обстоять дело и в каждый последующий момент. И мир, с которым мы имеем дело в настоящий момент, и миры, которые были в прошлом и которые будут в будущем, все они относятся к числу возможных миров. Но к таковым относятся не только они.

Тот путь, который прошел наш мир в своем историческом изменении и развитии, сам есть лишь один из возможных. В каждый момент прошлого у нашего мира были альтернативные пути развития, есть они в настоящем и, конечно, сохранятся в будущем. Можно представить, что будь Клеопатра некрасивой, не родись Наполеон, не будь Октябрьской революции, не приди к власти Горбачев, мир несомненно был бы иным, нежели сейчас.

Часто говорят, что история не знает сослагательного наклонения. И это верно, когда под историей имеют в виду те реальные события, которые произошли в каком-то временном интервале. Но когда речь идет об истории как дисциплине, призванной отобразить эти события, тогда без сослагательного наклонения, а значит, без предположения иных путей развития, иных возможных миров, обойтись, по-видимому, просто нельзя. Ибо история во втором смысле с необходимостью предполагает многие такие вещи, которые имеют смысл лишь при допущении альтернативных путей развития. Возьмите, скажем, отбор фактов с точки зрения их важности. Он с очевидностью зависит от того, считает ли историк, что они достаточно серьезно повлияли на течение заслуживающих внимания событий[4]. Не обой-

---

[4] Сравнительно недавно было установлено, что И.В. Сталин родился в 1878 г., то есть приблизительно на год раньше, чем это считалось официально признанным. Пожалуй вся значимость этого факта была сведена к тому, что удалось посрамить некоторых астрологов, кото-

тись историку без анализа причин событий и поведения тех, кто отнесен к историческим личностям, а значит, без предположений об условиях (возможных мирах), при которых эти события могли бы не произойти, о том, к какому результату могло бы привести иное решение того или другого субъекта истории и, вообще, что было бы, если бы дело было не так, как было.

Вряд ли возможна история также без тех или иных оценок деятельности личностей, партий, классов, масс, государств и так далее. Однако любая оценка предполагает сравнение того, что было, с тем, что могло бы быть при иных действиях оцениваемых субъектов, а значит (мысленное, теоретическое) допущение иного, чем это было в реальности, результата. Но такое допущение трудно представимо без попытки выразить этот гипотетический результат в виде некоторой нереализовавшейся возможности[5].

рым удалось, исходя из предполагаемой даты рождения, составить весьма точный гороскоп отца народов. Мне же, например, представляется, что сам последний отмечал свои юбилеи дважды: и действительный, и официальный, представая в это время весьма разным. Почувствуйте разницу между 1928 и 1929, между 1938 и 1939, да и между 1948 и 1949 годами.

5 Здесь хочется обратить внимание на одно не всегда принимаемое в расчет обстоятельство. Понятно, что оценка прошлых событий, деяний, решений во многом зависит оттого, к каким результатам они в конечном счете привели. Однако в качестве такого результата нередко рассматривают объективно сложившееся положение дел. И когда последнее считается неудовлетворительным, соответственным образом характеризуется и оцениваемое решение. При этом может упускаться из виду, что связь такого решения с последующим положением дел как правило опосредованна множеством других действий, решений, случайностей. И очень может быть, что окажись они иными, совсем по-другому выглядело и то решение, оценку которо-

Уместно обратить внимание еще на следующее обстоятельство. Допуская сослагательное наклонение и предполагая, что сложись в прошлом дела по-иному, реальный мир был бы в настоящем существенно отличным от имеющегося, те, кто делает подобное допущение, как правило, считают свое собственное существование и многие существенные характеристики собственного бытия инвариантными. Иными словами, допуская кардинальное отличие предполагаемого мира от реального, осуществляющий данное допущение выносит себя, свое бытие, свое окружение за скобки таких изменений. Помните, у Р. Бредбери герой одного из рассказов ("И грянул гром"), путешествуя во времени и оказавшись в далеком прошлом, наступает на бабочку. Это вызывает цепь последствий, отличную от реальной. И герой, вернувшись в настоящее, обнаруживает, что мир существенно изменился. В частности, победу на президентских выборах одержал не прогрессивный, а реакционный кандидат. Показательно здесь то, что герой при этом остается самим собой. Изменившимися оказываются только внешние обстоятельства, но опять-таки только в тех пунктах, которые представляются внешне важными для самого героя, сумевшего остаться неизменным.

Совершенно аналогичным образом мы, рассуждая о том, что было бы, если бы не было Октябрьской революции, отречения царя или чего-нибудь еще в нашей истории, вполне понимаем сколь кардинально другим мог бы быть теперь мир, но едва ли даже задумываемся, что событиям достаточно было измениться очень в немногом, чтобы мы

го пытаются дать. Таким образом, оценка сама оказывается зависимой от того, какой из возможных миров оказался реализованным.

лично при этом вообще не появились на свет. Хорошим примером в этом отношении может служить упрек, который подросток делает своей маме, за то, что она в свое время вышла замуж не за того из двух претендентов. Сделай мама тогда правильный выбор, он был бы теперь сыном не спившегося неудачника, а генерала (академика, космонавта, миллионера). При этом ему невдомек, что при другом мамином выборе он просто вовсе бы не родился. С этой точки зрения все мы должны быть благодарны судьбе за то, что все было так, как оно и было.

Как кажется, экстремальным примером инвариантности высказывателя по отношению к воображаемому миру может служить великолепное стихотворение Ф.И.Тютчева "Последний катаклизм":

Когда пробьет последний час природы,
Состав частей разрушится земных:
Все зримое опять покроют воды,
И божий лик отобразится в них!

Вообразите описываемую стихотворением ситуацию, и вы убедитесь, что достаточно легко представляете себя наблюдателем там, где вам, конечно, по причине описанного катаклизма принципиально нет места.

Великолепным образцом того, как мы можем себя мыслить там, где нас нет - и по нашему же предположению - и быть не может, служит ситуация, которую связывают с Дюма-отцом. На вопрос, было ли весело на той вечеринке, откуда он пришел? - писатель ответил: “Да, очень. Но не будь там меня, я бы умер там со скуки." Задуматься бы: ни эта ли наша психологическая особенность мыслить себя там, где нас быть не должно и не может, позволяет нам в жизни творить вещи, последствия которых могут для нас же оказаться гибельными? Не случайно же сложилось мудрое предостережение не рубить сук, на котором сидишь.

Противоположную крайнюю позицию, теперь уже принципиальной нашей собственной неинвариантности, неукоснительной изменчивости в мире, изменившемся хоть в чем-то нас касающемся, отражает известная песня В. Высоцкого "Он не вернулся из боя":

> Почему все не так? Вроде - все как всегда:
> то же небо - опять голубое,
> тот же лес, тот же воздух и та же вода...
> Только он не вернулся из боя.
>
> . . . .
>
> Нам и места в землянке хватало вполне,
> нам и время текло - для обоих...
> Все теперь - одному. Только кажется мне,
> это я не вернулся из боя.

Радикалам всех мастей, призывающих к войне за непреходящие принципы, было бы неплохо осознать, что, увы, это не мы выходим из боя, не нас вывозят из "заварушек" те известные локомотивы истории[6]. Древние римляне, провозглашая примат торжества закона над существованием мира, прекрасно понимали, что с миром (которым они готовы пожертвовать в соответствии с максимой: пусть рухнет мир, но закон должен быть исполнен), ничего ужас-

---

[6] Для тех, кто, в отличие от людей старшего поколения, может этого уже не знать, скажу, что локомотивами истории К. Маркс называл социальные революции.

ного произойти не может, и он никуда не “рухнет”. Другое дело сейчас, когда одно неверное решение одного человека, облеченного соответствующей властью, и в самом деле может привести к гибели всего мира.

Представляется уместным обратить внимание еще на одно обстоятельство. Вообразим некоторое возможное в прошлом, но не состоявшееся событие, которое могло бы существенно повлиять на всю нашу историю. Казалось бы, что произойди оно на самом деле, оно должно было бы быть отнесено к числу событий несомненно важных. Однако возможны ситуации, когда такого рода события представляются значимыми именно потому и только потому, что не произошли. Тогда как в случае своей реализации, они вообще не представляли бы никакого интереса. С такой ситуацией сталкивается, например, Сандро из Чегема – известный герой Ф. Искандера. Дело сложилось так, что у Сандро в свое время была возможность погубить молодого тогда еще Сталина. Много позже, рассуждая об этом, Сандро понимает, что, выдай он тогда будущего отца народов жандармам, могло бы вообще не быть никакого Сталина. И это, конечно, имело бы для всемирной истории огромное значение. Но, с другой стороны, в таком случае сам этот поступок в свете этой самой истории утратил бы всякую значимость. Сандро это понимает и мучается над проблемой, как бы сделать так, чтобы его несовершенный поступок, буде он совершен, и мир бы изменил, и сохранял бы при этом соответствующую историческую важность.

С чисто логической, с формальной точки зрения не имеет значения, какого рода события (важные в каком бы то ни было отношении или не важные ни в каком) различают два возможных мира. Не начни я предыдущее предложение с абзаца, мир уже только в силу одного этого обстоятельства был бы иным. И этот мир также, как и мир, в котором эта книга вообще не была бы написана, попадает в число равноправных возможных миров. К тому же логика имеет дело не с событиями, но исключительно с высказываниями о них. Поэтому для логики "возможный мир" это множество предложений, описывающее все факты онтологически возможного мира.

Такое множество отображает наш действительный мир только в некоторый данный момент времени и представляет собой лишь один из логически возможных миров.

Множество это состоит из, может быть, очень большого, но конечного числа актуально сформулированных атомарных предложений и их отрицаний[7]. Другие возможные миры получаются из этого множества путем отбрасывания отрицания у одних предложений и приписывания его другим. Казалось бы, в число таких возможных миров следует включить все варианты, которые могут быть получены указанным способом. Если же, однако, считать, что всякое множество предложений должно отображать некоторый

---

[7] Потенциально число высказываний о мире является бесконечным. Мы можем, например, построить утверждение о каждом натуральном числе, говоря четное оно или не четное, простое или не простое. Или считать, что в образованное множество высказываний, в котором имеется высказывание вида: "Число таких-то и таких-то объектов меньше *n*", входит любое высказывание о том, что число указанных объектов меньше *n+m*, где *m* - любое натуральное число. Смотри в связи с этим приведенное ниже рассуждение Витгенштейна. Вместе с тем число актуально сформулированных атомарных высказываний всегда конечно. И для каждого такого высказывания во всякий достижимый мир входит либо оно само, либо его отрицание.

возможный онтологический мир, то такой подход оказывается неприемлемым. Дело в том, что замена некоторого атомарного предложения на его отрицание, как и замена обратного рода, влечет в таком случае целый шлейф следствий. Едва ли мы можем допустить мир, в котором, скажем, Сократ не был бы мужем Ксантиппы, и Ксантиппа одновременно была бы его женой, кто-то находился бы сразу в Москве и в Париже, сын был бы старше матери, и тому подобное.

В связи с этим, очевидно, является неверным нередко встречающееся мнение, что два возможных мира могут отличаться только тем, что в один из них некоторое высказывание *А* входит с отрицанием, а в другой без него. И это понятно уже хотя бы потому, что одну и ту же мысль можно выразить с помощью разных высказываний. И вообще, попытайтесь предположить какое-нибудь изменение в реальном положении дел, которое не повлекло бы бесчисленного количества последствий.

На это обстоятельство уже после публикации своего знаменитого "Логико-философского трактата" обращал внимание Л. Витгенштейн, рассуждение которого мы приводим: "Когда я говорю, например, что "такая-то и такая-то точка в поле зрения - *синяя*", я знаю не только это, но также и то, что эта точка не зеленая, не красная, не желтая и т.д. Я применил за один раз всю *цветовую шкалу*."

По признанию Витгенштейна при написании "Трактата" он полагал, что все выводы имеют форму тавтологии и тогда не видел еще, что вывод может иметь и такую форму: "Некий человек высотой 2 *м*, следовательно, он высотой не 3 *м*". Из существования одного положения дел, заключает философ, может быть выведено несуществование всех остальных[8].

1.2. Семантика классической пропозициональной логики

Логика высказываний устанавливает и описывает отношения между формулами, отображающими логическую форму предложений обычного языка. Язык пропозициональной логики строится из бесконечного множества пропозициональных переменных, обозначаемых обычно с помощью букв *p, q, r, s*.

Чтобы обеспечить возможность употребления сколь угодно большого числа таких переменных, указанные буквы используются с числовыми индексами, что при необходимости позволяет иметь алфавитно-упорядоченный список всех пропозициональных переменных. Другой составляющей такого языка являются пропозициональные логические связки. Обычно это конъюнкция "$\wedge$", дизъюнкция "$\vee$", отрицание "$\neg$" и импликация "$\supset$"[9]. В естественном языке аналогами этих связок являются соответственно союзы "***и***" и "***или***", "***не верно, что*** ..." и условный союз "***если*** ..., ***то***...". В языке м огут использоваться также разного рода вспомогательные символы. В качестве исходных берутся обычно

---

[8] См.: *Вайсман Ф.* Витгенштейн и Венский кружок // Аналитическая философия: становление и развитие. М., 1998. С. 51.

[9] Обозначения связок могут быть иными. Так конъюнкцию часто обозначают точкой, как знак умножения, и часто, как и последний, вообще опускают. Импликацию записывают с помощью разного рода стрелок.

круглые скобки, а другие при необходимости вводятся по определению (соглашению).

Понятие пропозициональной формулы определяется рекурсивно:

(1) Отдельная пропозициональная переменная есть пропозициональная формула.

(2) Если A есть пропозициональная формула, то $\neg A$ есть пропозициональная формула.

(3) Если A и B есть пропозициональные формулы, то $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$ и $(A \supset B)$ есть пропозициональные формулы (внешние скобки формул для удобства могут опускаться).

(4) Никакое иное выражение пропозициональной формулой не является.

Семантический смысл пропозициональных связок задается следующим образом. Пусть A и B - высказывания, которые могут быть либо истинными, либо ложными. Тогда:

(1) Конъюнкция $A \wedge B$, которую будем записывать также AB, является истинной, когда истинны и A, и B. Во всех остальных случаях $A \wedge B$ является ложной.

(2) Дизъюнкция $A \vee B$ - истинна, когда истинно по крайней мере одно из высказываний A или B. В противном случае $A \vee B$ - ложна.

(3) Импликация $A \supset B$ является ложной, когда A - истинно, а B - ложно. В остальных случаях импликация является истинной[10].

---

[10] Импликацию указанного типа принято называть материальной импликацией. Как и прочие типы импликации, она выступает в исчислениях в качестве формального аналога союза "Если ..., то ...", но в отличие от последнего, предполагающего, что в предложении вида "Если A, то B" между антецедентом A и консеквентом B для истинности этого предложения должна быть некоторая реальная связь.

(4) Отрицание высказывания – $\neg A$ является истинным, когда A – ложно. И, естественно, $\neg A$ – ложно, когда A - истинно.

Областью значений пропозициональных переменных являются конкретные высказывания. Так что любая формула превращается в некоторое высказывание, если на место всех переменных поставить некоторые предложения (конечно, одни и те же на место всех вхождений одной и той же переменной) и понимать логические связки как соответствующие союзы естественного языка. Для любого такого высказывания можно выяснить является ли оно истинным или ложным в некотором возможном мире.

Пропозициональная формула может считаться семантически истинной, если при любых значениях ее переменных (то есть, при подстановке вместо последних некоторых конкретных высказываний) она является истинной во всех возможных мирах. Как можем мы быть уверены, что рассмотрели все возможные миры? Нас в данном случае может выручить то обстоятельство, что содержание высказываний, которые подставляются на место переменных, никак не влияет на конечный результат. К какому бы возможному миру мы ни обращались, важно только, каково в нем истинностное значение этих высказываний. От этого и только от этого зависит результирующее истинностное значение высказывания, получаемого в процессе любой такой подстановки. Это означает, что нам, по сути дела, достаточно рассмотреть те и только те подстановки и те возможные миры,

---

материальная импликация такой связи не требует. Именно попытки ввести в язык логики связки, более адекватные условному союзу естественного языка, являются одной из причин построения релевантных логик.

которые позволят пересмотреть все возможные варианты подстановок истинных и ложных высказываний на место разных переменных. Технически это то же самое, что приписать переменным, как это делают истинностные таблицы, все возможные наборы истинностных значений из области $\{истина, ложь\}$.

Очевидно, что того же результата можно добиться, если в качестве возможных миров брать не множества всех конкретных высказываний, но все возможные множества переменных и их отрицаний. Поскольку пропозициональную переменную, а также ее отрицание принято называть литералами, такие множества называются множествами литералов. Вхождение переменной в такое множество без отрицания означает, что данная переменная в этом мире истинна, а с отрицанием – ложна.

Теперь для любой пропозициональной формулы, поскольку число ее переменных является конечным, всегда есть возможность обозреть в силу его заведомой конечности и все то множество миров, которое исчерпывает возможности всех различных приписываний истинностных значений разным переменным. Таким образом, мы получаем возможность судить обо всех истинностных значениях, которые может принимать формула в любом из миров.

В целях большей строгости и для удобства дальнейших обобщений мы в дальнейшем под возможным миром будем понимать любое алфавитно-упорядоченное множество неповторяющихся литералов $<a_1, a_2,..., a_n>$ ($n \geq 1$). Отдельный возможный мир мы будем обозначать с помощью буквы w с некоторыми индексами. Все множество возможных миров обозначим как W. Таким образом, W есть алфавитно-упорядоченное множество $< w_1, w_2,...>$, где каждое w_i есть некоторый возможный мир. При этом мы будем говорить о классическом понимании возможных миров (или в карнаповской терминологии - о классическом описании состояний), если только для всякого возможного мира w_i из W выполняются два следующих требования:

(C1) Ни в каком мире w_i никакая пропозициональная переменная a не встречается одновременно со своим отрицанием (*Условие непротиворечивости*).

(C2) Во всяком мире w_i любая пропозициональная переменная a встречается либо сама, либо с отрицанием (*Условие полноты*).

Описываемый классическими пропозициональными исчислениями класс формул задается семантическим образом как класс формул, истинных во всех возможных мирах. Иными словами, доказуемыми в этих исчислениях, то есть теоремами являются те и только те формулы, которые являются истинными (при указанном выше способе оценки формул с заданными пропозициональными связками) во всех возможных мирах. В этом смысле мы имеем семантику возможных миров для классической пропозициональной логики.

1.3. Семантика модальной логики

Мы уже заметили выше, что семантику классической пропозициональной логики можно получить и без использования понятия возможного мира, так как роль множества таких миров могут с успехом сыграть истинностные таблицы, с помощью которых различным переменным можно приписать все допустимые наборы истинностных значений, также как это делается при использовании возможных миров. Однако такого рода замена возможных миров таблицами осуществима обычно только в случае, когда логические связки являются истинностно-функциональными, то есть, когда истинностное значение некоторого сложного высказывания однозначным образом определяется в зависимости от истинностных значений его составляющих. Если же язык обогащается связками, которые не являются истинностно-функциональными и значения сложных высказываний с которыми зависят не только от истинностных характеристик составляющих, но и от некоторых других условий, то тогда использование возможных миров становится принципиальным.

Собственно семантика возможных миров получила развитие, признание и стала попросту необходимой, когда с ее помощью удалось построить адекватные семантики многочисленных к тому времени модальных логических исчислений, для которых до этого не было найдено подходящих содержательно и интуитивно оправданных семантик.

Построение таких семантик в конце 50-х годов связано с именами С. Кангера, Я. Хинтикки, А. Прайора, С.Крипке[11]. Основной особенностью предложенных семантик является то, что на множестве всех возможных миров задается некоторое (как правило, бинарное) отношение. От англий-

---

[11] Подробнее смотри об этом во вступительной статье Смирнова В.А. к книге переводов "Семантика модальных и интенсиональных логик". М., 1981. В число переводов входит статья Крипке С. "Семантическое рассмотрение модальной логики" с кратким, но строгим изложением семантики возможных миров для модальной логики. См. также [42].

ского *relation* (*отношение*) и общее название таких семантик как реляционных.

Указанное отношение называют по-разному. Мы будем именовать его здесь отношением достижимости. Утверждение о достижимости мира w_j из мира w_i будем записывать как w_iRw_j. И при верности такого утверждения будем говорить, что мир w_j возможен относительно мира w_i. Содержательно это означает, что в мире w_i мыслимы, допустимы в принципе такие изменения, при которых он превратился бы в мир w_j. А вот, скажем, мир, в котором *Марья моложе Ивана*, не является достижимым из (возможным относительно) мира, в котором *Марья мать Ивана*. При том, что в этих мирах под Марьей и Иваном разумеются одни и те же люди.

Реляционная семантика открывает возможность давать истинностные оценки высказываниям с модальностями. Допустим, у нас есть высказывание A. Пусть в мире w_i оно истинно. Тогда, естественно, предложение MA (*Возможно, что A*) в этом мире также истинно. А каким будет это же предложение в мире w_i в случае, когда высказывание A в этом мире ложно? Однозначного ответа здесь нет. MA может быть как истинным, так и ложным. Оператор возможности M не является истинностно-функциональным. Все зависит от того, что представляет собой A. В реляционной семантике MA считается истинным в некотором мире w_i, если и только если среди достижимых из w_i миров найдется такой мир w_j, в котором A истинно.

Вполне понятно, что высказывание NA (*Необходимо, что A*) в некотором мире w_i будет истинным, если и только если оно истинно в каждом мире w_j достижимом из w_i, то есть истинно в каждом мире w_j таком, что w_iRw_j.

Класс формул с операторами возможности M и необходимости N, которые окажутся общезначимыми (истинными во всех возможных мирах) в такой семантике, будет зависеть от свойств отношения R. В частности от того, является ли это отношение рефлексивным (каждый мир достижим из него самого), симметричным (*Если* w_iRw_j, *то* w_jRw_i), транзитивным (*Если* w_iRw_j *и* w_jRw_k, *то* w_iRw_k). В зависимости от этого семантика даст описание логических принципов, формализуемых той или иной из ряда известных логических теорий модальностей. Простой пример. Если отношение достижимости транзитивно, рефлексивно и симметрично, то в рамках реляционной семантики во всяком возможном мире w_i будет иметь силу $MA \supset NMA$. Действительно, если в w_i верно MA, то среди достижимых из w_i миров найдется такой мир w_j, в котором A истинно. В силу названных свойств отношения достижимости классы миров достижимых из w_i и из w_j, и из любого другого из них достижимого суть одни и те же. Так как A истинно в одном из этих миров, MA по определению является истинным в каждом из них, что опять же по определению означает, что в них верно NMA. Итак, верность MA гарантирует верность NMA, что и требовалось в данном случае показать.

Не будь отношение достижимости симметричным, мы вполне могли бы допустить достижимый из w_i мир w_k, из которого не достижим никакой мир (включая w_i), где верно A. Это означало бы, что NMA в w_i не является верным.

1.4. Три направления критики классической логики

Исторически одной из первых формальных теорий следования стала "теория материальной импликации", систематически представленная А. Уайтхедом и Б. Расселом в их знаменитом трехтомном труде "*Principia mathematica*" (1910-1913). За этой теорией и закрепилось название классической теории следования.

Классическая теория следования обладает целым рядом достоинств и довольно долго оставалась господствующей теорией вывода. В последние десятилетия, однако, в качестве равноправных наряду с классической сложились альтернативные теории логического следования. Центральное место здесь занимает релевантная логика. Прежде чем приступить к анализу этой логики и проблеме построения ее семантики, рассмотрим основные направления критики классической теории следования, так как именно от того, что именно становится предметом критики, зависит тот путь, на котором ищется альтернативное решение.

Естественно, что критика классической логики зависит от той или иной ее интерпретации и определенного истолкования тех целей, которые, как считают критикующие, должна решать теория, претендующая на адекватную формализацию логического следования.

Мы коснемся здесь трех основных направлений критики классической логики и соответствующей ей теории логического следования.

Первое из них связано с тем явно бросающимся в глаза обстоятельством, что истинностно-функциональная интерпретация материальной импликации, выступающей в качестве формального аналога условного союза, не адекватна общепринятому употреблению последнего. В соответствии с такой интерпретацией приходится признавать истинным всякое высказывание "Если *A*, то *B*", антецедент которого *A* ложен, а консеквент *B* истинен, несмотря на то, что какая-либо реальная связь между *A* и *B* может отсутствовать.

Однако разумное использование классической логики как раз и предполагает признание того, что между материальной импликацией и условной связкой естественного языка имеются весьма существенные различия. Без учета этих различий невозможна правильная оценка возможностей классической логики и границ ее применения. Сам по себе факт такого различия никоим образом не порочит классическую логику, как и любую другую, в язык которой входит материальная импликация.

Во-первых, эта импликация имеет четкий и ясный смысл и ее интерпретация как условного союза должна обязательно сопровождаться соответствующим пониманием последнего. То обстоятельство, что это понимание оказывается весьма специфичным и при описании некоторых условных высказываний вообще непригодным, в этом отношении ничего не меняет.

Во-вторых, материальную импликацию, вообще говоря, совсем не обязательно интерпретировать как "если ..., то...". В классической логике $A \supset B$ можно понимать как сокращение для дизъюнкции $\neg A \vee B$. При этом проблема несоответствия между материальной импликацией и условным союзом просто исчезнет.

Второе направление критики классической теории следования исходит из той предпосылки, что множество тавтологий этой теории вида $A \supset B$, где *A* и *B* сами не содержат знака материальной импликации, в точности совпадает с классом верных для языка классической пропозициональной логики утверждений о логическом следовании. В общем же случае, когда допускается итерирование импликаций, и знак "$\supset$" может входить в A и B, множество классических тавтологий шире, чем класс утверждений, в которых материальную импликацию во всех ее вхождениях оправдано было бы интерпретировать как логическое следование. Например, тавтологии вида $A\supset(B\supset A)$ и $A\supset(\neg A\supset B)$ в случае такой интерпретации приводят к утверждениям, что истинное высказывание следует из любого, а из ложного следует любое. Именно эти утверждения, а также тавтологии, порождающие их, стали называть *парадоксами материальной импликации*.

Поскольку в классической логике каждое высказывание A либо истинно, либо ложно, по крайней мере одно из высказываний $A\supset B$ или $B\supset A$ является истинным несмотря на то, что A и B берутся совершенно произвольно. Отождествляя материальную импликацию с логическим следованием, придется признать, что логически независимых друг от друга высказываний вообще не существует. Такое положение едва ли согласуется с нормальным пониманием логических взаимоотношений между высказываниями.

Защищая классическую теорию следования по обсуждаемому пункту, иногда выдвигают тот аргумент, что свойственные этой теории парадоксы не могут причинить никакого вреда при практическом ее использовании. Нет никакой нужды, говорят в этом случае, осуществлять вывод истинных высказываний из произвольных, когда истинность первых и без того уже установлена, или же принимать в качестве посылок заведомо ложные предложения, так как их все равно нельзя будет отбросить для получения следствий.

Н. Белнап по этому поводу резонно заметил, что при отождествлении логического следования с материальной импликацией теряют свою осмысленность совершенно корректные утверждения: "*Данное заключение истинно, но оно не вытекает из принятых гипотез*", "*Заключение не следует из данной посылки, да и сама посылка является ложной*". С этой точки зрения теория материальной импликации выглядит уродливой, так обоснованность вывода не связана с истинностью или ложностью посылок и заключения.

Второе рассмотренное направление критики классической логики также утрачивает свою значимость, как только материальную импликацию перестают интерпретировать как логическое следование. В настоящее время, пожалуй, почти никто не считает такую интерпретацию адекватной. При этом отвергается не теория материальной импликации как таковая, а определенный способ ее истолкования. Вместе с тем указанное обстоятельство означает, что проблема формализации логического следования, на которую претендовала эта теория, оказалась открытой.

Встал резонный вопрос, какие из числа классических тавтологий можно считать корректными (непарадоксальными) утверждениями при интерпретации материальной импликации как логическое следование. Одним из первых этот вопрос исследовал К. Льюис [33]. Он полагал, что логическое следование совпадает с необходимой материальной импликацией, названной им строгой. Для него классическая тавтология $A \supset B$ всегда соответствует корректному утверждению о логическом следовании B из A.

Третье направление критики классической теории следования связано именно с неприятием этого льюисовского положения. Строя семантику возможных миров для классической логики, мы видели, что в этой логике формула B является логическим следствием из формулы A, если и только если во всяком возможном мире, в котором истинно A, обязательно является истинным также и B. При этом оказывается, что любая формула B, которая сама семантически истинна (истинна во всех возможных мирах), такая, например, как $p \vee \neg p$, должна быть признана следствием любой произвольно взятой формулы A.

Очевидно также, что в случае, когда A представляет собой тождественно-ложную формулу, которой нельзя приписать значение "истинно" ни в каком из возможных миров, любая произвольно взятая формула B оказывается следствием из A. В результате получается, что необходимые высказывания следуют из любого, а невозможные влекут любое. Льюис такие принципы посчитал уместными и сохранил их в своей теории строгой импликации. И именно *парадоксами строгой импликации* принято их именовать.

Проблема построения достаточно богатой формализованной теории логического следования, свободной от интуитивно неприемлемых (парадоксальных) принципов, продолжалась многие годы. Задача оказалась далеко не тривиальной. И потребовала в первую очередь не технических решений, а выработки определенных установок по целому ряду общелогических проблем, относительно которых у исследователей имелись и остаются весьма серьезные расхождения. Естественно, что нахождение общеприемлемых решений оказывается при этом делом затруднительным.

Несмотря на присущие им различия предлагаемые решения объективно представляли собой те или иные модификации теории материальной импликации, образованные за счет разного рода сужений и ограничений последней.

Все, по существу, определялось тем, какие из утверждений классической теории следования считал нерелевантными, интуитивно неприемлемыми, парадоксальными или ответственными за появление парадоксов предлагающий решение автор. Всем, естественно, хотелось построить логику, содержащую только уместные принципы и в этом смысле релевантную. Нетрудно понять, что ссылка на интуицию при отсутствии четких, обоснованных или хотя бы общепринятых критериев релевантности оставляла достаточно большую свободу в решении вопроса о том, какие из утверждений классической логики следует (или, напротив, не следует) относить к числу неприемлемых, парадоксальных.

Мне, например, кажется вполне понятной точка зрения тех исследователей, которые, апеллируя к интуиции, обнаруживают несоответствие между льюисовской строгой импликацией и логическим следованием и отвергают парадоксы строгой импликации в качестве релевантных принципов логики. Другие логики этого мнения не разделяют. А. Прайор допускал такую, как мне кажется, странную вещь, что парадоксы Льюиса указывают, возможно, на определенную внутреннюю связь, которую необходимые и невозможные суждения как таковые имеют со всеми суждениями вообще [34, с. 196].

Что же касается отвержения тех или иных классических принципов по интуитивным основаниям, то вот четко выраженная и трудно оспариваемая позиция Дж. Поллака [35, с.183-184]: "К сожалению, я нахожу, что у меня нет никакой интуитивной реакции на парадоксы и мне не ясно, как кто-либо другой может ее иметь. Как можем мы знать на интуитивных основаниях, без аргументации, существует или нет некоторый, возможно весьма сложный, обоснованный вывод какого-то данного аналитического высказывания из некоторого другого? Я не думаю, что это можно решить на чисто интуитивных основаниях. Во всяком случае те из нас, - продолжает Поллак, - кто не имеет какой-либо интуиции в отношении парадоксов, не могут быть удовлетворены их чисто интуитивным отвержением. Философская позиция не может быть отвергнута с помощью интуиции, не разделяемой всеми".

Построение релевантных логик связано, однако, не только с некоторой интуитивной неприемлемостью определенных принципов классической логики, но и с серьезными практическими соображениями.

Логическое следование, формализуемое классической логикой, принципиально блокирует саму возможность оперирования с совокупностью данных, которые оказались в каких-то пунктах, пусть даже не существенных, противоречивыми, ибо вынуждает считать следствиями этих данных (в силу их противоречивости) все, что угодно. Формальные теории, базирующиеся на теориях материальной и строгой импликаций, оказываются в целом ряде случаев принципиально непригодными для описания суждений в содержательных контекстах. А именно с такими контекстами мы, как правило, имеем дело при попытках использования логики в решении философских проблем.

Что несомненно верно, так это то, что предлагаемое в качестве альтернативы к классическому подходу решение должно быть хорошо обосновано. А такое обоснование невозможно без хорошей содержательной семантики предлагаемой формализации логического следования.

1.5. Семантика релевантного следования для классических пропозициональных формул

Пусть A и B - классические пропозициональные формулы. В каком случае вторая является логическим следствием первой в релевантном смысле? Как мы видели, в семантике возможных миров попытка считать B следствием из A на том основании, что во всех мирах, где истинно A, таковым является B, приводит к признанию, что любое B есть следствие противоречивого A.

Причина понятна: ни в каком мире такое A нельзя верифицировать (приписать значение "истинно"), в результате чего условие следования автоматически выполняется для любого B. Понятно, что при тавтологичном (логически истинном) B условие следования (в силу невозможности ни в каком мире фальсифицировать B) автоматически выполняется для любого A.

Поскольку в релевантной логике стремятся избежать именно такого положения, то возникает естественная идея отказаться от условий непротиворечивости и полноты возможных миров (смотри выше: условия С1 и С2). При таком отказе никакая классическая формула уже не может ни верифицироваться, ни фальсифицироваться во всех мирах. Возможность приписать противоречивой формуле значение "истинно" в противоречивом описании состояний не позволяет уже считать, что из нее следует любая формула. По аналогичной причине формула B, истинная во всех классических описаниях состояний, не может считаться логическим следствием из произвольной *A*, так как для любой такой формулы, не гарантирующей в случае своей истинности также истинности *B*, всегда найдется неполный мир, в котором *A* не верифицируется.

Класс верных утверждений в семантике без ограничений C1 и C2 становится более узким и совпадает с классом теорем системы E_{fde}[12], описывающей формулы, имеющих вид $A \to B$, где *A* и *B* – формулы классической логики.

Семантики первопорядкового (не имеющего итераций знака "→") релевантного следования, использующие неполные и противоречивые описания состояний, или, как иногда говорят о последних, "*невозможные возможные миры*", были построены рядом авторов. В частности, Е.К.Войшвилло предложил называть их *семантиками обобщенных описаний состояний* и много сделал для их содержательного обоснования [8]. Не отвергая эвристической значимости таких семантик, я полагаю вместе с тем, что их использование кладет на релевантную логику тень искусственности, которая присуща конструированию и самому допущению *невозможных возможных миров*. Это обстоятельство может породить нежелательное представление о некоей экстравагантности релевантной логики по сравнению с классической, тогда как сама цель построения релевантной логики состоит в том, чтобы приблизить символическую логику к обычным содержательным рассуждениям, от исто-

---

[12] Индекс в названии (весьма недавнем) системы происходит от первых букв английских слов *first degree entailment* (*первого порядка следование*).

рически и практически сложившихся норм которых во многих пунктах отошла логика классическая символическая логика с ее воистину экстравагантными принципами, что истина следует из всего, а из лжи что угодно. Традиционная логика всегда учила, что корректность рассуждений никак не связана с истинностью или ложностью входящих в универсум рассуждения предложений.

Имеет смысл заметить, что хотя семантика обобщенных описаний состояний оперирует явным образом лишь двумя истинностными значениями, она фактически является четырехзначной. Так любая формула может быть в некотором описании состояний (возможном мире): (1) только истинной; (2) только ложной; (3) одновременно и истинной, и ложной; (4) неопределенной, то есть ни истинной, ни ложной[13].

Классическое следование можно описать в рамках этой семантики, не затрагивая множества описаний состояний, иначе говоря, также, как и в случае релевантного следования, обойтись без ограничений C1 и C2.

Классическая пропозициональная формула *B* является логическим следствием из формулы *A* (в классическом смысле), если и только если среди множества обобщенных описаний состояний не существует такого описания *w*, в котором *A* – только истинно, а *B* – только ложно.

Справедливость приведенного утверждения вытекает из того, что противоречивые формулы ни в каком описании состояний не бывают только истинными, а классические

[13] Формальная семантика с указанной содержательной интерпретацией истинностных значений имеется у Павлова С.А. [43].

тавтологии ни в каком описании состояний не могут быть только ложными. Различие в понимании классического логического следования и релевантного связано, таким образом, не с различием в структуре допускаемых описаний состояний, но с различием принимаемых условий корректности утверждений о следовании. На это важно обратить внимание по той причине, что семантики обобщенных описаний состояний способны затушевать реальные различия между различными пониманиями логического следования. С классической точки зрения утверждение о следовании между $\neg(p \supset p)$ и q является корректным, так как исключена ситуация, при которой верно $\neg(p \supset p)$ и не верно q. Релевантная логика отвергает такое утверждение, исходя из отсутствия реальной связи между $\neg(p \supset p)$ и q, но отнюдь не потому, что семантика обобщенных описаний состояний позволяет верифицировать $\neg(p \supset p)$. Другое дело, что мы ищем некоторые семантические способы отвержения неугодных утверждений.

Здесь, конечно, есть определенное неудобство, связанное с импликацией. Казалось бы, импликация, хоть и материальная, вида $A \supset A$ должна быть истинной во всех мирах, и соответственно ее отрицание во всех мирах должно быть ложным. Но тогда $A \supset A$, как и раньше, придется считать следствием из любой формулы, и любую формулу следствием из отрицания $A \supset A$.

Выход находят в том, что материальную импликацию или вообще изгоняют из языка, оставляя только конъюнкцию, дизъюнкцию и отрицание (язык КДО), или, что в общем то же самое, рассматривают материальную импликацию $A \supset B$ как сокращение для $\neg A \vee B$.

По сути, мы имеем здесь дело не с решением проблемы, а с уходом от ее решения. Все, чего мы при этом добиваемся - это строим теорию (релевантного) логического следования только для тех формул языка, которые при избираемой семантике не могут быть ни семантически истинными, ни семантически ложными. При этом сами утверждения о логическом следовании либо вообще не относятся к объектному языку, для которого мы эту теорию строим, либо в языке принимаются только так называемые первопорядковые утверждения о следовании, не допускающие итерации следования. Фактически это означает, что мы лишаемся возможности строить семантику для языка, допускающего итерацию импликаций. Иными словами, язык, для которого мы можем строить семантику следования указанного типа, не должен включать выражений вроде закона контрапозиции $A \to B \to . \neg B \to \neg A$, принципа транзитивности $A \to B \to . B \to C \to A \to C$ и любых других, содержащих импликации импликаций.

1.6. Логическое следование и импликативные исчисления

Логические исчисления, в язык которых входит некоторая импликация и при этом допускается ее неограниченная итерация, будем называть импликативным.

Сложилась устойчивая традиция: отождествлять проблему адекватной формализации логического следования с задачей построения импликативного исчисления такого, в доказуемых формулах которого можно было бы все вхождения импликации интерпретировать как знаки логического следования. При этом должны получаться все корректные и только корректные логические принципы, которые могут быть сформулированы в рамках принятого формального языка.

Именно в русле этой традиции сложилась и сама теория материальной импликации, и альтернативные ей теории строгой, сильной, аналитической, коннексивной, интенсиональной, релевантной и некоторых других. Все они вкупе с целым рядом их модификаций несмотря на присущие им довольно существенные различия строились для адекватной формализации логического слёдования[14]. Я попытаюсь теперь убедить читателя, что сам подход к проблеме формализации следования в этом случае не является состоятельным.

Допустим, что в некотором исчислении *S* класс теорем вида $A \rightarrow B$, где *A* и *B* не содержат знака импликации, в точности совпадает с классом корректных утверждений о логическом следовании. Вопрос о критериях такой корректности нас пока не интересует. Важно лишь, что они установлены независимо от исчисления, так как иначе мы вообще не могли бы оценивать теоремы указанного вида как корректные или некорректные. Очевидно, что класс теорем, в которых импликация "$\rightarrow$" встречается неоднократно (итерируется), зависит от того, какой смысл намерены придать ей в исчислении. При этом нет никаких оснований считать, что какое-то из бесконечного числа различных по классу своих теорем возможных исчислений, различным образом эксплицирующих импликацию, может претендовать на роль

[14] Как остроумно заметила Щипкова А.В. все хотели построить теорию некой *непорочной* импликации.

адекватной формализации логического следования в большей степени, чем другое.

Только главный знак импликации в доказуемых формулах исчислений правомерно понимать как логическое следование. Только этот знак может быть осмысленно заменен на штопор (знак логической выводимости): "$\vdash$". Из теоремы вида $(A \to B) \to (C \to D)$ мы получим корректное метаутверждение $(A \to B) \vdash (C \to D)$ о выводимости в отличие от бессмысленного $(A \vdash B) \vdash (C \vdash D)$. Утверждение о логическом следовании всегда есть утверждение метаязыка и принципиально не может быть формализовано в объектном языке исчисления.

Абсолютно ясно, например, что льюисовская критика классической теории логического следования может иметь смысл, только если материальная импликация во всех своих вхождениях в классические теоремы рассматривается как логическое следование. Это ясно из того, что все утверждения вида $A \vdash B$, верные с точки зрения классической логики (в том числе парадоксальные $p \vdash q \supset p$ и $p \vdash \neg p \supset q$), приемлемы с точки зрения всех исчислений *S1* - *S5* льюисовской строгой импликации.

Мы сталкиваемся, таким образом, с любопытной ситуацией. Классическая теория следования является для Льюиса парадоксальной при отождествлении материальной импликации с логическим следованием и мгновенно перестает быть таковой при (вызванном такой парадоксальностью) отказе от подобного отождествления. Ибо в последнем случае ей соответствуют все те и только те утверждения вида $A \vdash B$, которые являются верными с точки зрения теории строгой импликации. Утверждения $p \vdash q \supset p$ и $p \vdash \neg p \supset q$ при таком отказе уже не могут больше рассматриваться как парадоксы логического следования. Их, правда, еще можно отнести к числу парадоксальных по иным основаниям. Например, при отождествлении материальной импликации с условным союзом. Но при желании, как мы видели выше, можно избежать и такой парадоксальности, признав за материальной импликацией некоторый особый смысл.

Покажем, что исключение из объектного языка исчисления знака логического следования не препятствует задаче его экспликации. Пусть в импликативном исчислении S знак импликации "$\Rightarrow$" интерпретируется как условный союз, Предположим, что утверждение $A \vdash B$ верно в силу S. если и только если формула $A \Rightarrow B$ доказуема в S (символически: $\vdash A \Rightarrow B$). И пусть при этом класс утверждений вида $A \vdash B$, верных в силу S, исчерпывает для соответствующего языка все приемлемые и только приемлемые принципы логического следования.

Рассмотрим теперь, какую пользу может принести расширение объектного языка исчисления за счет знака логического следования "$\rightarrow$" и принятия соответствующих дополнительных аксиом и, возможно, правил вывода, регулирующих нормы его употребления. Результирующее исчисление обозначим как S^{+}. В соответствии с принятыми допущениями формула вида $A \rightarrow B$, где A и B относятся к языку S и, значит, не содержат знака"$\rightarrow$", может быть включена в число теорем S^{+} только при условии, что $A \Rightarrow B$ доказуема в S. Понятно поэтому, что никаких новых утверждений о выводимости для высказываний старого объектного языка мы в связи с предпринятым расширением исчисления не получим.

Доказуемые в S^{+} формулы, в которых знак логического следования встречается неоднократно, казалось бы, должны представлять интерес как утверждения о свойствах самого логического следования. Они, однако, не способны дать ничего нового по сравнению с утверждениями о логическом следовании, которые можно получить при исследовании S.

Пусть, скажем, в S^+ доказуема формула, соответствующая теоремной схеме вида $(A \to B) \to (C \to D)$, где A, B, C, D - произвольные выражения языка S. По каким бы соображениям ни включалась эта формула в число доказуемых, этого в принципе нельзя бы было сделать, если бы для S не были справедливы метаутверждения: $(\vdash A \to B) \supset (\vdash C \to D)$[15] и $A \vdash B \supset C \vdash D$, первое из которых всегда может быть доказано как производное правило вывода.

Для характеристики логического следования принимается обычно закон его транзитивности: $(A \to B) \to ((C \to A) \to (C \to B))$. В системе S^+ он может быть принят только в случае, когда в S верно утверждение $A \vdash B \supset (C \vdash A \supset C \vdash B)$, характеризующее логическое следование таким образом, что принятие указанного закона выглядит излишним. Даже такой, казалось бы, совершенно необходимый для экспликации логического следования принцип, как аналитически записанный *модус поненс* $(A \to B)A \to B$, практически бесполезен. Действительно, если в исчислении нет правила модус поненс, позволяющего получить B из $(A \to B)$ и A, то обсуждаемый принцип сделать этого также не дает. Принятие же правила ничего к пониманию логического следования не добавляет.

Таким образом, введение в язык исчислений импликации для экспликации логического следования может счи-

---

15 Здесь знак материальной импликации "$\supset$" используется как метасимвол для "если .... то ...".

таться неоправданным не только по указанным выше семантическим соображениям[16], но и потому, что не дает практической пользы. Заметим, что речь идет не об импликативных исчислениях вообще, построение которых для описания различных типов условных связей вполне и законно, и оправданно, а только о попытках использовать такие исчисления для формального описания логического следования, относящегося к метаязыку, в объектном языке.

Попытки решить проблему формализации логического следования с помощью импликативных исчислений подвергались критике со стороны ряда серьезных исследователей, в частности таких, как В. Куайн [36], Д. Скотт[37] и других, за смешения языка и метаязыка, логического следования и условного союза.

Известно, что льюисовские системы можно получать, расширяя язык классического пропозиционального исчисления не за счет связки логического следования (строгой импликации), а за счет введения модальных операторов. Пусть P_{mod} получается из классического пропозиционального исчисления PC за счет принятия двух дополнительных аксиомных схем:

$$(1)\ NA \supset A \quad \text{и} \quad (2)\ N(A \supset B) \supset N(NA \supset NB)$$

и дополнительного правила вывода (*правила Геделя*):

RG. Из A следует NA.

Оператор возможности определяется в P_{mod} через оператор необходимости:

$$MA =_{\mathrm{df}} \neg N \neg A.$$

---

16 Некоторые дополнительные аргументы на этот счет мы дадим ниже при построении двухуровневой семантики релевантной логики.

Строгая импликация $A \to B$ вводится как сокращение для $N(A \supset B)$. Исчисление эквивалентно модальной системе *S4* Льюиса. В ней доказуемы формулы: $NA \supset NNA$, $N(A \supset B) \supset (NA \supset NB)$, $N(AB) \supset NANB$. Имея в виду аксиомы (1), (2) и эти теоремы, будем говорить о понимании необходимости в стиле льюисовской системы *S4*.

Добавляя к P_{mod} аксиому

$$(3)\ MA \supset NMA,$$

мы получим льюисовскую систему *S5*. Ограничивая правило Геделя так, чтобы им можно было воспользоваться только тогда, когда A есть теорема *PC* или аксиома P_{mod}, получим из S4 систему, эквивалентную S3. Сохраняя указанное ограничение на *RG*, получим систему, дедуктивно эквивалентную льюисовской S2, если заменим аксиому (2) более слабой:

$$(2')\ N(A \supset B) \supset (NA \supset NB),$$

и наконец получим систему, эквивалентную льюисовской S1, если примем вместо аксиомы (2) аксиому:

$$(4)\ N(A \supset B)\, N(B \supset C) \supset N(A \supset C)$$ [17]

Таким образом, для построения исчислений со строгой импликацией нет никакой необходимости касаться свойств логического следования. Эти исчисления могут рассматриваться как расширения классического пропозиционального исчисления за счет утверждений, эксплицирующих модальности. При попытках истолковать строгую импликацию как логическое следование, понимание последнего ставится в зависимость от трактовки модальностей, от тех свойств,

[17] Все приведенные здесь утверждения о дедуктивной эквивалентности P_{mod} и его модификаций системам S1-S5 доказаны Е. Леммоном [38].

которые придает модальностям та или иная из рассмотренных систем.

Так вопрос о верности принципа транзитивности логического следования $(A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C))$ становится зависимым от этих свойств, хотя сами модальные операторы здесь явным образом не фигурируют. И, если это оправданно, когда $(A \to B)$ рассматривается как сокращение для $N(A \supset B)$, то в том случае когда строгая импликация трактуется как адекватная логическому следованию, такое положение трудно признать оправданным.

Как оценить то, что принцип транзитивности логического следования в указанном выше виде принимается в системах S3-S5, но отвергается в системах S1 и S2, где имеет силу только более слабая его форма $(A \to B)(B \to C) \to (A \to C)$? Считать, что различные системы дают различные экспликации логического следования? Такой ответ, конечно, возможен. Он, однако, не объясняет причин столь жесткой связи между типом принимаемой экспликации логического следования и свойствами модальных операторов. Такая связь не диктуется ни свойствами логических исчислений, ни содержательными соображениями.

Кто-то может, впрочем, полагать, что модальности являются в обсуждаемых системах логическими и поэтому должны однозначно коррелироваться с тем, как понимается логическое следование. Здесь мы снова впадаем в смешение языка и метаязыка. И допускаем, что логически возможное и необходимое можно эксплицировать прежде, чем это будет сделано в отношении логического следования.

Оставим пока этот общетеоретический спор и заметим, что формально ничто не мешает нам строить исчисления со строгой импликацией, отказавшись от определения

$(A \to B)$ как $N(A \supset B)$. При этом мы получим возможность описывать строгую импликацию и модальности в достаточной степени независимо. Можно, например, построить такое модальное пропозициональное исчисление P_m, что всякая формула без модальностей будет теоремой в *S5*, а с модальностями, но без знака строгой импликации, теоремой *S2*. Системы *S2* и *S5* берутся, естественно, в качестве примера, чтобы подчеркнуть возможность независимого описания модальностей и импликации. Вопрос о том, какая форма транзитивности для строгой импликации более уместна, перестает зависеть от той или иной трактовки модальностей.

Надо иметь в виду, что критикуются здесь не системы *S1* - *S5* сами по себе. Критикуется определенный способ истолкования описываемой в них строгой импликации. Критика, как и в случае с материальной импликацией, моментально утрачивает свой смысл при понимании строгой импликации не как логического следования, а как необходимой условной связи. Необходимой в том смысле, какой придает оператору необходимости то или иное исчисление. Однозначная зависимость свойств строгой импликации от свойств модальностей, используемых для ее определения, получает при этом естественное объяснение.

Сам Льюис считал возможным интерпретировать описываемую в его системах необходимость как логическую[18],

---

[18] По мнению многих авторов, особенно тяготеющих к философии позитивистского толка, никакой иной необходимости, кроме логической, нет вообще. Разговор об онтологической необходимости, о необходимой связи не просто между высказываниями, а между описываемыми в них событиями, представляется им философски подозрительным.

что и позволяло ему отождествлять строгую импликацию с логическим следованием. К этому он, собственно, и стремился. Его основной целью, пишет Р. Фейс [39 с. 50], "было построение *строгого* исчисления, которое могло бы выполнять функции обычного пропозиционального исчисления, но в котором так называемые парадоксальные теоремы не были бы выводимы". Формально задачу, которую решал Льюис, можно представить как проблему нахождения некоторого критерия, в соответствии с которым можно осуществлять в теоремах классического пропозиционального исчисления замену материальной импликации знаком логического следования (строгой импликации), получая при этом только "корректные" принципы логики. И хотя Льюис справедливо считается отцом современной модальной логики, сам он модальности использовал главным образом как удобное эвристическое средство для решения указанной задачи.

Однозначная связь между модальностями и логическим следованием присуща практически всем претендующим на экспликацию логического следования системам. Различие при этом состоит лишь в том, что в одних случаях, как у Льюиса, логическое следование определяется при помощи модальностей, взятых в качестве исходных операторов, а в других модальности определяются через логическое следование. Формально такое различие выглядит как чисто техническое. Можно поступить так и этак, получив одну и ту же результирующую систему.

И все же с содержательной точки зрения первый подход является более предпочтительным по следующим основаниям. В этом случае в язык исчисления вводится некоторая новая связка, определяемая через модальности и через некоторые другие независимые от понимания модальностей исходные логические связки. Если не отождествлять эту новую связку с “подлинным” логическим следованием, то зависимость ее свойств от принятого понимания модальностей оказывается совершенно естественной. Так строгая импликация есть необходимая материальная импликация, и ее свойства понятным образом зависят от того, как толкуется необходимость.

Когда же поступают в соответствии со вторым подходом и определяют необходимость и возможность через импликацию, претендующую на роль адекватного логического следования, свойства названных модальностей оказываются однозначно детерминированными. Если вообразить при этом, что некое исчисление описывает логическое следование адекватным образом, то, по-видимому, придется считать, что никакое иное толкование необходимости и возможности нельзя признавать правомерным.

С точки зрения теории сильной импликации Аккермана [40] всякое утверждение вида $MA \to NMA$ является принципиально неверным. Дело в том, что необходимость определяется в этой теории как высказывание о логическом следовании: NA есть $\neg A \to \Lambda$, где Λ обозначает “ложь”, “абсурд”. А никакое утверждение о логическом следовании не может в этой теории быть следствием из случайного высказывания. Таким образом, специфическое для льюисовской системы $S5$ и вполне оправданное смыслом фигурирующих там модальностей утверждение оказывается в теории сильной импликации заведомо неприемлемым.

Само по себе требование о невыводимости утверждения о логическом следовании из случайного предложения является довольно резонным. Но именно оно и ставит под сомнение правомерность определения необходимости как логического следования. Принимая такого рода определение, упускают из виду особенности высказываний с итерированными модальностями. В частности, особенности высказываний о необходимости у них той модальной характеристики, которая им присуща.

Речь идет о высказываниях типа: "Необходимо, что данное высказывание возможно", "Необходимо, что данное высказывание случайно". Являясь необходимыми по форме они по существу утверждают те самые модальные характеристики, о необходимости которых говорят. Именно это обстоятельство и отображается в эквивалентности *MA* и *NMA*. В такой эквивалентности нет ничего противоестественного, и она не должна априори отвергаться. А если это так, то не всякое необходимое утверждение является утверждением о логическом следовании одного высказывания из другого, как это предполагает критикуемое определение.

Что касается определения логически необходимого высказывания, как такого, отрицание которого влечет противоречие, то оно должно было бы ограничить класс таких высказываний лишь теми, отрицания которых противоречивы. Но тогда едва ли следовало бы прибегать к введению константы Λ.

Не случайно Андерсон и Белнап, построившие на базе аккермановской логическую теорию, которую в логике теперь принято называть релевантной, отказались от введения такой константы [5]. В предложенной ими теории утверждение *A* считается необходимым, если оно является следствием из логически истинного, представителем которого для конкретного *A* является принцип $A \rightarrow A$. На некоторые неудовлетворительные последствия такого подхода мы обратим внимание ниже. Сейчас отметим только, что имеется существенная разница между утверждениями вида $(A \to A) \to A$ и $A \to A \vdash A$. Во втором случае мы действительно имеем дело с выводимостью A из закона тождества. Что касается первого случая, то он может быть частью некоторого выражения, в котором его верность обусловлена некоторыми дополнительными причинами. Так, например утверждение $A \to .(A \to A) \to A$ является подстановочным случаем закона утверждения консеквента $A \to .(A \to B) \to B$ и не должно поэтому трактоваться таким образом, что из A следует, что оно следует из закона логики.

2. Семантическое построение релевантной логики

В следующей главе мы перейдем к изложению двухуровневой семантики возможных миров, в которой указанные выше трудности, связанные с проблемой итерации импликаций, удается преодолеть, за счет того, что формула *B* исчисления рассматривается как семантически истинная, если и только если она верифицируется в тех мирах, где постулирована истинность $B \to B$. При этом семантическая истинность *B* не влечет семантической истинности $A \to B$. Двухуровневая реляционная семантика позволяет избежать парадоксов следования и легко адаптируется ко всем исчислениям релевантной логики и их модальным и кванторным расширениям.

Прежде, однако, мы хотели бы продемонстрировать несколько принципов построения релевантной пропозициональной логики на достаточно простых синтаксических и семантических основаниях, не требующих ни использования "невозможных" возможных миров, ни верифицирования противоречий, ни фальсифицирования логических истин[19].

Пусть *A* и *B* – классические пропозициональные формулы. Необходимым условием, при котором *B* может счи-

[19] Подробное изложение предлагаемого подхода дано в моих работах: Семантическое построение релевантных логик // Логические исследования. М., ИФ АН СССР. 1983. С. 81-85; Семантическое построение пропозициональной релевантной логики // Семантические и синтаксические исследования неэкстенсиональных логик. М.: Наука. 1989. С. 221-245.

таться логическим следствием формулы A (формально: $A \to B$), является то, что B не может быть ложным при истинном A. Когда это условие признается не просто необходимым, но и достаточным, мы имеем дело с классическим пониманием логического следования. Основной аргумент против такого понимания состоит в том, что формулы A и B могут быть между собой никак не связаны, как, например, в случае, когда в них нет ни одной общей переменной.

В связи с этим резонным является чисто формальное синтаксическое условие, получившее название *принципа релевантности*, требующее, чтобы A и B имели общую переменную. Очевидно вместе с тем, что с точки зрения самого подхода, приводящего к принципу релевантности, далеко не каждое утверждение $A \to B$, удовлетворяющее приведенным условиям, окажется корректным принципом следования. Очевидно, что нельзя признать корректным выполняющее принцип релевантности утверждение $\neg pp \to pq$, отвергая при этом $\neg pp \to q$.

Покажем, что имеется возможность последовательного проведения принципа релевантности в отношении всех классических тавтологий вида $A \supset B$. Пусть $A^* \supset B^\circ$ есть формула, где A^* – формула в дизъюнктивной нормальной форме (*днф*) вида $A_1 \vee \ldots \vee A_n$, эквивалентная формуле A, а B° – формула в конъюнктивной нормальной форме (*кнф*) вида $B_1 \wedge \ldots \wedge B_m$, эквивалентная формуле B [20]. При этом для релевантности $A \supset B$ требуется, чтобы любые формулы A_i и B_j ($i \leq n$), ($j \leq m$) имели общую элементарную составляющую

[20] Понятия *днф* и *кнф* в данном случае носят специфический характер, так как допускают соответственно противоречивые конъюнктивные и тавтологичные дизъюнктивные составляющие. Строгое определение дается ниже в параграфе 12 (определения D10 и D11).

(одинаковую переменную или отрицание одинаковой переменной).

Реализация названного требования дает базисную или первопорядковую теорию следования, формализуемую системой E_{fde}[21]. При этом, правда, приходится принимать некоторые утверждения в качестве заведомо корректных. К ним относятся законы де Моргана, законы дистрибутивности конъюнкции и дизъюнкции, законы двойного отрицания и ряд других, позволяющих в своей совокупности обеспечить сведение всякой формулы к *днф* и *кнф*. Семантики в полном смысле слова так построенная теория следования не имеет.

Более сильным, чем принцип релевантности, является требование, согласно которому $A \to B$ может быть корректным утверждением о логическом следовании, если только существует классическая тавтология $A' \supset B'$, антецедент которой не является тождественно ложным (противоречивым), а консеквент тождественно истинным (тавтологичным) и $A \supset B$ представляет собой подстановочный частный случай этой тавтологии. Это требование, которое в литературе получило название *WGS*-критерия (по первым буквам фамилий G. von Wright'a, P. Geach'a и T. Smiley'a, которые независимо друг от друга его сформулировали), носит очевидный семантический характер и является содержательно

[21] Именно так были построены, когда понятия *релевантная логика* еще не существовало, эквивалентные E_{fde}, система *B* (*basic*, *базисная*) в докторской диссертации Н. Белнапа (1960) и система *G* (*general*, *общая*) в моей дипломной работе (1968, публикация: *Сидоренко Е.А.* Некоторые варианты систем логического следования // Неклассическая логика. М.: Наука, 1970. С.52-59).

оправданным, требуя определенной связи между антецедентом и консеквентом утверждений о логическом следовании.

Легко, однако, заметить, что возможны случаи, когда формулы $A \to B$ и $B \to C$ удовлетворяют указанному критерию, а формула $A \to C$, которая получается из них в силу транзитивности следования, этому критерию не удовлетворяет. Примером могут служить утверждения, когда A есть $\neg pp$, B представляет собой $\neg pp \vee q$ и C есть q. Полагая, что логическое следование транзитивно, приходится осуществлять выбор между принятием $\neg pp \to \neg pp \vee q$ и $\neg pp \vee q \to q$ на каких-то дополнительных основаниях, получая в зависимости от характера последних различные классы принимаемых утверждений о логическом следовании[22].

Неоднозначность *WGS*-критерия связана с тем, что в нем не учитывается логическая структура антецедентов и консеквентов удовлетворяющих ему импликаций. Пусть $B \to C$ по предположению выражает некоторый заведомо релевантный принцип. Тогда для любой противоречивой

---

[22] Два принципиально возможных пути построения так называемых паранепротиворечивых логик, не позволяющих получать из противоречия произвольных следствий и тем самым предохраняющих противоречивые теории, на таких логиках базирующиеся, рассмотрены мной в [27, 30]. Там демонстрируется, в частности, что один из них, исторически первый, состоит в ограничении на вывод (или даже недопустимости выводов) из противоречия, второй (по нему пошла релевантная логика) заключается в отказе от универсального использования принципа непротиворечия. Без того или иного из этих ограничений появление в логической теории парадоксов следования оказывается неизбежным. Нельзя допускать противоречивости универсума рассуждения (вывода из противоречивых посылок) с одновременным провозглашением недопустимости противоречия и принятием базирующихся на такой невозможности логических принципов.

формулы A (пусть для определенности эта формула не имеет с B и C ни одной общей переменной) утверждение $A \vee B \rightarrow C$ удовлетворяет обсуждаемому критерию. Однако принятие данного утверждения в качестве релевантного вынуждает к отказу от принципа $A \rightarrow A \vee B$, так как в противном случае придется признать, что из противоречивого A следует C, а значит, что угодно.

Подобного положения можно избежать за счет следующего усиления *WGS*-критерия.

2.1. Будем говорить, что утверждение $A \rightarrow B$ удовлетворяет *сильному WGS-критерию*, если и только если обычному *WGS*-критерию удовлетворяет всякое утверждение $A' \rightarrow B'$, где A' и B' – любые формулы, для которых $A' \rightarrow A$ и $B \rightarrow B'$ удовлетворяют *WGS*-критерию.

Оставаясь в рамках классической семантики пропозициональных связок, можно указать эффективную процедуру, позволяющую однозначным образом решать для любого утверждения $A \rightarrow B$, удовлетворяет ли оно сильному *WGS*-критерию или нет.

Пусть $a_1, \ldots, a_n$ – алфавитно-упорядоченный список всех пропозициональных переменных из формулы A, а $b_1, \ldots, b_m$ – аналогичный список переменных из B. Пусть далее A^k есть некоторая непустая конъюнкция формул $A_1, \ldots, A_n$, где каждое A_i ($i \leq n$) либо пусто, либо есть переменная a_i, либо ее отрицание $\neg a_i$, либо имеет вид противоречивой конъюнкции $\neg a_i a_i$. И пусть, наконец, $A^k \vee B^d$ есть некоторая непустая дизъюнкция формул $B_1, \ldots, B_m$, где каждое B_i ($i \leq m$) либо пусто, либо есть переменная b_i, либо ее отрицание $\neg b_i$, либо имеет вид тавтологичной дизъюнкции $\neg b_i \vee b_i$. Число формул вида A^k и B^d, очевидно, конечно. Будем рассматривать только те из них, для которых $A^k \supset A$ и $B \supset B^d$ удовлетворяют WGS-критерию[23]. А из их числа только те A^k и B^d, из которых нельзя вычеркнуть ни одной конъюнктивной и соответственно дизъюнктивной составляющей. Такие формулы обозначим как A^{kr} и B^{dr} соответственно. Тогда имеет силу утверждение:

2.2. Формула $A \to B$ удовлетворяет сильному WGS-критерию, если и только если обычному WGS-критерию удовлетворяет всякая формула $A^{kr} \supset B^{dr}$.

Причины корректности приведенного утверждения понятны. Класс формул, обозначаемых как A^{kr}, дает обзор всех наиболее слабых гипотез, из которых следует A. Дизъюнкция всех таких A^{kr} есть *днф* формулы A. В свою очередь, класс формул, обозначаемых как B^{dr}, представляет обзор всех наиболее сильных следствий, конъюнкция которых дает *кнф* формулы B.

Мы можем теперь сказать, что, например, формула $\neg pp \vee q \to q$ не удовлетворяет сильному WGS-критерию, так как в число формул, обозначаемых как $(\neg pp \vee q)^{kr}$, входит $\neg pp$, для которой не имеет силы требуемого $\neg pp \to q$, где q есть единственная формула из числа q^{dr}.

2.3. Множество формул $A \to B$, удовлетворяющих сильному WGS-критерию, в точности совпадает с классом соответствующих теорем системы E_{fde}.

Мы сформулировали, таким образом, еще одну семантику первопорядковой релевантной логики. По существу она представляет собой семантическое обоснование опи-

[23] Сильному WGS-критерию они в этом случае удовлетворяют автоматически.

санного выше синтаксического метода построения такой логики. Укажем на те причины, по которым и эта семантика не может считаться достаточно удовлетворительной.

Любой логик, сторонником какого бы понимания логического следования он ни являлся, по-видимому, согласится с тем, что формула B логически следует из A, если и только если в рамках принятой семантики всякое достаточное условие истинности A (детерминируемое исключительно логической структурой этой формулы) является достаточным условием истинности B, а всякое достаточное условие ложности B является достаточным условием ложности A. Условия истинности и ложности формул с классическими пропозициональными связками общеизвестны. Тогда откуда берутся разногласия. Они возникают тогда, когда вопрос встает об условиях истинности и ложности противоречивых (тождественно ложных) и тавтологичных (тождественно истинных) формул.

На практике он предстает, в частности, как вопрос о том, следует ли принимать в расчет заведомо невыполнимые условия истинности и ложности формул. Например, считать истинность формулы C достаточным условием истинности формулы $B \vee C$, когда формула C тождественно ложна и могла бы быть истинной исключительно в случае, если бы одинаковые истинностные значения были приписаны одновременно как некоторой входящей в нее переменной, так и ее (этой переменной) отрицанию.

При игнорировании заведомо невыполнимых условий истинности и ложности формул мы приходим к классическому пониманию следования. Из изложенной выше семантики релевантного следования, основанной на *WGS*-критерии, видно, что в ней, напротив, такие условия принимаются во внимание, что позволяет отбрасывать принципы, считающиеся нерелевантными.

Проблема условий истинности и ложности формул, принимающих всегда одни и те же значения, представляет определенный интерес и в философском отношении. Так Г. Фреге считал, что такие формулы вообще не имеют условий истинности и ложности, так как их истинностное значение является необусловленным. Сторонники релевантной логики не согласны с этим, полагая, в частности, что при построении логики в этом случае предвосхищается некоторое логическое знание, которое еще предстоит описать.

Резонные доводы, можно приводить, по-видимому, в пользу обеих точек зрения. В связи с этим встает вопрос, а нельзя ли как-то обойти саму эту проблему? Мы, кстати сказать, уже имели дело с такой попыткой, когда рассматривали семантику обобщенных описаний состояний. В ней в соответствующих мирах противоречивые формулы верифицировались, а тождественно истинные фальсифицировались.

Такой способ обойти проблему может, однако, вызвать сомнение в том, что отрицание, да и другие пропозициональные связки, сохраняют свой классический смысл. Не случайно некоторые авторы прямо утверждают, что семантика обобщенных описаний состояний демонстрирует, что отрицание в релевантной логике не является классическим, так как классическое не допускает одновременной истинности или ложности A и $\neg A$ (см., например, [31][24]). Дело, таким образом, сводится не к различию между классическим

---

24 У нас подобную точку зрения отстаивает в своих работах Д. Зайцев [41].

и релевантным следованием, а к различию языков, для предложений которых принципы следования устанавливаются: классическая логика устанавливает их для одного языка, а релевантная – для другого.

Мы предложим сейчас семантику, которая позволяет обойти проблему заведомо невыполнимых условий истинности и ложности формул, однако способом, который в известном смысле диаметрально противоположен тому, с которым мы имеем дело в семантике обобщенных описаний состояний.

Под языком L будем иметь в виду язык, исходными связками являются классические (мы это подчеркиваем) конъюнкция, дизъюнкция, материальная импликация и отрицание. Этот же язык, расширенный за счет релевантной импликации "$\rightarrow$", будем обозначать как $L^{\rightarrow}$.

Начнем с определения понятий положительного и отрицательного вхождений пропозициональной переменной в классическую пропозициональную формулу.

2.4. Пропозициональная переменная a входит в формулу a языка L *положительно*, а в $\neg a$ – *отрицательно*. Если некоторое данное вхождение переменной a в формулу A является *положительным* (*отрицательным*), то оно является таким же в любой формуле вида AB, BA, $A \vee B$, $B \supset A$ и данное вхождение является противоположным в формулах $\neg A$ и $A \supset B$.

2.5. Формула A языка L называется *нормальной*, если и только если никакая пропозициональная переменная не имеет в A одновременно как положительных, так и отрицательных вхождений.

Очевидно, что никакая нормальная формула A не может иметь таких условий истинности или ложности, которые требовали бы приписывать одной и той же переменной одновременно разные значения и которые мы называем поэтому невыполнимыми. Например, $p \supset p$ не является нормальной, так как p имеет в ней как положительное, так и отрицательное вхождения, что делает невыполнимыми условия ее ложности: первое вхождение p должно быть истинным, а второе – ложным.

Допустим теперь, что A и B – нормальные формулы. В силу этого для верности утверждения о логическом следовании B из A достаточно, чтобы формула $A \supset B$ была обычной классической тавтологией. Различие между классическим и релевантным следованием в этом случае исчезает, и классы верных утверждений вида $A \supset B$ и $A \rightarrow B$ совпадают. Это видно также из того, что в данном случае будет совершенно безразлично, обратимся ли мы для верификации таких утверждений к семантике классических или обобщенных описаний состояний.

2.6. Классическую тавтологию $A \supset B$, в которой A и B – нормальные формулы, будем называть *заведомо нормальной тавтологией*.

Примером заведомо нормальных тавтологий могут служить $pq \supset q$, $p \supset p \vee q$, $(p \vee r \supset q) \supset (p \supset q)$ и другие[25]. Всем им соответствуют корректные утверждения о логическом следовании. Очевидно, что к числу корректных утверждений о логическом следовании должны быть отнесе-

[25] Заметьте, что сами эти тавтологии нормальными формулами, конечно, не являются, так как обязательно содержат позитивные и негативные вхождения одних и тех же переменных.

ны также все те, которые соответствуют подстановочным частным случаям заведомо релевантных тавтологий. Ведь переменные представляют в них любые формулы, включая те , которые мы не относим к числу нормальных. Класс заведомо релевантных тавтологий должен быть замкнут поэтому относительно правила подстановки.

2.7. Классическая тавтология $A \supset B$, где A и B – нормальные формулы, а также любой подстановочный частный случай такой тавтологии называются *релевантными тавтологиями*.

2.8. Класс релевантных тавтологий вида $A \supset B$ является разрешимым.

Разрешающая процедура состоит в следующем. Пусть $A \supset B$ – исследуемая формула, $a_1,...,a_n$ $(n \geq 1)$ – список всех тех ее переменных, которые имеют одновременно положительные и отрицательные вхождения по крайней мере в одной из формул A или B. И пусть $b_1,...,b_m$ – список попарно различных переменных, отсутствующих в $A \supset B$. Преобразуем формулу $A \supset B$ в $A' \supset B'$ путем замены всех отрицательных вхождений $a_1,...,a_n$ в A и B на $b_1,...,b_m$ соответственно. Тогда $A \supset B$ есть релевантная тавтология, если и только если $A' \supset B'$ – классическая тавтология.

Данная процедура позволяет однозначным образом решать для любой формулы $A \supset B$, является ли она подстановочным случаем какой-либо заведомо нормальной тавтологии.

2.9. Формула $A \rightarrow B$, где A и B – относятся к языку L (классической пропозициональной логики), доказуема в первопорядковой релевантной логике E_{fde}, если и только если $A \supset B$ есть релевантная тавтология.

Утверждение 2.9 дает, таким образом, семантику базисной теории релевантного следования. Эта семантика релевантных тавтологий, назовем ее *RT*-семантикой, как мы видим, не использует невозможных возможных миров и базируется на обычных табличных определениях классических пропозициональных связок. При этом есть все основания утверждать, что указанные связки в точности сохраняют свой классический смысл. Все тождественно ложные и тождественно истинные формулы сохраняют в рамках *RT*-семантики этот свой статус.

В чисто техническом плане все три сформулированные выше семантики: семантика обобщенных описаний состояний, семантика, использующая сильный *WGS*-критерий, и *RT*-семантика – совпадают, описывая один и тот же класс релевантных принципов следования. Однако первые две достигают этого за счет отбрасывания несоответствующих им классических утверждений. В них, так сказать, осуществляется дихотомическое деление всех классических принципов на “хорошие” и “нехорошие”.

RT-семантика, и это принципиально отличает ее от двух других, выявляет некоторые заведомо корректные, уместные, релевантные принципы, не квалифицируя при этом не вошедшие в их число, но классически приемлемые положения, как заведомо непригодные. Принципы, которые соответствуют *RT*-семантике, являются универсальными в том смысле, что всегда верны при классическом понимании пропозициональных связок. В то же время, и это очень важно, данная семантика оставляет открытым вопрос об уместности использования, возможно, при некоторых ограничительных условиях, тех классических принципов, которые не вошли в число универсально релевантных. Так, например, дизъюнктивный силлогизм (*modus tollendo ponens*), согласно которому из ($A \vee B$) и $\neg A$ следует B, а также некоторые другие логические принципы, базирующиеся, как и названный силлогизм, на законе непротиворечия, уместно без негативных последствий использовать при выводе из непротиворечивых посылок, а при определенных предосторожностях и из противоречивых тоже. Это, о чем специально будет сказано ниже, позволяет существенно усилить принимаемую в релевантной логике теорию дедукции.

В нашу задачу входит теперь описание логически истинных формул языка $L^{\rightarrow}$, то есть пропозиционального языка, допускающего итерацию релевантной импликации "$\rightarrow$", понимаемой как необходимая условная связь. Мы проделаем это, опираясь, во-первых, на RT-семантику. И во-вторых, на одно-единственное и бесспорное семантическое свойство импликации "$\rightarrow$", согласно которому $A \rightarrow B$ не может считаться истинным, когда A истинно, а B ложно. Это означает, что в случае истинности формул $A \rightarrow B$ и A обязательно истинным будет B; а в случае истинности $A \rightarrow B$ и ложности B ложным будет A.

Можно сказать, что мы используем только одну строку истинностной таблицы для импликации, которая выглядит так:

A	B	$A \supset B$
и	и	?
и	л	л
л	и	?
л	л	?

Знак вопроса на том месте, где в случае материальной импликации стояло бы значение "истинно", означает не особое, отличное от "истинно" и "ложно", значение истинности, а то, что это значение нам не известно. В зависимости от конкретных содержаний A и B импликация $A \to B$ может быть и истинной, и ложной. Таким образом, в соответствии с таблицей известным является только условие ложности импликации, и именно оно позволяет утверждать, что для рассматриваемой импликации имеют место модус поненс и модус толленс.

Задачу описания логически истинных формул языка $L^{\to}$ будет решаться за счет рекурсивного описания класса утверждений вида $\Gamma \vDash B$. В таких утверждениях Γ представляет собой упорядоченный список (не обязательно различных) формул $A_1,...A_n$ (n $\geq$ 0). При непустом списке формул Γ выражение $\Gamma \vDash B$ читается: "Список формул Γ семантически детерминирует формулу B". Является правомерным также прочтение: "B семантически следует из посылок Γ".

При пустом Γ мы имеем дело с выражением вида $\vDash B$, которое понимается как утверждение о семантической (логической) истинности B. Наша цель собственно и состоит в том, чтобы описать для языка $L^{\to}$ именно такие утверждения.

Из самого смысла утверждения $\Gamma \vDash B$ ясно, что для его верности необходимо, чтобы формуле B нельзя было приписать значение 0 (ложно), когда всем формулам из списка Γ приписано значение 1 (истинно).

В соответствии с RT-семантикой утверждение $A \vDash B$, где A и B – формулы L, является верным, если и только если $A \supset B$ есть релевантная тавтология. Очевидно также, что будут верными утверждения о семантическом следовании, соответствующие подстановочным случаям релевантных тавтологий. Иными словами, если $A' \supset B'$, где A' и B' являются формулами языка $L^{\rightarrow}$, представляет собой подстановочный случай релевантной тавтологии $A \supset B$, то утверждение $A' \models B'$ также является верным. Например, утверждение $(p \rightarrow q)(r \rightarrow s) \models (p \rightarrow q)$ оказывается верным, так как импликация $(p \rightarrow q)(r \rightarrow s) \supset (p \rightarrow q)$ является подстановочным случаем релевантной тавтологии $pq \supset q$, в которой на месте p стоит $(p \rightarrow q)$, а на месте q – формула $(r \rightarrow s)$. Ясно, что всегда истинным будет утверждение вида $A \rightarrow B \models A \rightarrow B$. И это откроет нам возможность говорить о верности всякого утверждения вида $A \rightarrow B, A \models B$.

В общем случае класс релевантных тавтологий определяется следующим образом:

2.10. (1) Если $A \supset B$ – релевантная тавтология языка L или ее подстановочный частный случай в языке $L^{\rightarrow}$, то $A \models B$.

(2) Если $\Gamma \models A \rightarrow B$, то $\Gamma, A \models B$ и $\Gamma, \neg B \models \neg A$.

(3) Если $\Gamma, A_1, A_2 \models B$, то $\Gamma, A_1 \wedge A_2 \models B$.

(4) Если $\Gamma \models B_1$ и $\Gamma \models B_2$, то $\Gamma \models B_1 \wedge B_2$.

(5) Если $\Gamma, A \models B$, то $\Gamma \models A \rightarrow B$.

(6) $\Gamma, \Delta, A \models B$, то $\Gamma, C \rightarrow A, \Delta, C \models B$.

(7) Если $\Gamma, A \models B$ и $\Delta \models A$, то $\Gamma, \Delta \models B$.

(8) Для любых формул имеет силу $A \rightarrow B \models A \supset B$.

(9) Утверждение $\Gamma \models B$ верно только в силу пунктов (1) – (8).

С помощью букв Γ и Δ в определении 2.10 обозначаются упорядоченные списки формул языка $L^{\rightarrow}$. В частном случае эти списки могут быть пустыми. Основания, по которым принимаются пункты (1) и (2), были указаны выше.

Заметим, что пункт (2) является единственным, благодаря которому в утверждениях о семантическом следовании появляется запятая. Это обстоятельство делает оправданным пункт (5), представляющий уместную форму принципа дедукции. В соответствии с (2) и (5) выражение $\Gamma \models B$, где Γ - список формул $A_1, \ldots, A_n$, имеет тот же смысл, что и выражение $\models A_1 \rightarrow . A_2 \rightarrow . \ldots \rightarrow . A_n \rightarrow B$.

Запятая в списках формул имеет, таким образом, некоторый специфический характер. Ее всегда можно заменить на знак конъюнкции в соответствии с пунктом (3). Однако обратное в общем случае невозможно. Пункт (4) опирается на семантические свойства конъюнкции и объяснений, очевидно, не требует. Пункт (6) позволяет заменить посылку A парой формул $C \rightarrow A$ и C, точнее, заменить A посылкой C при том, что ранее в списке посылок ставится формула, утверждающая, что C влечет A. Наконец, пункт (7) позволяет заменить любую посылку списком формул, из которых она семантически следует.

2.11. Формула является теоремой исчисления E, если и только если в силу 2.10 имеет место утверждение $\models B$ [26].

Семантику релевантного исчисления R, описывающего немодальную условную связку, можно получить, дополнив 2.10 пунктом, разрешающим перестановку посылок.

Таким образом, классы теорем соответствующих систем релевантной логики можно описать в результате семантического подхода, опирающегося на табличные определения классических связок и одну строку истинностной таблицы для импликации. Фактически логические свойства

---

[26] Формулировка системы E дается ниже в параграфе 5. Доказательство утверждения 2.11 можно найти в [32, с. 232-233].

импликации исчерпываются двумя известными модусами условного силлогизма: modus'ом ponens'ом и modus'ом tollens'ом. Данное обстоятельство объясняет, почему не опирающаяся ни на какие исчисления, но явно использующая эти модусы логика естественных рассуждений оказывается в дедуктивном отношении не менее сильной, чем релевантное исчисление *R*.

Заметим, что определение 2.10 может быть дополнено целым рядом новых пунктов, позволяющих осуществлять преобразования утверждений о семантическом следовании. Таким образом, можно получать классы утверждений, формализуемые релевантными исчислениями, промежуточными между *E* и *R*. Число их оказывается бесконечным. Взаимоотношения между ними рассмотрены мною в [32].

И все же не случайно я говорю здесь не о семантике исчислений *E* и *R*, а лишь о семантическом описании соответствующих им классов утверждений. Описании, указывающем способ получения семантически истинных формул, но не способы их верификации и фальсификации.

3. Теоретические и идейные предпосылки двухуровневой семантики следования
(переход от лейбницевской семантики к юмовской)

От обычной реляционной семантики крипкевского типа обсуждаемая семантика (мы обозначаем ее как S^{ea}) отличается тем, что *миры* (в содержательном плане их более уместно называть *универсумами рассуждения*), обозначаемые как w_1, w_2,..., являются двухуровневыми, имея, так сказать, два *этажа*. Первый из них (этаж *a*) – это обычный крипкевский мир (карнаповское описание состояний, атомарный мир), обозначаемый для мира w_i как w_i^a. Второй этаж w_i^e (мир следствий, этаж *e*, от слова *entailment*) – это некоторый список формул объектного языка[27].

Ниже все эти понятия будут определены с необходимой точностью. Пока укажем только, что возможность утверждать, что некоторая формула находится на втором этаже, связана исключительно с признанием истинным некоторого высказывания о следовании вида $A \rightarrow B$ или эквивалентного ему. Высказывание $A \rightarrow B$ является истинным (верифицируется) в некотором мире w_i (равнозначно сказать – на первом этаже этого мира w_i^a) только в том случае, когда в каждом достижимом из w_i мире w_j, в котором истинно A, на втором его этаже имеется B. Сразу же попытаемся, насколько это пока возможно, пояснить, что дает отмеченное

[27] Из принятых нами обозначений "этажей" как *a* и *e* и возникло обозначение семантики как S^{ea}. Возможно, более точным обозначением было бы S_a^e, передавая тем самым идею этажности уже в самом обозначении, но по своему графическому виду оно кажется менее удачным.

разнесение антецедента (условия, основания) *A* и следствия *B*, входящих в высказывание $A \to B$, по разным этажам.

Допустим, известно, что два высказывания *A* и *B* сейчас, на данный момент, истинны. Достаточно ли этого, чтобы утверждать, что одно из них влечет другое? Если не отождествлять следование с *материальной импликацией*[28] и иметь в виду реальную связь между тем, о чем говорится в этих высказываниях, то ответ, очевидно, будет отрицательным. Ибо истинными одновременно эти высказывания могут оказаться чисто случайно, и одно из них может говорить о *бодливой козе*, а другое – об *уравнении Шредингера*.

Таким образом, одновременной истинности *A* и *B* в некотором мире для признания истинности в этом мире высказывания $A \to B$ с *релевантной* импликацией, предполагающей, что первое высказывание реально влечет второе, явно недостаточно. Реляционная семантика крипкевского типа позволяет ввести дополнительное условие истинности для $A \to B$ в мире w_i. В этой семантике задается отношение достижимости между мирами. Содержательно это может быть представлено так, что один мир достижим из другого (возможен относительно другого), если отличается от него истинностью только случайных высказываний, сохраняя при этом истинность всех необходимых[29]. Для истинности

---

[28] В силу свойств материальной импликации истинное высказывание влечется (материально имплицируется) любым, а ложное высказывания влечет любое другое. И поэтому всегда или *A* влечет *B* (при ложном *A* или истинном *B*), или *B* влечет *A* (при ложном *B* или истинном *A*), или имеет место и то, и другое (когда истинностные значения *A* и *B* совпадают.

[29] В такой семантике некоторое высказывание считается в данном мире необходимым (необходимо истинным), если и только если оно истинно во всех мирах, достижимых из данного.

$A \rightarrow B$ в данном мире можно потребовать, чтобы B было истинно во всех тех достижимых мирах, где истинно A. Случайной совместной истинности A и B теперь уже будет недостаточно, чтобы считать $A \rightarrow B$ истинным.

Семантические трудности с установлением корректных условий истинности утверждений о следовании и в этом случае, однако, не будут до конца преодолены. Оказывается, что мы должны будем считать истинным любое из высказываний $A \rightarrow B$, где A – необходимо ложно или B - необходимо истинно. Где и то, и другое опять-таки могут быть из "разных опер", говоря о заведомо не связанных событиях.

Это обстоятельство, кстати, как мы видели, вызвало определенные трудности при построении семантики следования для так называемой первопорядковой релелевантной логики, описывающей все приемлемые утверждения вида $A \rightarrow B$, где A и B являются формулами классической логики и не содержат отличного от классических связок релевантного знака "$\rightarrow$" следования. В этой логике, скажем, являются неприемлемыми такие утверждения, как $p \rightarrow q \vee \neg q$ и $p \neg p \rightarrow q$. Как отвергнуть их в рамках семантики возможных миров, если (при сохранении за классическими связками их смысла) приходится дизъюнкцию $q \vee \neg q$ считать всегда истинной, а конъюнкцию $p \wedge \neg p$ всегда ложной.

Выход, как мы видели, находится. В число "*возможных*" миров вводятся миры, во-первых, неполные, в которые совсем не обязательно входит либо некоторая переменная a, либо ее отрицание $\neg a$, так что в некотором мире оказывается невозможным верифицировать ни q, ни $\neg q$. И во-вторых, миры "*невозможные*", противоречивые, допускающие одновременное наличие a и $\neg a$, в которых в силу этого, напротив, можно верифицировать все что угодно, включая противоречие $p\neg p$. Проблема оказывается решенной, так как для любой классической формулы всегда найдется такой мир, в котором ее можно верифицировать, и такой, в котором ее можно фальсифицировать[30]. Иначе говоря, решение достигается за счет того, что невозможных и необходимых формул в языке классической логики в рамках предложенной семантики попросту не оказывается.

Такой подход может еще быть признан удовлетворительным, пока мы остаемся в рамках первопорядковой теории следования. Что делать однако, если в $A \rightarrow B$ допускается *итерация* (повторение) знака следования и на месте A и B стоят опять-таки импликативные формулы?

Попытаемся уяснить, в чем состоит основная трудность построения семантики для языка, содержащего формулы с итерированными импликациями. При том, что мы отказываемся в этом случае от неправомерной, как я считаю, интерпретации импликаций как логического следования и понимая их как аналоги некоторой условной связи. Такое понимание, как уже отмечалось ранее, позволяет рассматривать как аналог логического следования в доказуемых в исчислениях формулах только главный знак импликации.

Допустим теперь, что формула вида $B \rightarrow C$ является теоремой некоторого исчисления, реляционную семантику которого требуется построить. Так как C в этом случае должно быть логическим следствием B, в каждом возможном мире, где верно B, должно быть верно C. Предположим далее, что все теоремы исчисления общезначимы. Иными

---

30 Эта проблема детально исследована в работах Войшвилло Е.К. (см., в частности, [8]).

словами, принимают во всех мирах значение *истинно*. Очевидно, что для произвольной формулы A во всех мирах, где эта формула истинна, будет истинной в силу того, что она теорема, формула $B \to C$.

Считать ли, например, верной любую формулу вида $A \to (B \to D \vee B)$? В релевантной логике такая формула по понятным причинам в качестве логического закона отвергается.

Как получить для этого отвержения семантические основания, если формула удовлетворяет требованию, что во всех мирах, где истинно A, всегда истинно $B \to D \vee B$? Естественно, что на месте $B \to D \vee B$ могла бы стоять любая семантически истинная формула. Аналогичным образом будет обстоять дело, если ставить на место A в $A \to B$ любую семантически ложную формулу, например, $\neg(C \to C)$.

Можно ли для преодоления этой трудности поступить так же, как это было сделано в случае первопорядковой теории следования? То есть опять-таки изобрести возможность, чтобы любую формулу в каких-то мирах можно было всегда верифицировать, а в каких-то фальсифицировать. Кажется, что единственно возможным ответом должен быть отрицательный. Действительно, в том рассмотренном первопорядковом языке можно было сами утверждения о логическом следовании либо вообще не относить к объектному языку, либо относить к этому языку только первопорядковые утверждения о следовании. И только эти последние характеризовать как семантически истинные или ложные. Иначе говоря, язык, для которого мы могли строить семантику, не должен был бы включать выражений вроде закона контрапозиции $A \to B \to . \neg B \to \neg A$, транзитивности импликации $A \to B \to . B \to C \to . A \to C$ и вообще никаких формул, в которых вхождения знака следования не исчерпываются главной связкой.

Трансформировать первопорядковую семантику следования в семантику итерированного следования – значит каким-то образом совместить две казалось бы несовместимые вещи. С одной стороны, признавать все теоремы релевантной логической системы (скажем, $A \rightarrow A$) семантически истинными (истинными во всех возможных мирах), а с другой – иметь возможность при некотором произвольном B указать мир, в котором B верифицируется, а $A \rightarrow A$ фальсифицируется.

Или давайте по-другому. Поскольку семантика может строиться для некоторого языка независимо от каких-либо исчислений, сформулируем некоторый ее фрагмент. Например, определим условия истинности дизъюнкции. Итак, формулу $A \vee B$ будем считать истинной в некотором возможном мире, если и только если в этом мире является истинным A или является истинным B. Ясно теперь, что в каждом мире, где истинно A, в силу определения обязательно истинным будет и $A \vee B$. Признаем на этом основании, что во всех мирах является верным $A \rightarrow A \vee B$. Как поступить, чтобы в число верных не попало при этом для произвольного C утверждение $C \rightarrow. A \rightarrow A \vee B$? Попытка добиться нужного результата за счет изобретения способов фальсификации $A \rightarrow A \vee B$, если даже что-либо подобное и удастся, вряд ли будет приемлемой. Ну, пусть мы придумаем некие *алогичные* возможные миры, в которых можно будет "проваливать" логически истинные утверждения, но ведь предварительно их (эти самые логически истинные утверждения) уже надо семантически описать, отделив от тех, которые не признаются релевантными.

Оказывается, есть возможность пойти по более естественному, а главное, по содержательно оправданному пути. Для этого необходимо признать две весьма очевидные вещи.

Первое. С самого начала, уж во всяком случае сторонникам релевантной теории следования, было ясно, что не просто истинности, но даже и необходимой истинности *В* (как и необходимой ложности *А*) недостаточно, чтобы утверждать на этом основании наличие между *А* и *В* какой бы то ни было связи[31]. В рамках построения семантики следования это означает, что условие, согласно которому в каждом достижимом мире, в котором истинно *А*, должно быть истинным *В*, является необходимым, но не достаточным для признания верным $A \to B$.

И *второе*, надо освободиться от иллюзии, что семантика возможных миров (как и вообще любая семантика) способна сама по себе предоставить нам некоторую новую информацию о связи событий (и говорящих об этих событиях высказываниях) помимо той, которую мы уже вложили заранее при описании и определении возможных миров. Ска-

---

[31] Как мы уже говорили выше, утверждения, что из невозможного следует все, а необходимое из всего называют парадоксами строгой импликации, или парадоксами Льюиса [11]. Некоторые считают, что эти парадоксы указывают на определенную внутреннюю связь, которую возможные и невозможные суждения как таковые имеют со всеми суждениями вообще. С этим трудно согласиться. Какие основания в самом деле можно найти, чтобы обосновать столь любимое моим однокурсником по МГУ В. Устиненко утверждение: "Если дважды два – пять, то лошади жуют подковы"? И почему, например, невозможное утверждение из песенки М. Гольдмана: "И даже Тузенбах, убитый на дуэли, мне позвонил вчера с Канарских островов"– должно влечь что-то к нему совсем не относящееся?

жем, два события мы считаем связанными между собой на том основании, что во всех *возможных* (или во всех *достижимых*) мирах одно невозможно без другого. Но на каком основании миры, в которых дело обстоит иным образом, оказались для нас *невозможными*, или *недостижимыми*, или какими-то там еще? Очевидно, только потому, что определенные предпосылки относительно и миров, и высказываний того или иного вида уже приняты. Отчего это $A \vee B$ не может не быть истинным в мире, где таковым является A ? Да только и только потому, что так определены условия истинности выражения $A \vee B$[32].

Допустим, однако, что нам удается установить, что в рамках принятой нами семантики для некоторых двух формул (предложений) A и B дело обстоит таким образом, что в любом возможном мире, где истинно A, таковым является также и B. Мы имеем дело с некоторым эмпирическим фактом, с фактическим положением дел. Это определенным образом характеризует предложенную семантику. Но этого отнюдь еще недостаточно для признания того, что A и B как-то связаны в реальности. Утверждение о связи, физической или логической, между ними предполагает нечто большее, переход на некоторый новый более высокий (теоретический) уровень. Так что, если у нас есть основания для

---

32 Когда речь идет об информации, которую дает нам семантика возможных миров, вполне уместна следующая шутливая аналогия. Чтобы определить пол пойманного зайца, достаточно отпустить его и посмотреть: если побежал – то заяц, а если побежала – то зайчиха. Так и в семантике, если мир достижим из данного – мы его принимаем в расчет, а если недостижим – то нет. Можно, конечно, сказать, что это связано с объективным положением дел. Но и проблема "побежал – побежала" тоже из числа объективных, только что это нам даст, если не установить пол зайца заранее?

подобного утверждения, то они должны быть определены и предъявлены. Да, в каждом возможном мире, в котором истинно A, является истинным это самое A. Достаточно ли этого, чтобы признать, что "*A влечет A*" (или символически: $A \to A$)?[33] Любой знающий русский язык с легкостью посчитает истинным высказывание "*Автобус идет в Гусь-Хрустальный или в Иваново*", если автобус идет в один из этих городов. Но кто на этом основании способен сделать заключение, что имеет место логическое следование между соответствующими высказываниями и что здесь действует закон логики вида $A \to A \vee B$?

Люди начинают рассуждать логически, как и добывать огонь трением, задолго до того, как обнаруживают те законы, в соответствии с которыми их действия приводят к нужным результатам. Но это как раз и демонстрирует, какая пропасть лежит между эмпирической констатацией и теоретическим осмыслением констатируемых фактов.

Д. Юм когда-то вполне оправданно утверждал, что никакие ссылки на то, что событие A всегда происходит после события B, не дает права считать эти события причинно или еще как-то связанными. И дело здесь не в том, чтобы отрицать саму объективную возможность такой связи, а в том, что утверждение о ней всегда есть в логическом смысле нечто большее, чем простая фиксация фактического состояния дел. Какие бы ни были у нас эмпирические основания для признания объективного существования такой связи: опыт, повторяемость, возможность воспроизведения и тому подобное, – такое признание (обоснованное или нет) всегда

---

[33] Один из известных логиков как-то сказал, что утверждающий $A \to A$ не рассуждает, а заикается.

представляет собой выход за пределы эмпирических знаний. В том по крайней мере смысле, что не может быть из них дедуцирована, так как несет информацию принципиально большую, чем любые такие данные.

Юм совсем не возражал против того, чтобы утверждения о связях между событиями, приобретенные на опыте, использовались бы в практической деятельности. Он призывал, однако, быть готовым к тому, что мир в любой момент может измениться[34].

Такую трактовку (ее оправданно называть юмовской) связи между событиями уместно перенести на логические связи между высказываниями. Переход к семантике юмовского типа, таким образом, предполагает признание двух типов утверждений об отношениях между высказываниями *A* и *B*. Утверждения первого типа являются эмпирическими (*фактуальными*). Они вытекают из принятых соглашений об условиях верификации логических констант языка и говорят о том, что во всяком достижимом мире, где истинно *A*, в силу этих самых соглашений всегда истинно также и *B*. Верность таких утверждений является необходимым, но еще не достаточным условием истинности утверждений второго типа (*теоретических*) о следовании *B* из *A*. Что же для признания такого *следования* нужно еще? Это теперь и

[34] Я как-то получил этому весьма основательное подтверждение. Однажды записанный на пленку голос в поезде московского метро, в котором я ехал в сторону Юго-западной, на станции, называвшейся тогда "Проспект Маркса", как и должно, объявил, что двери закрываются и что следующей станцией будет "Библиотека Ленина". Попробуйте угадать, какой была следующая станция в действительности? Этой станцией для вдруг заплутавшего поезда оказалась Киевская, на которой всех нас благополучно и высадили, естественно, без каких-либо объяснений и извинений.

есть тот основной вопрос, на который мы попытаемся удовлетворительно ответить.

В предлагаемой нами семантике юмовского типа никакое утверждение о следовании ни в каком мире не может быть беспредпосылочно истинным. Высказывание о следовании является теоретическим. Оно принципиально не может быть обосновано никакими эмпирическими фактами. Теоретическое высказывание может быть обосновано только теоретическими же. И эти последние не могут быть взяты ниоткуда, кроме как постулированы. Для того, чтобы установить, что *А влечет В* в семантике S^{ea}, которую мы строим, надо убедиться (*и это есть то дополнительное условие, без которого утверждение $A \rightarrow B$ не может быть признано истинным*), что в соответствующих мирах (тех мирах, где истинно предложение *А*) предложение *В* не только верифицируется, но и находится на их вторых этажах (в мире следствий).

Мы строим семантику, в которой ни в каком мире, если о нем нет некоторой информации (какой - мы сейчас скажем), не может быть верифицировано никакое утверждение о следовании вида $A \rightarrow B$, включая любые такого вида теоремы и аксиомы релевантных логических исчислений. Спрашивается: будет ли в некотором мире w_i верифицироваться $AB \rightarrow A$? Да, если в каждом достижимом из w_i мире, в котором верифицируется *AB*, на втором этаже есть *А*. Но ему неоткуда там взяться. И ответ - отрицательный. Другое дело, если нам известно, что в мире w_i верифицируется $A \rightarrow A$, тогда на вопрос, верифицируется ли в этом мире формула $AB \rightarrow A$, ответ будет положительный. Ведь условием верификации конъюнкции *AB* является верифицируемость *А*. Отсюда ясно, что коль скоро в силу верифицируемости $A \to A$ в каждом достижимом мире, где истинно A, на втором этаже также есть A, оно есть также на вторых этажах всех тех достижимых миров, где верифицируется AB. Продолжим задавать вопросы. Будет ли верная в релевантной логике формула $AB \to A \to .ABC \to A$ верифицироваться в том же мире w_t? Вы, наверное, уже догадались, что ответ будет отрицательным. Действительно, тот факт, что во всяком мире, где верифицируется $AB \to A$, будет верифицироваться $ABC \to A$, не дает оснований считать, что указанная формула $AB \to A \to .ABC \to A$ также верифицуруется, так как у нас нет никаких резонов считать, что на вторых этажах миров, где верифицируется $AB \to A$, имеется формула $ABC \to A$.

Интересное, как говорят, получается кино. Выходит, мы строим семантику, в которой нельзя считать *общезначимой* никакую формулу? И это при том, что логическая семантика, вообще говоря, строится именно для того, чтобы показать, что все теоремы некоторой логической *теории* (*исчисления, системы*) всегда истинны (общезначимы). Ну, конечно же, в семантике S^{ca}, как это и положено, будут семантически истинные формулы. Правда, в отличие от всем привычных семантик трактоваться семантическая истинность будет здесь по-иному. *Семантически истинной* в S^{ca} считаться будет такая формула B (символически, как обычно: $\models B$), которая будет истинной в каждом мире, в котором верифицируется формула $B \to B$. Иначе говоря, выражение $\models B$ представляет собой сокращение для $B \to B \models B$ (когда выражение вида $A \models B$ понимается обычным образом как утверждение, что во всяком мире, где истинна формула A, является истинной формула B).

Содержательно предлагаемая трактовка означает, что ***семантическая истинность какой бы то ни было фор-***

мулы принципиально не может быть обоснована на чисто эмпирических основаниях. Такая истинность есть следствие некоторых уже принятых постулатов и языковых соглашений, связанных с условиями истинности формул с соответствующими логическими связками. В нашем случае роль постулатов играют утверждения вида $B \to B$. И если B оказывается истинным в каждом мире, в котором постулируется истинность $B \to B$, то только в этом случае B и считается семантически истинным[35].

Заметим, что в том случае, когда само B имеет вид импликации $A \to C$, для верности утверждения $\models A \to C$ достаточно, чтобы во всех мирах, в которых верифицируется A, верифицировалось бы и C. Иными словами, если имеет место $A \models C$, то справедливо и $\models A \to C$[36] Мы увидим в дальнейшем, что для обоснования $\models A \to C$ достаточно будет убедиться в верности $A \to A \models A \to C$ или $C \to C \models A \to C$. И это обстоятельство естественным образом может трактоваться как тот факт, что утверждения о логическом следовании есть всегда не более чем ослабления закона рефлек-

---

[35] В одной из работ я назвал такую семантику "паратавтологической". С одной стороны, это было вызвано моим ироническим отношением к термину "паранепротиворечивость" и так называемым паранепротиворечивым логикам. А с другой, тем, что поскольку в релевантной системе E отрицания теорем вида $A \to B$ не влекут противоречий, то стало быть, сами эти теоремы по существу не должны считаться тавтологиями.

[36] Таким образом, определение условий истинности утверждений о следовании выглядит практически стандартным. Следует, однако, иметь в виду, что $\models A \to C$ представляет в нашей семантике сокращение для $A \to C \to .A \to C \models A \to C$ и поэтому верность $A \models C$ не влечет к признанию верности $A \to C$ в каком-либо из миров, кроме тех, в которых верифицируется $A \to C \to .A \to C$.

сивности $A \rightarrow A$, связанные с языковыми соглашениями о смысле (об истинностных взаимоотношениях) соответствующих логических констант и сделанные исключительно на основаниях, разрешенных таковыми соглашениями. Постулируя $A \rightarrow A$ как верное утверждение о следовании, мы в силу принятых языковых соглашений, например указанных выше условий истинности дизъюнкции, вынуждены будем считать верным (семантически истинным) и $A \rightarrow A \vee B$, и $A \rightarrow A \vee C$. И любую другую формулу, которая может быть получена из $A \rightarrow A$ заменой первого A (антецедента) любой формулой, условием истинности которой в соответствии с принятыми языковыми соглашениями является истинность A, а второго A (консеквента) заменой на любую формулу, которая по тем же языковым соглашениям всегда истинна при истинности A.

4. Двухуровневая реляционная семантика (техническое построение и содержательные пояснения)

Язык, для которого мы будем строить семантику, содержит бесконечное число пропозициональных переменных и следующие логические связки: "$\wedge$" – конъюнкцию (которая будет обычно опускаться, "$\vee$" – дизъюнкцию, "$\neg$" – отрицание и "$\rightarrow$" – (релевантную) импликацию.

Модельная структура представляет собой пару $<W,R>$, где W есть бесконечное множество универсумов рассуждений (миров) w_1, w_2,..., w_n ..., из которых каждый w_i ($i \geq 1$) в свою очередь представляет собой упорядоченную пару $<w_i^a, w_i^c>$. Первый член этой пары (*первый этаж* мира w_i или его атомарная часть, *фактуальный мир*) есть некоторый список *литералов* (пропозициональных переменных или их отрицаний). Требование *полноты*, согласно которому для каждой пропозициональной переменной в атомарный мир входит или сама переменная, или ее отрицание, к атомарным мирам не предъявляется. В принципе такой мир может быть даже пустым. Вместе с тем вводится требование *непротиворечивости* атомарных миров: никакая пропозициональная переменная a не может входить ни в какой мир w_i^a одновременно со своим отрицанием[37].

[37] Тот факт, что при построении семантики релевантной логики отказываются от принципа полноты миров, едва ли может вызывать возражения, тем более, если понимать миры как универсумы рассуждения. Даже признавая закон исключенного третьего, мы совсем не обязаны включать в тот или иной универсум одно из противоречащих друг другу высказываний. Во всяком случае отказ от принципа

В свете последних семантических веяний это столь естественное в недавнем прошлом требование может показаться теперь даже неожиданным. Скажем сразу поэтому, что в предлагаемой семантике это требование в чисто техническом смысле не является существенным, так как по причинам, которые будут объяснены ниже, оно не исключает возможности верифицировать противоречивые формулы.

Введение этого требования связано поэтому лишь с некоторыми идеологическими и методологическими предпочтениями автора, который, будучи логиком, никак не желает допускать существования (тем более – в качестве исходных) "невозможных" возможных миров. Такое неприятие противоречия в атомарном, фактуальном мире никак не исключает возможности его появления в универсумах рассуждений, например, за счет каких-то допущений, которые, конечно, могут быть намеренно или нет противоречивыми.

Второй член пары, w_i^c – *второй этаж* мира w_i, называемый также *миром следствий*, есть некоторое множество формул принятого объектного языка. К данному множеству предъявляются только следующие требования конъюнктивной и композиционной замкнутости:

полноты имеет резонные оправдания в практике реальных рассуждений. Но вот с тем, что для корректности рассуждений надо отказываться и от принципа непротиворечия, согласиться трудно. Во всяком случая семантика, которая такой отказ предполагает, должна считаться по крайней мере весьма искусственной. Дело в том, что требование непротиворечивости возможного мира, вообще говоря, совсем не исключает возможности делать предположения о верификации в нем некоторого противоречивого утверждения. Мы поступаем так в нашем актуальном мире, отнюдь не считая его противоречивым на самом деле.

Если A и B – элементы множества w_i^c, то конъюнкция AB также является его элементом. И если $(C \to A)$ и $(C \to B)$ – элементы множества w_i^c, то к числу его элементов принадлежит и $(C \to AB)$.

Формально мы трактуем это как замыкание множества миров W относительно следующих требований:

$(Cl1)$ $\forall w_i((A \in w_i^c)\&(B \in w_i^c) \supset (AB \in w_i^c))$.

$(Cl2)$ $\forall w_i((C \to A) \in w_i^c)\&(C \to B) \in w_i^c) \supset (C \to A \wedge B) \in w_i^c)$.

Наконец, R является бинарным (рефлексивным и транзитивным) отношением достижимости на W.

Мы используем выражения $T(A)/w_i$ и $F(A)/w_i$ для утверждений о *верифицируемости* и соответственно о *фальсифицируемости* формулы A в мире w_i[38].

Будут справедливыми также следующие соотношения:

$$T(A)/w_i = F(\neg A)/w_i \quad \text{и} \quad T(\neg A)/w_i = F(A)/w_i$$

и, следовательно,

$$T(\neg\neg A)/w_i = T(A)/w_i \text{ и } F(\neg\neg A)/w_i = F(A)/w_i.$$

---

[38] В неформальных рассуждениях мы, как уже делали это ранее, наряду с утверждениями о верифицируемости и фальсифицируемости формул в некотором мире будем говорить об их истинности (верности), ложности именно в том строгом смысле, какой придается понятиям верифицируемости и фальсифицируемости. Напомним, что под мирами в содержательном смысле у нас имеются в виду универсумы рассуждения. Согласитесь, что заявление о том, что в некотором мире истинно противоречие $\neg AA$, выглядит достаточно странно в отличие от утверждения, что в этом универсуме рассуждения верифицируется противоречие $\neg AA$, так как в противоречивости универсумов рассуждения нет ничего странного. Скажем, доказательство от противного состоит как раз в том, чтобы показать, что отрицание тезиса влечет противоречие (универсума рассуждения).

Определение D1: *В мире w_i формулы верифицируются исключительно в соответствии со следующими условиями*:

(1) Если A – пропозициональная переменная или ее отрицание, и A входит в список w_i^a, то $T(A)/w_i$[39].

(2) $T(AB)/w_i$, если и только если $T(A)/w_i$ *и* $T(B)/w_i$.

(3) $T(A \vee B)/w_i$, если и только если $T(A)/w_i$ *или* $T(B)/w_i$.

(4) $T(\neg(A \vee B))/w_i$, если и только если $T(\neg A)/w_i$ *и* $T(\neg B)/w_i$.

(5) $T(\neg(AB))/w_i$, если и только если $T(\neg A)/w_i$ *или* $T(\neg B)/w_i$.

(6) $T(\neg(A \rightarrow B))/w_i$, если и только если

$$\exists w_j R w_i w_j \,\&\, T(A)/w_j \,\&\, F(B)/w_j$$ [40].

Мы продолжим список условий верификации формул после принятия некоторых дополнительных подопределений, которые должны рассматриваться как составная часть определения *D1*.

Введем понятие потенциально противоречивого мира:

(***S1D1***) *Некоторый мир w_i называется потенциально противоречивым и обозначается ($w_i \in PC$), если и только если существует такая формула вида $\neg(A \rightarrow A)$, которая верифицируется в w_i*. Формально:

$(w_i \in PC) =_{df} \exists A\ T\neg(A \rightarrow A)/w_i = \exists A\ F(A \rightarrow A)/w_i$.

---

39 Обратите внимание, что возможность верифицируемости литерала в w_i не исчерпывается его вхождением в список w_i^a, некоторый литерал вполне может оказаться верифицируемым по иным основаниям данного определения. Ниже на эти возможности будет специально указано.

40 Логические знаки (такие, как $\forall$, $\exists$, $\supset$, $\in$, &), связывающие метавыражения и отсутствующие в нашем объектном языке, должны пониматься здесь и в дальнейшем как соответствующие метасимволы.

Следующее подопределение *S2D1* с чисто техническими целями вводит *внеязыковую* бинарную связку "$\Rightarrow$", которую мы называем *квазиимпликацией*. Заметим, что понятие правильно построенной формулы при этом не изменяется, так как знак квазиимпликации к нашему объектному языку не относится и в формулу объектного языка входить не может.

(***S2D1***) $(A \Rightarrow B)/w_i =_{df} \forall w_j (Rw_iw_j \supset (T(A)/w_j \supset T(B)/w_j \& (B \in w_j^c)) \&$

$\& (T(\neg B)/w_j \supset (T(\neg A)/w_j \& (\neg A \in w_j^c)) \& T(\neg A \vee B)/w_j \&$

$\& \forall w_k((T(\neg A)/w_k \supset (w_k \in PC)) \supset T(B)/w_j) \&$

$\& \forall w_k(T(B)/w_k \supset (w_k \in PC)) \supset T(\neg A)/w_j))).$

Таким образом, выражение $(A \Rightarrow B)$ имеет силу[41] в мире w_i, если и только если во всяком достижимом из w_i мире w_j, выполняются следующие пять условий:

(1) $(T(A)/w_j \supset T(B)/w_j \& (B \in w_j^c)$

(2) $(T(\neg B)/w_j \supset (T(\neg A)/w_j \& (\neg A \in w_j^c))$

(3) $T(\neg A \vee B)/w_j$

(4) $\forall w_k((T(\neg A)/w_k \supset (w_k \in PC)) \supset T(B)/w_j)$

(5) $\forall w_k(T(B)/w_k \supset (w_k \in PC)) \supset T(\neg A)/w_j))$

Первое условие требует, чтобы во всяком достижимом мире, в котором верифицируется A, формула B также была истинна, и при этом B к тому же находился на его (этого мира) втором этаже w_j^c. Согласно второму условию то же самое имеет место в отношении формул $\neg B$ и $\neg A$: во всяком

[41] Мы специально не пишем $T(A \Rightarrow B)$, так как выражение вида $T(A)$ имеет смысл только при том, что A есть формула нашего объектного языка, а $(A \Rightarrow B)$, как было сказано, к таковым не относится.

достижимом из w_i мире w_j, в котором верифицируется $\neg B$, формула $\neg A$ также истинна и входит в w_j^c. Третье условие предполагает, что в каждом достижимом w_j верно $\neg A \vee B$.

Условие (4) дает возможным признать верной в w_j формулу B для случая, когда $T(\neg A \vee B)/w_j$ является верным в силу верифицируемости в w_j формулы $\neg A$ при том, что последняя имеет вид, например, $\neg(C \rightarrow C)$, так как последняя согласно *S1D1* может верифицироваться только в потенциально противоречивом мире.

Наконец, (5) распространяет последнее требование на случай, когда место $\neg A$ при указанных обстоятельствах занимает B.

S2D1 является симметричным относительно A и B, с одной стороны, и $\neg B$ и $\neg A$, с другой. Легко убедиться поэтому, что выражения $(A \Rightarrow B)$ и $(\neg B \Rightarrow \neg A)$ в силу *S2D1* являются эквивалентными.

Мы можем теперь закончить формулировку условий истинности формул нашего языка:

(7) $T(A \rightarrow B)/w_i = T(\neg B \rightarrow \neg A)/w_i = \forall C((C \rightarrow A) \rightarrow (C \rightarrow B))/w_i)$,

если и только если

$(A \Rightarrow B)/w_i \,\&\, \forall C \forall w_j (Rw_iw_j \supset (T(\neg(C \rightarrow B))/w_j \supset \neg(C \rightarrow A) \in w_j^c))$

Определение *D1* завершено. И теперь можно сделать некоторые пояснения.

Обратим также внимание на то обстоятельство, что можно вести речь о верифицируемости и фальсифицируемости формулы в некотором мире w_i, но не в мире следствий w_i^c. В последний мир формулы могут только входить или не входить.

Пропозициональная переменная или же ее отрицание могут верифицироваться в мире w_i также и при отсутствии их в соответствующем списке w_i^a литералов. Так, например, в случае верности в w_i импликации $p \rightarrow q$ и ее антецедента p в этом мире в силу условий верификации $p \rightarrow q$ будет верифицироваться и q независимо от того, входит ли q в список w_i^a или же нет. Пункт (1) определения *D1* специально сформулирован таким образом, что литерал истинен в мире w_i, *если входит* в соответствующий список w_i^a, но отнюдь не *если и только если входит* в этот список.

Указанное обстоятельство открывает возможность верифицировать в мирах противоречивые формулы несмотря на предъявляемое к атомарным частям миров требование непротиворечивости относительно непосредственно входящих в них литералов. Это ясно из того, что верная импликация $p \rightarrow q$ (при верности p) может обеспечить верифицируемость своего консеквента в мире, где верифицируется его отрицание, да и сам консеквент может изначально быть противоречивым, т.е. импликация может иметь вид сразу $p \rightarrow q \neg q$.

Хотя формулы с классическими связками верифицируются стандартным образом, следует иметь в виду, что дизъюнкция $p \vee q$ может верифицироваться в таком мире, в котором нельзя верифицировать ни p, ни q. Так в случае верности в мире w_i импликации $\neg p \rightarrow q$ указанная дизъюнкция является истинной во всех достижимых из w_i мирах, причем это означает, что во всех этих мирах истинно p или истинно q, но не обязательно известно, какое именно из них. Можно сказать, таким образом, что дизъюнкция понимается здесь неконструктивно[42].

Главные разъяснения относятся, естественно, к той части определения *D1*, которая связана с верификацией релевантной импликации. На атомарные миры не делается никаких ограничений с точки зрения их полноты. В них не исключается также возможность верификации противоречивых формул. Это, очевидно, не позволяет верифицировать или фальсифицировать во всех возможных мирах ни одну из формул, содержащую только классические связки.

Такой подход, как уже отмечалось, позволяет построить семантику так называемой первопорядковой релевантной логики, описывающей утверждения вида $A \rightarrow B$, где A и B – формулы классической логики [8]. Как мы увидим ниже, в нашем случае верность B во всех мирах, в которых верифицируется A, тоже будет означать, что $A \rightarrow B$ имеет силу в релевантной логике, но это отнюдь не значит, что эта последняя формула верифицируется во всех мирах. То обстоятельство, что, скажем, во всех мирах, где верифицируется A, верифицируется само A, а также $A \vee B$, $\neg\neg A$ и другие являющиеся следствиями из A формулы, рассматривается как свидетельство чисто фактического положения дел, не

42 Дизъюнкция вида $A \vee \neg A$ будет истинной в каждом мире, в котором верифицируется $A \rightarrow A$. Это означает, что в каждом таком мире истинно высказывание A или высказывание $\neg A$. Мы можем не знать, однако, какое именно. Причем это верно и в том случае, когда на месте A стоит высказывание о будущем событии. Таким образом, признание верности в некотором мире закона исключенного третьего для высказываний о будущих событиях не детерминирует будущего и не влечет так называемого логического фатализма. Подробнее об этой проблеме см.: *Карпенко А.С.* Фатализм и случайность будущего. Логический анализ. М.: Наука, 1990.

дающее еще основания для утверждений о верификации в этих мирах соответствующих импликаций: $A \to A$, $A \to A \vee B$, $A \to \neg\neg A$ и т.д.

Утверждение об импликативной связи (логической или онтологической) не может быть обосновано никаким фактическим положением дел. Такого рода связь между некоторыми высказываниями (событиями) может быть только постулирована[43]. Заметим, что и в тех случаях, когда речь идет об импликации между двумя импликациями же, истинность первой из которых детерминирует истинность второй, мы все равно не имеем ее (этой импликакции импликаций) верифицируемости во всех мирах. Так в силу *D1* во всех мирах, где верно $A \to B$, будет верифицироваться $C \to A \to .C \to B$. Но при этом сам принцип транзитивности $A \to B \to .C \to A \to .C \to B$, как и любой иной логический принцип, верифицировать во всех мирах не удастся[44]. Собственно, это обстоятельство и является сердцевиной и принципиальной особенностью предлагаемой семантики.

Именно для этого используется имеющийся в каждом универсуме рассуждений w_l мир следствий w_l^c, который мы называем также теоретическим миром или "вторым этажом". При этом импликация $A \to B$ верифицируется в мире

---

43 В силу этого обстоятельства мы рассматриваем предлагаемую семантику как семантику юмовского, а не лейбницевского типа, где логические истины рассматриваются как истины во всех возможных мирах. В семантике S^a нет никаких истинных во всех мирах утверждений помимо тех, истинность которых является следствием явно принятых постулатов. Подробнее смотри об этом в [4].

44 Мы можем доказать, что во всех мирах имеет силу метаутверждение $A \to B \supset .C \to A \to .C \to B$, и на этом основании говорить о семантической истинности $A \to B \to .C \to A \to .C \to B$, но это не то же, что истинность этой формулы во всех мирах.

w_i только при условии, что во всяком достижимом из w_i мире w_j, в котором на "первом этаже" (то есть в атомарном мире) верифицируется A, на втором этаже имеется B. То, что B должно верифицироваться также и на первом этаже, очевидно. Требуется также, чтобы в указанных мирах в случае фальсификации B (верификации $\neg B$) на втором этаже было $\neg A$. За счет этого реализуется принцип контрапозиции импликации.

Уместно продемонстрировать в связи с этим, почему нельзя верифицировать во всех мирах $(A\rightarrow B)A\rightarrow B$, т.е. аналитическую запись принципа *MP* (*modus ponens*).

На втором этаже всех миров, в которых верифицируется антецедент данной формулы, в силу верности A и $A\rightarrow B$ всегда будет иметь место ее консеквент B. Но условия истинности импликации $(A\rightarrow B)A\rightarrow B$ предполагают верность в интересующем нас мире утверждения$(A \rightarrow B)A\Rightarrow B$. Последнее требует, чтобы на вторых этажах всех достижимых миров, где верифицируется отрицание консеквента $\neg B$, должна находиться формула $\neg((A\rightarrow B)A)$. Но никаких оснований считать, что такое положение имеет место, у нас нет. Это не единственное основание, по которому $(A\rightarrow B)A\rightarrow B$ не может быть признано истинным во всех мирах. Если даже мы не предполагали бы изначально верность принципа контрапозиции, мы вынуждены были бы отвергнуть утверждение о верифицируемости $(A\rightarrow B)A\rightarrow B$ во всех мирах в силу требуемой определением *D1* истинности во всех мирах дизъюнкции $\neg((A\rightarrow B)A)\vee B$, а значит, и $\neg(A\rightarrow B)\vee\neg A\vee B$.

Однако для утверждения истинности хотя бы одного из указанных дизъюнктов во всяком мире нет оснований[45].

Очевидно, что необходимо учесть также и следующую ситуацию. Пусть в некотором мире верифицируются формулы: $(D\to A)$, $(D\to\neg A)$, $(D\to B)$, $(D\to\neg B)$ и D. Тогда в каждом достижимом мире, в котором будет истинно D, для A и B (которые могут быть между собой никак не связаны) имеет силу оговоренное выше условие: на первом этаже верифицируется A, на втором – имеется B, и т.д. Таким образом, в мирах, где верифицируется D, будет иметь силу $A\Rightarrow B$. Посчитай мы последнее достаточным условием истинности $B\to C$, тогда бы экстенсионального характера задания условий истинности релевантной импликации преодолеть опять бы не удалось. Во всяком случае, нам пришлось бы считать семантически истинным явно нерелевантное утверждение:

$$(D\to A)(D\to\neg A)(D\to B)(D\to\neg B)D\to(A\to B).$$

С тем, чтобы сделать невозможной описанную ситуацию, и выдвигается дополнительное требование, согласно которому во всех достижимых мирах для произвольной формулы C должно иметь место

$$T(\neg(C\to B))/w_i\supset\neg(C\to A)\in w_i^{c})\ (1).$$

Откуда возникает столь странно выглядящее дополнительное условие? На самом деле в качестве такого дополнительного условия хотелось бы иметь утверждение

---

45 Здесь уместно обратить внимание на то обстоятельство, что признание верности $A\to B$ в некотором мире влечет к немедленному признанию верности в нем утверждений вида $\neg B\to\neg A$, $C\to A\to.C\to B$, $\neg A\vee B$. Но это означает вместе с тем, что при обосновании верности импликации $A\to B$ необходимо обосновать предварительно истинность всех указанных утверждений.

$$((C \to A) \Rightarrow (C \to B))/w_i \,(2),$$

чтобы подчеркнуть, что при верификации $A \to B$ квазиимпликация должна иметь место в соответствующем мире не только между A и B, но и (чтобы обеспечивать транзитивность следования) между формулами $(C \to A)$ и $(C \to B)$, где C – произвольная формула. Сейчас, когда определение условий верификации принято, мы можем доказать и рассматривать в качестве некоторого квази-определения:

$$(\boldsymbol{EQdf})\, T(A \to B)/w_i = (A \Rightarrow B)/w_i \,\&\, \forall C((C \to A) \Rightarrow (C \to B))/w_i).$$

По виду своему требование верности $(C \to A) \Rightarrow (C \to B)$ также является чисто экстенсиональным. Но в силу того, что число формул, которые могут ставиться на место C, бесконечно, нет никакой возможности реализовать это требование именно чисто экстенсиональным путем. Таким образом, это экстенсиональное требование обеспечивает нашей семантике интенсиональность в понимании следования.

Мы не могли принять (2) сразу как исходное[46], так как это породило бы круг в определении, поскольку для пони-

---

[46] Вообще говоря, определение условий верификации $(A \to B)$ в некотором мире все-таки можно было сразу представить в виде:

$$(7')\ T(A \to B)/w_i = (A \Rightarrow B)/w_i \,\&\, \forall C((C \to A) \Rightarrow (C \to B))/w_i).$$

В таком определении было бы, конечно, то, что называется "кругом", так как условия истинности самой квазиимпликации "$\Rightarrow$" определяются со ссылкой на верификацию ее антецедента, а во второй квазиимпликации, входящей в определяющую часть, таким антецедентом служит релевантная импликация, условия верификации которой как раз и определяются. В данной ситуации "круг" однако ничему не мешает. Мы уже неоднократно говорили, что истинность импликации $A \to B$ может быть либо постулирована, либо обоснована как следствие из постулирования истинности других таких импликаций. И только если такие постулаты имеются, мы получаем мания (2) требуется знать условия истинности $C \to A$. По счастью, для наших целей достаточно ограничиться более слабым, чем (2), утверждением (1), которое в отличие от (2) не содержит знаков, которые еще не определены.

Дело в том, что для произвольного C обосновать

$$T(\neg(C \to B))/w_i \supset \neg(C \to A) \in w_i^{c})$$

принципиально возможно только в случаях постулирования $T(A \to B)/w_i$ или получения его из других утверждений о следовании в соответствии с имеющимися семантическими возможностями. Иными словами, сформулировано условие

возможность воспользоваться нашим дефектным, чреватым кругом определением. Пусть в некотором мире постулирована истинность $A \to B$ и $A \to D$. Тогда в силу (7') мы имели бы возможность (а "круг" был бы нам страшен именно в силу отрицания такой возможности) обосновать в этом мире верность $C \to A \Rightarrow .C \to B$ и $C \to A \Rightarrow .C \to D$ и далее верность, например, $A \to BD$. В обсуждаемом круговом определении (7') имеется определенная аналогия с тем, как определяется в семантике возможных миров необходимость NA в некотором возможном мире w_i, если и только если A истинно во всех достижимых из w_i мирах. Сами же достижимые миры – это те, в которых истинны все необходимые высказывания. У нас нет никакой возможности установить необходимость некоторого (нетавтологичного в рамках принятой семантики) A, пока хотя бы некоторые высказывания не постулированы как необходимые. В противном случае мы просто не можем знать, какие миры достижимы. Постулировано как необходимое CD, и мы можем утверждать, что C истинно во всех достижимых мирах, и $C \vee B$ истинно во всех возможных мирах и так далее. Единственным, по-видимому, совершенно непреодолимым недостатком нашего кругового определения является то, что едва ли найдется логик, способный при обнаружении "круга в определении" читать текст дальше. Именно по этой причине приходится так изощряться здесь, что бы во что бы то ни стало избежать злосчастного круга, ибо все знают, что он недопустим, хотя едва ли многие задумывались: почему? и всегда ли?

истинности утверждения о следовании, выполнимость которого (условия) может быть установлена только после того, как в истинности этого утверждения удается убедиться по некоторым иным основаниям.

Интересно рассмотреть и пояснить теперь, за счет чего происходит **замыкание** класса формул всякого теоретического мира (мира формул, второго этажа) относительно семантических следствий. Семантическое замыкание класса формул, верифицируемых в атомарных мирах (на первых этажах) осуществляется за счет условий верификации формул. На вторых этажах формулы не верифицируются, они туда лишь входят, и поэтому на проблему указанной замкнутости приходится специально обращать внимание. Ведь совсем не факт, что в случае нахождения на втором этаже формулы C там будет находиться также и $C \vee C$.

Формально говоря, проблема состоит в том, чтобы объяснить, почему при верности $A \rightarrow B$ в мире w_i в нем обеспечивается верность всякого утверждения $A \rightarrow C$ такого, где для C имеет силу $\forall w_i\ (T(B)/w_i \supset T(C)/w_i$. Речь идет об условии, требующем семантического замыкания B, то есть нахождения на втором этаже соответствующих достижимых миров не только B, но и всех указанных C. То, что такое условие необходимо, совершенно естественно, так как верифицируемость в некотором мире формулы вида $A \rightarrow B$ должна непременно сопровождаться верифицируемостью всякой формулы $A \rightarrow C$, где C – представляет собой формулу, для которой $B \rightarrow C$ есть теорема теории, семантика которой строится.

Мы покажем, что требуемое условие осуществляется за счет замыкания, аналогичного MP, существование которого мы сейчас докажем и которое в дальнейшем будем обозначать как *MPcl*.

(***MPcl***) *Пусть* Q – есть формула, имеющая вид конъюнкции $(A_1 \to B_1) \wedge ... \wedge (A_n \to B_n)$ $(n \geq 1)$, и для любого возможного мира w_i имеет место $\forall k(T(A_k)/w_i \supset T(B_k)/w_i)$ $(1 \geq k \geq n)$, тогда если $Q \to C$ верифицируется в мире w_i, то в w_i верифицируется C.

Доказательство. Пусть $Q \to C$ верифицируется в мире w_i. Возможны следующие случаи. Первый. Формула Q верифицируется в мире w_i. Тогда в силу условий истинности импликации $Q \to C$ формула C верифицируется в мире w_i, и значит, *MPcl* является верным. Случай второй. Формула Q не верифицируется и не фальсифицируется в мире w_i. Это означает, что в мире w_i не фальсифицируется и не верифицируется $\neg Q$. Так как в соответствии с определением *D1* в мире w_i верифицируется $\neg Q \vee C$, то это в силу неверифицируемости $\neg Q$ влечет требуемую верифицируемость C. Наконец, третий и последний случай, когда фальсифицируется Q (верифицируется $\neg Q$). Тогда верифицируемость C вытекает из того, что $\neg Q$ может верифицироваться только в потенциально противоречивых мирах. Действительно, $\neg Q$ верифицируется в некотором мире w_i, если только в w_i фальсифицируется по крайней мере одна из импликаций $(A_k \to B_k)$ $(1 \leq k \leq n)$. Это значит, что существует достижимый из w_i мир w_j, в котором верифицируется A_k и $\neg B_k$. А так как для любого мира верифицируемость в нем A_k влечет верифицируемость B_k, то в w_j верифицируются B_k и $\neg B_k$, а значит, в w_i и поэтому в w_j фальсифицируется $B_k \to B_k$. Что и требовалось доказать.

Вернемся к проблеме семантического замыкания вторых этажей возможных миров. При верности в некотором (любом) мире w_i формулы $A \to B$ в этом же мире верифицируется $B \to C \to .A \to C$. Если теперь $B \to C$ таково, что имеет силу $\forall w_i\ (T(B)/w_i \supset T(C)/w_i)$, то на основании ($MPcl$) получаем утверждение о верности в w_i формулы $A \to C$.

Закончим настоящую главу некоторым содержательным резюме. Итак, семантика S^{ca} отличается от обычной крепкевской семантики тем, что возможные миры, содержательно трактуемые как универсумы рассуждения, состоят из двух подразделений (уровней, этажей). Первый из этих этажей является обычным крипкевским возможным миром и представляет собой то, что Карнап называл описанием состояний, включая в себя списки литералов (пропозициональных переменных или их отрицаний). Требования полноты, в соответствии с которым каждое описание состояний содержит для любой такой переменной a саму эту переменную или ее отрицание $\neg a$, не предполагается.

В эпистемическом плане это подразумевает, что атомарные высказывания или их отрицания, входящие в описание состояний, относятся к эмпирическим или к так называемым предложениям наблюдения. И те литералы, которые находятся на первых этажах универсумов рассуждений, считаются в соответствующем мире истинными. Существуют атомарные предложения, об истинности или ложности которых в данном конкретном мире ничего сказать нельзя: они не являются в этих мирах ни истинными, ни ложными.

При этом класс истинных (верифицируемых) атомарных высказываний в некотором мире w_i не исчерпывается теми, которые содержатся только на первом этаже мира (входят в список w_l^a). Атомарное высказывание может быть теоретическим, так что его нельзя верифицировать только на основании эмпирическим образом получаемых утверждений. Скажем, утверждение о том, что в такой-то точке планеты произошло землетрясение, может быть и эмпирическим, и теоретическим. Утверждение об эпицентре такого землетрясения уже трудно получить чисто эмпирически. Это, если речь идет о его географических координатах, а если о глубине нахождения эпицентра, то, по-видимому, вообще невозможно. Такое утверждение всегда предполагает использование некоторой специальной теории. В ее рамках на основании показаний приборов, соответствующих сейсмограмм только и могут быть получены утверждения такого рода. Точно так же утверждения о температуре одних объектов можно с определенными оговорками считать эмпирическими, полагаясь на показания приборов, а о температуре других, скажем ядра Земли, такие утверждения могут быть только теоретическими или даже гипотетическими, так как опираются не только на заслуживающие доверия теории, но и на многочисленные предположения, допущения, экстраполяции и тому подобное.

Понятие теоретического утверждения трактуется нами очень широко. Это по сути любое осмысленное утверждение, проблема верификации которого выходит за рамки эмпирического. Иными словами, это утверждение, обоснование которого предполагает использование каких-то допущений, которые принципиально не могут быть дедуцированы из предложений наблюдения. И если даже при обосновании такого утверждения опираются исключительно на эмпирию, оно всегда содержит информацию несколько большую, чем исходная.

В рамках обсуждаемой семантики некоторое атомарное высказывание B, которое отсутствует на первом этаже в мире w_i, может быть признано истинным, например, в силу того, что в этом мире верифицируется теоретическое высказывание $A \rightarrow B$ (высказывание такого вида всегда является теоретическим) и эмпирическое (находящееся на первом этаже w_i^a) высказывание A.

Таким образом, наши возможные миры, или универсумы рассуждения, это совокупность эмпирических описаний состояний и теоретических положений. Явным образом задавая то и другое, мы задаем как конкретный возможный мир, так и все миры, достижимые из него. Последние суть все те, в которых сохраняют силу теоретические положения.

Запрет на противоречивые описания состояний отнюдь не исключает возможной противоречивости мира в целом. Как бы мы ни пытались запрещать противоречие, как бы ни пытались провозгласить непротиворечивость законом мышления, ничто не способно освободить нас как от случайной (ненамеренной) противоречивости принимаемых теоретических положений и допущений, так и от намеренного предположения верности утверждения, которое противоречит уже принятым. Такое предположение может делаться, например, с целью его дальнейшего опровержения.

Ясно, что универсумы рассуждения это не онтологические, а скорее эпистемические миры. Некоторое высказывание в каждом таком мире может: (1) только верифицироваться, (2) только фальсифицироваться, (3) одновременно и верифицироваться, и фальсифицироваться и (4) ни верифицироваться, ни фальсифицироваться. Это вполне соответствует тому и моделирует то, что мы знаем о реальном мире и как познаем его. С пунктами (1) и (2) все ясно. С пунктом (3) мы имеем дело, когда сталкиваемся с противоречием, а с пунктом (4), когда встаем перед проблемой, которая пока не может быть нами решена или даже вообще принципиально не разрешима.

Такое положение не отменяет закона исключенного третьего в его онтологическом смысле. Тот факт, что истинностное значение некоторого высказывания нам не известно, неважно, из-за недостатка информации или из-за принципиальной невозможности установить такое значение вообще, дела не меняет. Можно считать, что само по себе всякое высказывание либо истинно, либо ложно. Наша семантика не отвергает этого, но она к признанию этого и не вынуждает.

Поскольку теоретический "этаж" универсума рассуждения может быть пустым, никакое теоретическое высказывание не признается в этой семантике заведомо истинным в каждом возможном мире. Это относится и к тем теоретическим предложениям, которые называются логическими тавтологиями. В том числе и к тем, которые называются релевантными тавтологиями.

В логике интерес представляют главным образом формулы $A \rightarrow B$, которые позволяют умозаключать от высказываний, имеющих логическую структуру формулы A, к высказываниям с логической структурой, соответствующих высказыванию B.

Семантика S^{ca} позволяет описать все такие пропозициональные формулы вида $A \rightarrow B$, которые верифицируются во всех тех мирах, где предположена истинность $A \rightarrow A$ или $B \rightarrow B$. Именно эти, и только эти, формулы указанного вида считаются в S^{ca} семантически истинными. Получаются они из $A \to A$ или $B \to B$ исключительно за счет так называемых ослаблений на основании явно сформулированных соглашений о смысле пропозициональных связок. Если, скажем, вы допустили, что в мире верно $A \to A$, то, естественно, вы обязаны будете считать в этом мире верным и $AB \to A$, и $A \to A \vee C$, и $AB \to B \vee C$. Это говорит о семантической истинности последних. Но не делает правильным утверждение об их истинности без предположения истинности $A \to A$. При этом утверждение о том, что во всяком мире, где верно $A \to A$, будет верным также $AB \to B \vee C$, является теоретическим метаутверждением, которое в соответствии с S^{ca} позволяет считать семантически истинным также и теоретическое утверждение $A \to A \to AB \to B \vee C$, но не дает оснований считать и его истинным даже в том мире, где верифицируется $A \to A$.

Семантика S^{ca}, таким образом, не порождает никаких новых теоретических положений объектного языка, кроме тех, которые вытекают из уже принятых предпосылок, причем вытекают исключительно на основании языковых соглашений. Принимая для любого мира в качестве исходных истинных предположений все сформулированные в соответствующем языке утверждения вида $A \to A$, а также те языковые соглашения, которые детерминируются принимаемым исчислением, мы зададим семантику этого исчисления.

Можно сказать поэтому, что то, что мы называем логическими истинами, есть производное из самого сильного в логическом смысле утверждения о том, что для любого A: $A \to A$, а также соглашений о смысле тех выражений языка, которые мы называем логическими и которые определяют логическую структуру высказываний. По-видимому, это было всегда ясно тем, кто использовал так называемые секвенциальные исчисления, где любое доказательство начинается с основной секвенции вида $A \rightarrow A$.

Отсюда, кстати, следует объяснение того факта, почему люди мыслят логично независимо от знания логики. Их вынуждают к этому требования и нормы языка[47].

---

[47] Мысль о языковой детерминированности логических принципов в наиболее явной форме отстаивал А.А. Зиновьев, который говорил даже о логической *диктатуре языка*. В этом нашло свое отражение то важное для понимания логики обстоятельство, что она выявляет и формулирует детерминируемые языком нормы оперирования и преобразования выражений этого же языка. В книге "Логическая физика"(М., 1972) Зиновьев предпринял специальную попытку различить два принципиально разных типа высказываний, говорящих о физических, в частности, о пространственно-временных отношениях. Высказывания первого типа отражают реалии существующего мира и являются истинными или ложными в зависимости от адекватности этого отражения. Высказывания второго типа являются следствиями принятого понимания языковых выражений, и одновременно с этим условиями, определяющими именно такое, а не иное понимание этих выражений. Для верификации утверждения, что "Звезда α ближе к Земле, чем звезда β", необходимы соответствующие астрономические расчеты. Совершенно по-другому обстоит дело с утверждением: "Если α ближе, чем β, и β ближе, чем δ, то α ближе, чем δ". Его истинность обеспечивается смыслом слова ***ближе***. При этом свидетельством того, что этот смысл правильно понимается, является именно признание приведенного условного высказывания истинным.

5. Семантика системы Е

При построении семантики следования мы исходили из некоторого интуитивного его понимания. Мы можем теперь показать, что построенная нами семантика адекватна известной релевантной системе E, принимаемой в следующей формулировке:

***Аксиомы E*:**

A1.$(A\to A)(B\to B)\to C\to C$

A2. $A\to B\to .B\to C\to .A\to C$

A3. $A\to B\to .C\to A\to .C\to B$

A4. $(A\to .A\to B)\to A\to B$

A5. $AB\to A$

A6. $AB\to B$

A7. $(A\to B)(A\to C)\to .A\to BC$

A8. $A\to A\vee B$

A9. $B\to A\vee B$

A10.$(A\to C)(B\to C)\to .A\vee B\to C$

A11. $A(B\vee C)\to AB\vee C$

A12. $A\to B\to .\neg B\to\neg A$

A13. $A\neg B\to\neg(A\to B)$

A15. $\neg\neg A\to A$

A14. $A\to\neg\neg A$

***Правила вывода E*:**

*R*1. *Из* $A\to B$ и *A следует B* (*Modus ponens*, *MP*).

*R*2. *Из A и B следует AB* (*Правило адъюнкции*).

Как уже отмечалось, никакая формула A не является в семантике S^{ca} ни тождественно истинной, ни тождественно ложной в том смысле, что всегда найдутся миры, в которых A не верифицируется, а значит, и такие, в которых A не фальсифицируется. Это относится и ко всем аксиомам и теоремам системы E. Чтобы иметь возможность говорить о семантической истинности теорем E, вводится специальное понимание семантической истинности.

Определение D2. Некоторая формула B называется семантически истинной в семантике S^{ca} (символически: $\models B$), если и только если во всяком мире w_i, в котором верифицируется $B \rightarrow B$, верифицируется B. Или формально:

$$\models B =_{\mathrm{df}} \forall w_i (T(B \rightarrow B)/w_i \supset T(B)/w_i\ .$$

Приведенное определение дополняется следующей леммой:

Лемма 1. *Если* $\forall w_i (T(A \rightarrow A)/w_i \supset T(B)/w_i$, *то* $\models B$.

Справедливость леммы вытекает из следующих утверждений:

$T(A \rightarrow A)/w_i \supset T(B)/w_i$ (1)

$T(B \rightarrow B)/w_i \supset T((A \rightarrow A) \rightarrow B \rightarrow .(A \rightarrow A) \rightarrow B)/w_i$ (2)

$T(B \rightarrow B)/w_i \supset T((A \rightarrow A) \rightarrow B)/w_i$ (3)

$T((A \rightarrow A) \rightarrow B)/w_i \supset T(B)/w_i$ (4)

$T(B \rightarrow B)/w_i \supset T(B)/w_i$ (5)

Утверждение (1), очевидно, берется как посылка. (2) является верным в силу транзитивности релевантной импликации. Утверждение (3) вытекает из (2) и (1) в соответствии (*MPcl*). На основании этого же пункта является верным (4). Наконец, (5) получается по транзитивности из (3) и (4). *Лемма* доказана.

Покажем, что все доказуемые в системе E формулы являются в S^{ca} семантически истинными в смысле D2.

Метатеорема MT1. Если формула B есть теорема системы E, то $\models B$ в S^{ca}.

Начнем доказательство с констатации следующего факта. Если формула имеет вид импликации $A\to B$, то для того, чтобы убедиться в ее семантической истинности, достаточно показать, что B верифицируется во всех мирах, в которых верифицируется A. Действительно, если дело обстоит указанным образом, то утверждение о семантической истинности $A\to$B получается из $A\to B \to .A\to B$ немедленно в силу ($MPcl$).

Приведем формальное доказательство соответствующего этому факту утверждения в качестве соответствующей леммы.

Лемма 2. Если $\forall w_i\,(T(A)/w_i \supset T(B)/w_i)$, *то* $\models A \to B$.

Доказательство. Утверждение

$$\forall w_i\,(T((A \to B) \to (A \to B))/w_i \supset T(A \to B)/w_i)$$

и, следовательно, $\models A \to B$ получается из очевидно верного (как подстановочный случай $p\supset p$) для всякого w_i утверждения

$$T((A \to B) \to (A \to B))/w_i \supset T((A \to B) \to (A \to B))/w_i$$

и антецедента леммы $\forall w_i\,(T(A)/w_i \supset T(B)/w_i)$ в силу ($MPcl$).

Заметим вместе с тем, что если не удается доказать, что во всех мирах, в которых верифицируется A, также верифицируется и B, то это отнюдь еще не означает, что соответствующая импликация $A\to B$ не является семантически истинной. В качестве примера укажем на контрапозицию аналитической записи принципа MP:

$$\neg B \to \neg((A \to B)A).$$

Нет оснований утверждать, что в каждом мире, где верифицируется антецедент данной формулы $\neg B$, верифицируется и ее консеквент $\neg((A \to B)A)$[48]. Но, как мы убедимся, доказав *MT1*, предположение о верности в каком-либо мире импликации

$$\neg B \to \neg((A \to B)A) \to . \neg B \to \neg((A \to B)A)$$

влечет признание истинности в нем и, следовательно, семантической истинности $\neg B \to \neg((A \to B)A)$.

Это лишь одна из причин, по которой определение семантической истинности принимается в соответствии с D2. Другая причина связана с тем, что семантически истинные формулы не обязательно имеют вид импликации. Вместе с тем, учитывая, что все аксиомы системы *E* имеют именно такой вид, мы для доказательства их семантической истинности будем использовать указанный выше прием, тем более, что он оказывается пригодным для всех аксиом системы.

Семантическая истинность $(A \to A)(B \to B) \to C \to C$ (*A*1) немедленно вытекает из (*MPcl*). Действительно, если в некотором мире верифицируется антецедент этой аксиомы $(A \to A)(B \to B) \to C$, то в нем в соответствии с указанным замыканием будет верифицироваться и ее консеквент *C*.

---

48 Действительно, тот факт, что в данном мире верифицируется $\neg B$, не означает, что в этом мире фальсифицируется конъюнкция $(A \to B)A$. Во-первых, формула *A* может оказаться в нем неопределенной, т.е. ни верифицироваться, ни фальсифицироваться. Во-вторых, нет никаких оснований считать, что в числе миров, достижимых из данного, непременно найдется такой мир, что *A* в нем верифицируется, а *B* фальсифицируется, как это требуется для фальсификации $(A \to B)$, являющегося вторым членом конъюнкции.

По причине, которая станет ясной ниже, мы обратимся прежде к аксиоме $A \to B \to .C \to A \to .C \to B$ ($A3$), а затем уже вернемся к $A2$, выражающей другой принцип транзитивности. Легко увидеть, что в аксиоме $A3$ верифицируемость ее консеквента $C \to A \to .C \to B$ является в соответствии с пунктом (7) определения $D1$ условием верифицируемости ее антецедента $A \to B$, так как последний не может быть верифицирован, если для любого C не имеет силы $(C \to A) \Rightarrow (C \to B)$, а значит, и $(C \to A) \to (C \to B)$. Таким образом, аксиома А3 – семантически истинна.

Достаточно воспользоваться фактом семантической истинности А3 и тем, что выражения вида $A \to B$ и $\neg B \to \neg A$ у нас по определению идентичны, чтобы доказать семантическую истинность $AB \to .B \to C \to .\ A \to C$ ($A2$). Действительно, в соответствии с ранее доказанным мы имеем семантически истинную формулу

$$\neg B \to \neg A \to .\neg C \to \neg B \to .\neg C \to \neg A,$$

представляющую собой вариант А3. Из нее эквивалентными заменами $\neg B \to \neg A$, $\neg C \to \neg B$ и $\neg C \to \neg A$ на $A \to B$, $B \to C$ и $A \to C$ соответственно легко получаем требуемую аксиому А2, из чего следует ее семантическая истинность.

Обратимся теперь к аксиоме

$$(A \to A \to B) \to .\ A \to B \text{ (A4)}.$$

Условием верификации антецедента этой аксиомы, т.е. $A \to .A \to B$, в некотором мире w_i является верифицируемость $A \to B$ в каждом достижимом из w_i мире w_j, где верно A. Но для того, чтобы $A \to B$ верифицировалось в каждом таком достижимом мире, надо, чтобы в каждом мире w_k, достижимом из каждого мира w_j, имели силу утверждения:

(i) $(A \Rightarrow B)/w_k$ и (ii) $T(\neg(C \to B))/w_k \supset \neg(C \to A) \in w_k^c$).

Однако в силу рефлексивности и транзитивности отношения достижимости R каждый такой мир w_k есть всегда достижимый из w_i мир w_j, в котором истинно A. Этого достаточно, чтобы утверждать поэтому, что приведенные утверждения (i) и (ii), являясь следствиями $T(A\rightarrow.A\rightarrow B)/w_i$, обеспечивают верность $T(A\rightarrow B)/w_i$. Что и требовалось доказать.

Что касается аксиомных схем $AB\rightarrow A$ ($A5$), $AB\rightarrow B$ ($A6$), $A\rightarrow A\vee B$ ($A8$) и $B\rightarrow A\vee B$ ($A9$), то их семантическая истинность, вытекающая из соответствующих условий верификации конъюнкции и дизъюнкции, очевидна.

Из требований ($Cl1$) и ($Cl2$) вытекает семантическая истинность аксиомы $(A\rightarrow B)(A\rightarrow C)\rightarrow.A\rightarrow BC$ (А7).

Аксиома $(A\rightarrow C)(B\rightarrow C)\rightarrow.A\vee B\rightarrow C$ (А10) за счет принципов контрапозиции и законов де Моргана сводится к А7 и является в связи с этим также семантически истинной.

Семантическая истинность аксиомных схем А11-А15: $A(B\vee C)\rightarrow AB\vee C$, $A\rightarrow B\rightarrow.\neg B\rightarrow\neg A$, $A\neg B\rightarrow\neg(A\rightarrow B)$, $A\rightarrow\neg\neg A$, и $\neg\neg A\rightarrow A$ – с очевидностью вытекает из условий верификации их антецедентов и консеквентов.

Мы установили, что все аксиомы системы E семантически истинны, и, значит, каждая аксиома Ai ($i\leq 15$) верифицируется во всех тех мирах, в которых верифицируется $Ai\rightarrow Ai$. Для завершения доказательства МТ1 нам достаточно показать, что имеющиеся в системе E правила вывода MP и правило адъюнкции сохраняют для теорем это свойство в силе. Это означает, что для MP надо убедиться, что в случае, если во всяком мире, в котором верифицируется $A\rightarrow B\rightarrow.A\rightarrow B$, верифицируется $A\rightarrow B$, и если во всяком мире, в котором верифицируется $A\rightarrow A$, верифицируется A, тогда во всяком мире, если в нем верифицируется $B \to B$, то в нем верифицируется B. Формально:

$$(T(A \to B \to .A \to B)/w_i \supset T(A \to B)/w_i) \& (T(A \to A)/w_i \supset T(A)/w_i) \supset. \\ \supset. T(B \to B)/w_i \supset T(B)/w_i .$$

Покажем, что приведенное утверждение справедливо. В мирах, в которых верифицируется $A \to B \to .A \to B$, а значит, и $A \to B$, будет по принципу транзитивности верной формула $(A \to A) \to A \to .(A \to A) \to B$. В силу семантической истинности формулы A и замыкания (*MPcl*) в тех же мирах верифицируется $(A \to A) \to B$, а значит, и формула B. А это в силу *Леммы 1* означает, что B верифицируется во всех тех мирах, где верифицируется $B \to B$.

Для правила адъюнкции надо показать, что в случае верности утверждений

(1) $T(A \to A)/w_i \supset T(A)/w_i$ и (2) $T(B \to B)/w_i \supset T(B)/w_i$

будет иметь силу также и

(3) $T(AB \to AB)/w_i \supset T(AB)/w_i$.

Применение *Леммы 1*, как и в случае с *MP*, делает эту задачу достаточно несложной. Обозначим через C конъюнкцию $(A \to A)(B \to B)$ и заметим сразу, что для любого w_i из (1) и (2) вытекает (4) $T(C)/w_i \supset T(AB)/w_i$. Если в некотором мире верно $(AB \to AB)$, то в нем имеет место: (5) $(C \to AB) \to .C \to AB)$. Из (5) на основании (*MPcl*) имеем последовательно сначала $(C \to AB)$, а затем и нужное нам AB. А так как это имеет место для любого мира, где верно $(AB \to AB)$, можно утверждать, что AB - семантически истинно. Это означает, что правило адъюнкции сохраняет семантическую истинность. Теорема *MT1* доказана.

Прежде, чем перейти к следующему важному шагу и показать, что любая семантически истинная формула является теоремой системы E, продемонстрируем, как в рамках данной семантики удается осуществить семантическое различие между двумя весьма похожими утверждениями:

$$(A \to B)(BC \to D) \to (AC \to D) \ (1)$$

$$(A \to B)(BC \to D)(C \to C) \to (AC \to D) \ (2)$$

Второе из них, в антецедент которого конъюнктивно добавлена формула $(C \to C)$, в отличие от первого является теоремой системы E, и при построении семантики обычно очень непросто сохранить общезначимость только за утверждением (2), но не за (1). Семантика S^{ca} решает эту проблему следующим образом. Верификация антецедента формулы (2), включающего формулы $(A \to B)$ и $(C \to C)$ влечет верификацию $AC \to BC$, что при наличии в антецеденте $BC \to D$ в силу транзитивности обеспечивает верификацию консеквента формулы (2).

Для (1) такой подход оказывается невозможным. И хотя можно утверждать, что во всяком мире при верности антецедента формулы (1) верификация AC влечет верификацию D (что, собственно, и дает резонные аргументы в пользу принятия (1)), для обоснования $AC \to D$ этого недостаточно. Мы в принципе не можем получить необходимое для верификации $AC \to D$ в некотором мире утверждение, что в каждом достижимом мире, где верифицируется $\neg D$, к миру следствий принадлежит $\neg(AC)$[49].

---

49 В связи с тем фактом, что формула $(A \to B)(BC \to D) \to (AC \to D)$ не является у нас семантически истинной, уместно обратить внимание на то, что будь входящая в ее антецедент формула $(A \to B)$ семантически истинной, справедливым было бы уже $(BC \to D) \to (AC \to D)$. Данное обстоятельство говорит о существенном различии между фактическим отношением логического следования и предположением о таком следовании, выражаемом в посылках. В первом случае речь идет о соответствующем отношении между высказываниями во

Метатеорема МТ2 (*Теорема полноты*). Если B является семантически истинной формулой в семантике S^{ea}, то B есть теорема системы E. Более формально:

$$\text{Если } \vDash B \text{ в } S^{ea}, \text{ то } \vdash B \text{ в } E.$$

Стратегия доказательства состоит в том, чтобы показать, что

$$\forall w_i\,(T(A \rightarrow A)/w_i \supset T(B)/w_i)\ (1)$$

является верным только в случае, когда B есть теорема системы E. Так как в соответствии с *Леммой 1* утверждение (1) равносильно утверждению о семантической истинности B, этого будет достаточно для доказательства МT2.

Поскольку никакая формула не верифицируется во всех мирах без некоторой предпосылки, очевидно, что (1) может оказаться верным только в случае, когда B получается из $A \rightarrow A$ в силу некоторых допустимых семантических преобразований, которые определяются семантическими свойствами связок, заданными определением *D1* и другими требованиями семантики.

Первые пять пунктов *D1* являются стандартными, и их применение для семантических преобразований исходной формулы всегда будет обеспечивать переход от любой теоремы E к теореме же. Пункт (6) позволяет считать $\neg(A \rightarrow B)$

всех мирах, что обеспечивает замыкание вторых этажей миров относительно следствий, имеющихся там высказываний. Во втором случае данное отношение ограничивается лишь классом возможных (достижимых) миров. По сути своей посылка указанного рода представляет собой лишь ограничение на класс миров, относящихся к достижимым. Принятие $(A \rightarrow B)$ в качестве посылки не приводит к изменению класса следствий, относительно которых осуществляется названное замыкание. И это еще один серьезный аргумент против интерпретации импликации в объектном языке как логического следования.

семантическим ослаблением $A\neg B$, чему в E соответствует теорема $A\neg B \rightarrow \neg(A\rightarrow B)$, и поэтому преобразования, осуществляемые с использованием этого пункта, также оставляют теорему системы E ее теоремой.

В соответствии с пунктом (7) определения *D1* семантическим эквивалентом формулы $A\rightarrow B$ является $\neg B\rightarrow\neg A$, а их семантическими ослаблениями $\neg A\vee B$ и любые формулы вида $B\rightarrow C\rightarrow A\rightarrow C$, $C\rightarrow A\rightarrow .C\rightarrow B$. Трансформации любой теоремы E, связанные с этими свойствами, приводят к новой теореме этой системы.

Наконец, пункт (7) позволяет (как это доказывает *MPcl*) преобразовать в C любую формулу вида $Q \rightarrow C$, где Q есть конъюнкция семантически истинных импликаций. Так как при верности $Q \rightarrow C$ в этом случае всегда верно также $(Q \rightarrow Q) \rightarrow C$, то это равносильно разрешенному в системе E переходу от $(Q\rightarrow Q)\rightarrow C$ к C.

Замыкания (*Cl1*) и (*Cl2*) дают оправданную с точки зрения системы E возможность считать верифицированными во всяком возможном мире утверждения $C\rightarrow AB$ и $D \rightarrow .C\rightarrow AB$ в случае верности в этом мире конъюнкций

$$(C\rightarrow A)(C\rightarrow B) \text{ и } (D \rightarrow .C\rightarrow A)(D \rightarrow .C\rightarrow B)$$

соответственно.

Никаких иных семантических преобразований стоящей в антецеденте (1) формулы $A\rightarrow A$, кроме названных, осуществить нельзя. И так как $A\rightarrow A$ есть теорема системы E, формула B, получающаяся в результате этих преобразований, всегда будет также теоремой этой системы. Таким образом, теорема *MT2* о семантической полноте системы E доказана.

Из *MT1* и *MT2* немедленно следует:

Метатеорема МТ3. Утверждение $\models B$ верно в семантике S^{ea}, если и только если $\vdash B$ в системе E.

Этим мы завершаем построение семантики для системы E, формализующей следование, трактуемое нами, о чем еще будет сказано ниже, как необходимая условная связь.

Осуществив построение семантики S^{ea} для системы E, обратимся к проблеме ее содержательной оправданности. Обсудим , в частности, вопрос, почему мы получили семантику именно для E, а не для какой-нибудь иной системы. Этот вопрос представляет интерес тем более, что далее мы адаптируем полученную семантику для других релевантных систем.

6. Чем детерминируется семантика следования

Нашей изначальной целью было построение семантики для понятия следования, смысл которого понимался в соответствии с некоторой интуицией, связанной с практикой употребления этого понятия в реальных рассуждениях. Естественно, что кроме интуиции, которая дает некоторые убеждающие основания лишь тем, кто ее разделяет, имелись и другие более четкие и строгие детерминации. Изначально ясно было, какие из класса утверждений вида $A \rightarrow B$, где A и B формулы классической логики, будут относиться к числу семантически истинных вне связи с конкретными исчислениями.

Задача, таким образом, сводилась практически к установлению и описанию семантически истинных формул вида $A \rightarrow B$ с вхождениями знака следования в A и (или) B. И в этом случае целый класс утверждений уже заранее относился к числу тех, которые в семантике должны были быть заведомо валидными. Речь идет, например, о законах рефлексивности, транзитивности, контрапозиции. Можно говорить поэтому, что семантика с точки зрения разбиения формул на *валидные* и *невалидные*, действительно, во многом детерминирована тем смыслом понятия следования, который ему придается вне связи с конкретными логическими исчислениями. В результате получилось, что эта самая интуиция формализуется системой E.

Был ли последний результат необходимым? Конечно же, нет. Даже при наличии уже указанных детерминант оставался некоторый коридор возможностей для получения семантик, формализуемых может быть и близкими, но все-таки отличными от *E*, системами. Без всяких возможных в этом случае экивоков надо признать, что семантика строилась именно с расчетом на исчисление *E*. И это довольно оправданно, учитывая, что мы имеем дело в данном случае с давно существующей, известной, изученной и достаточно хорошо работающей системой. Надо признать тем не менее, что семантика получилась достаточно естественно[50], что говорит об определенной естественности самой системы.

Существует устойчивое мнение, что хорошая содержательная семантика должна однозначно детерминировать соответствующее логическое исчисление. И если некоторое исчисление не укладывается в рамки такой семантики, то тем хуже для исчисления. Подобное требование всегда представлялось мне чересчур жестким, и еще в своей кандидатской диссертации я пытался показать, что корреляции между семантикой и исчислениями могут быть куда богаче и разнообразнее, чем простая детерминированность одного другим. Но в общем-то приведенное мнение до недавнего времени представлялось мне в основе своей достаточно резонным.

Сейчас я полагаю, что семантика должна строиться так, чтобы ничего не предрешать заранее. Она должна изначально быть, если хотите, *чистым листом*, на котором можно написать все что угодно, читай: для любого логического исчисления описать тот класс семантических истин,

---

[50] Пожалуй, не ориентируйся я специально на систему *E*, при определении квазиимпликации я не стал бы вводить требование, в соответствии с которым для верности импликации $A \rightarrow B$ требуется верность $\neg A \vee B$. Это упростило бы семантику и она стала бы адекватной системе *T*, которая получается из предложенной формулировки *E* отбрасыванием аксиомы A13.

которое оно формализует. Я, таким образом, не только не боюсь, что относительно тех или иных принципов семантики будет высказан упрек в их *ad hoc* характере, но, напротив, считаю, что таковыми должны быть вообще все ее принципы в том смысле, что ни один из них не должен быть изначально навязан. Такая степень свободы, а фактически полная свобода, позволяет установить ту взаимную корреляцию исчисления и семантики, при которой у нас не будет оставаться неудовлетворенности по поводу того, что семантика блокирует какие-то уместные логические принципы или, напротив, вынуждает относить к числу верных те, которые резонно было бы исключить.

В этом нет неприемлемого релятивизма, так как в любом случае мы остаемся в рамках соглашений, принимаемых нами относительно используемых средств языка. И надо только, чтобы соглашения эти были разумными, уместными, релевантными.

В заключение несколько слов об одном из семантически истинных в нашей семантике утверждений, которое как раз с точки зрения языковых соглашений выглядит достаточно сомнительным. Речь идет о принципе

$$A \to B \to \neg A \vee B \ (1).$$

Рассмотрим один из частных его примеров. Из утверждения: "*Если король Франции лыс, то Франция имеет лысого монарха*" (2) в соответствии с (1) следует: "*Не верно, что король Франции лыс, или Франция имеет лысого монарха*" (3). Посчитав истинность (2) достаточно очевидной, вы, принимая (1), должны будете считать верным одно из двух предложений: "*Король Франции не является лысым*" (4), "*Франция имеет лысого монарха*" (5). Будь на месте

Франции такая страна, как монархическая Швеция, или та же Франция роялистских времен, все можно было бы считать нормальным. Однако, если говорить о Пятой республике, наверное, *предпочтительнее* считать оба этих предложения, как (4), так и (5), просто *бессмысленными*.

И что делать, если встать на эту точку зрения? Есть два выхода. Первый – отказаться от правомерности (1)[51]. Второй выход – не считать осмысленным в данной ситуации не только (4) и (5), но и (3). Самое замечательное, что наша семантика позволяет сделать именно это, не отказываясь от утверждения о семантической истинности принципа (1), несмотря на то, что (3) является его частным случаем.

Объясним, в чем тут дело, на примере принципа

$$A \to A \to \neg A \vee A \ (6),$$

который является подстановочным частным случаем (1). Пусть под A имеется в виду высказывание: "*Вечный двигатель требует регулярной смазки*". И пусть мы не желаем при таком A признавать истинным $\neg A \vee A$, так как и A, и $\neg A$ представляются одинаково нелепыми. Такому непризнанию отнюдь не препятствует то обстоятельство, что $\neg A \vee A$ является семантически истинным. Ведь утверждение о семантической истинности $\neg A \vee A$ есть не более, чем утверждение о том, что $\neg A \vee A$ верифицируется во всех тех мирах, в которых постулируется $\neg A \vee A \to \neg A \vee A$. Но это совсем не влечет признания верности $\neg A \vee A$ в некотором (в том числе и акту-

[51] Такой отказ должен будет сопровождаться определенными последствиями. Учитывая, что (1) можно получить по контрапозиции из $A \neg B \to \neg(A \to B)$ (1'), надо будет отказаться от принципа контрапозиции или от (1'), что в свою очередь неизбежно повлечет к отказу от каких-то других принципов.

альном) мире, поскольку для нелепого A совсем не обязательно считать в этом (да и в каком-либо вообще) мире верным $\neg A \vee A \rightarrow \neg A \vee A$.

Не препятствует этому также и то, что $\neg A \vee A$ следует из $A \rightarrow A$. Из факта такого следования вытекает лишь, что $A \rightarrow A$ для данного A также не является в соответствующих мирах верным (опять же несмотря на свою семантическую истинность).

В этом, конечно, есть нечто непривычное. Признавая некоторое высказывание B семантически истинным в силу его логической формы, мы вместе с тем, придав этой форме определенное содержание, при некоторых условиях (абсурдность подставляемых на место переменных выражений, пустота терминов и тому подобное) можем не считать B истинным.

Это возможно в силу опосредованности свойства семантической истинности. Высказывание B семантически истинно, когда оно верифицируется во всех мирах, где верно $B \rightarrow B$. Таких миров (где верифицируется $B \rightarrow B$) может вообще не быть, но семантической истинности B это обстоятельство не отменяет.

Если резюмировать, то дело обстоит следующим образом. Любой частный (содержательный) случай теоремы вида $A \rightarrow B$ системы E, для которой в данном случае наша семантика построена, может быть отвергнут в мире, в котором $\neg A \vee B$ по тем или иным соображениям не признается верным. Мы уже видели это на примере с “лысым королем”. А вот пример, в связи с которым обсуждаемая особенность нашей семантики кажется особенно привлекательной.

У нас есть возможность отвергнуть вроде бы логически безупречное утверждение: "*Если имярек не прекратил бить свою мать, то он продолжает бить свою мать или тещу*", на том основании, что не является верным: "*Имярек прекратил бить свою мать, или он продолжает бить свою мать или тещу*", так как имярек не мог прекратить или продолжать делать то, чего никогда не делал.

Вместе с тем сторонники так называемого конструктивистского (интуиционистского) направления в логике отвергли бы обсуждаемый нами принцип (1) как неприемлемый и при том условии, что предложения A и B являются осмысленными. Верность $A \rightarrow B$ для них не служит основанием верности $\neg A \vee B$, так как для признания таковой нужно конструктивно установить, что хотя бы одно из связываемых дизъюнкцией предложений истинно. Того факта, что они одновременно не могут быть ложными, при этом для представителей указанного направления недостаточно[52].

В связи с этим встает вопрос о принципиальной возможности адаптации нашей семантики к системам интуиционистского типа. Тем более, что принцип $A \rightarrow B \rightarrow \neg A \vee B$, а также принцип контрапозиции фактически включаются в определение условий верификации импликации. И тем не

---

52 Одной из последних публикаций, где специально обсуждается эта проблема, может служить [21]. Замечу, что мне всегда казался по меньшей мере странным тот факт, что сторонники интуиционистской логики спокойно воспринимают утверждение о ложности конъюнкции AB на том основании, что A и B не могут вместе быть истинными. Почему же, скажите, нельзя считать верным $A \vee B$ уже потому, что оба этих высказывания не могут быть вместе ложными? Другое дело, что конструктивисты иначе, чем в классике, понимают дизъюнкцию и отрицание, но это не основание для запрета на их классическое понимание.

менее указанная адаптация вполне возможна. Ясно, что для этого надо будет отказаться от названных принципов. При этом можно по-прежнему требовать, чтобы $A \to B$ являлось верным в некотором мире, только при условии верности в достижимых мирах $\neg A$ или B, но для верности $\neg A \vee B$ требовать кроме того, чтобы верность одного из дизъюнктов была конструктивно установлена.

7. Семантические различия между импликациями, описываемыми системами E и R

Начнем с некоторых сравнительных замечаний. В чисто техническом плане названные исчисления отличаются тем, что во втором из них в отличие от первого имеет силу *принцип перестановочности импликации*. Исчисление R может быть получено, таким образом, из E путем замены во всех аксиомах и правилах вывода E знака "$\rightarrow$" на знак "$\Rightarrow$" и добавлением к так модифицированным аксиомам и правилам дополнительной аксиомы, соответствующей упомянутому принципу, а именно:

$$\text{A16. } (A \Rightarrow .B \Rightarrow C) \Rightarrow .B \Rightarrow .A \Rightarrow C.$$

При содержательном анализе различий между импликациями "$\rightarrow$" из E и "$\Rightarrow$" из R обычно отмечается, что первая из них выражает необходимую связь между высказываниями (событиями), тогда как вторая импликативная связь может иметь место просто в силу сложившихся обстоятельств и в этом смысле может оказаться случайной. При этом утверждение о необходимой импликации вида $A \rightarrow B$ не может следовать из какого-либо чисто контингентного (случайного) высказывания C. Это означает, что никакое чисто импликативное высказывание $C \rightarrow .A \rightarrow B$ с такого рода C не может быть истинным. Отсюда становится ясным запрет на перестановочность импликации в общем случае. Действительно, в некотором верном утверждении $A \rightarrow .B \rightarrow C$ высказывание B может быть контингентным (чисто случайным), и переход к утверждению $B \rightarrow .A \rightarrow C$ был бы в таком случае неправомерным. В то же время, когда B в $A \to .B \to C$ имеет вид импликации $B_1 \to B_2$ (являясь поэтому необходимым), переход к $B \to .A \to C$ является правильным[53].

При построении семантики S^{ca} мы не делали никаких ссылок на необходимость и случайность, и тем не менее в силу адекватности предложенной семантики для E она, очевидно, удовлетворяет изложенным ограничениям на принцип перестановочности импликации. Выяснение вопроса, за счет чего это происходит, позволит выяснить две важные вещи. *Во-первых*, можно будет получить некоторое семантическое объяснение, почему же оказывается значимым порядок антецедентов (условий) в итерированных импликациях. И, *во-вторых*, увидеть способ, которым можно изменить уже имеющуюся семантику, чтобы этот порядок стал безразличным. Это понадобится нам, чтобы получить семантику обычной условной связки.

Казалось бы, отвержение принципа перестановочности импликации в семантике S^{ca} проще всего объяснить тем, что верность $A \to .B \to C$ в соответствующем мире обеспе-

---

[53] Заметим, что приведенное объяснение никак не оправдывает отказа от применения принципа перестановочности в импликации вида $A_1 \to .A_2 \to \ldots \to .A_n \to .B \to C$ относительно формул $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Дело в том, что ни одна из этих формул при верности указанной импликации, так сказать, по определению не может быть контингентной, так что все эти формулы можно менять местами. Кстати сказать, в исчислении E по той причине, что только одна из формул A и $\neg A$ может быть необходимой. Поэтому никогда не могут быть одновременно истинными утверждения вида $A \to .B \to C$ и $\neg A \to .B \to C$. Отсюда вытекает указанная мною в [14] возможность непротиворечиво расширить систему E за счет такого классически неприемлемого утверждения как $\neg(A \vee \neg A \to .B \to C)$. Это последнее показывает, что принятие закона исключенного третьего в релевантной логике никак не расширяет класса приемлемых утверждений о следовании.

чивает нахождение формулы $B \to C$ на втором этаже каждого достижимого мира, где верифицируется A, но при этом нет оснований считать, что на вторых этажах тех же достижимых миров, где верифицируется теперь уже B, имеется $A \to C$. Из объяснения, однако, не ясно, почему в случае импликативного вида формулы B указанная ситуация место все-таки имеет.

Представляется интуитивно ясным, что порядок условий, вызывающих некоторый результат, может иметь значение только тогда, когда выполнение одного из условий раньше другого изменяет характер этого другого с точки зрения оснований его верификации, будь она осуществлена при отсутствии первого условия. Именно это и имеет место в случае, когда одно из двух условий, которые мы потенциально могли бы поменять местами, само имеет вид импликации.

Действительно, давайте рассмотрим условия истинности двух формул:

$$(A \to B) \to .C \to D \quad (1) \quad \text{и} \quad C \to .(A \to B) \to D\ (2)$$

в некотором мире w_i. Антецедент формулы (1) верифицируется в w_i, когда $A \to B$ истинно *во всех* достижимых из w_i мирах. Поэтому вопрос о верифицируемости консеквента $C \to D$ этой формулы также решается относительно всех достижимых из w_i миров. Таким образом, импликация $A \to B$, оказавшись первым антецедентом в (1), не изменяет оснований верификации второго антецедента, каковым является формула C. В формуле (2) при истинности C в мире w_i вопрос об истинности в этом мире $(A \to B) \to D$ будет решаться при предположении, что $A \to B$ верифицируется *во всех тех достижимых мирах, в которых истинно* C. И если C – высказывание контингентное и в силу этого, возможно, истинное лишь в некоторых достижимых мирах, то основания верификации $A \rightarrow B$ сравнительно с теми, какими они были в (1), очевидно, существенно меняются. В (2) они оказываются более слабыми, а само высказывание (2) является поэтому логически более сильным, чем высказывание (1). Таким образом, формулы (1) и (2) не эквивалентны, и первая следует из второй, но не наоборот.

Чтобы получить семантическое оправдание принципа перестановочности импликации в общем случае, необходимо устранить семантическое различие между импликативными и неимпликативными формулами. То различие, которое мы только что описали, можно было бы ликвидировать, принимая утверждение, что любое высказывание A, истинное в мире w_i, является истинным во все достижимых из w_i мирах. Это отнюдь не означает, что A признается необходимым как истинное во всех достижимых мирах. Напротив, меняется класс достижимых миров, и к ним относятся только те, где верно A.

Таким путем мы, однако, не устраним структурных различий между импликативными и неимпликативными формулами, тогда как именно это, а отнюдь не отмеченное семантическое различие позволяет применять принцип перестановочности к первым, но не ко вторым. Продемонстрируем, почему в E оказывается доказуемой

$$(A \rightarrow .(B_1 \rightarrow B_2) \rightarrow C) \rightarrow .(B_1 \rightarrow B_2) \rightarrow .A \rightarrow C \ (3),$$

но не

$$(A \rightarrow .B \rightarrow C) \rightarrow .(B \rightarrow .A \rightarrow C) \ (4).$$

Частный подстановочный случай принципа транзитивности делает верным для всякой импликации $B_1 \rightarrow B_2$ утверждение

$$(B_1 \to B_2) \to .(B_1 \to B_1) \to (B_1 \to B_2) \ (5),$$

откуда опять по транзитивности имеем

$$(B_1 \to B_2) \to .(B_1 \to B_2) \to C \to .(B_1 \to B_1) \to C \ (6).$$

Из (6), устраняя $(B_1 \to B_1)$ в $(B_1 \to B_1) \to C$, получаем

$$(B_1 \to B_2) \to .(B_1 \to B_2) \to C \to C \ (7).$$

Мы имеем, таким образом, аналог закона утверждения консеквента

$$B \to .B \to C \to C \ (8),$$

для случая, когда B импликация. Приводимая далее последовательность теорем, где (9) получается из (8), а (10) и (11) являются подстановками в (9), доказывает формулу (3):

$B \to .(A \to (B \to C)) \to A \to C$ (9)

$(A \to (B \to C)) \to .(B \to .(A \to (B \to C)) \to A \to C) \to (B \to A \to C)$ (10)

$(9) \to . (10) \to (3)$ (11)

Доказуемость (3) связана с возможностью получить (5). И эта возможность, очевидно, связана исключительно с тем, что импликация позволяет за счет фиктивной транзитивности получить как следствие то, что она следует из закона рефлексивности. Принцип перестановочности импликации без ограничений был бы доказуем в случае принятия $A \to .(A \to A) \to A$.

По этой причине семантику условной связки "$\Rightarrow$", которую описывает исчисление R, можно получить за счет добавления к семантике для E дополнительного пункта, позволяющего считать, что во всяком универсуме рассуждений w_i, в котором верифицируется формула A, верифицируется формула $A \Rightarrow B \Rightarrow B$. Или формально:

$$T(A)/w_i \supset T(A \Rightarrow B \Rightarrow B)/w_i \ (1),$$

что равносильно утверждению $\models A \Rightarrow A \Rightarrow B \Rightarrow B$.

При этом было бы трудно избежать упрека в том, что это не что иное, как *ad hoc* условие. Кроме того, надо также иметь в виду, что включение в класс истинных утверждений нашей семантики такого утверждения, как (1), влечет ряд последствий, нуждающихся в оправдании. Вообще это утверждение является объектом пристального интереса и критики, и заслуживает специального внимания.

Прежде всего мы должны обратить внимание на то, что консеквент этого утверждения говорит о том, что при истинности A в мире w_i формула $(A \Rightarrow B) \Rightarrow B$ верифицируется во всяком достижимом из w_i мире. Это как бы предполагает, что во всяком таком мире должно верифицироваться A. Иначе совершенно непонятно, на каком таком основании условное высказывание $A \Rightarrow B$ могло бы влечь B[54]. Такое

---

[54] В обычном языке утверждения вида $A \Rightarrow B \Rightarrow B$ довольно часто используют, чтобы указать на то, что имеет место A. Так, например, коль скоро говорится, что из утверждения "*Если спортсмен станет олимпийским чемпионом , то он получит 50 тысяч долларов*" следует, что "*Спортсмен получит 50 тысяч долларов*", то это может пониматься только таким образом, что спортсмен стал олимпийским чемпионом. Может быть, в таком случае следовало бы $A \Rightarrow B \Rightarrow B$ и A считать вообще эквивалентными? Это, конечно, не так. Во-первых, является достаточно обычным использовать утверждения о верности некоторой импликации, чтобы тем самым сказать о наличии недостающих в антецеденте условий. Если мы, скажем, заявляем, что из того, что *Все люди смертны* следует, что *Сократ смертен*, то мы тем самым утверждаем, что *Сократ – человек*. Во-вторых, у $A \Rightarrow B \Rightarrow B$ есть подстановочный случай, верный по прямо противоположным основаниям. Речь идет о логически истинном утверждении $A \Rightarrow \neg A \Rightarrow \neg A$, которое говорит, что когда высказывание влечет собственное отрицание, оно ложно. Конечно, в естественных рассуждениях $A \Rightarrow B \Rightarrow B$ и $A \Rightarrow \neg A \Rightarrow \neg A$ легко различаются, но в формальной системе названная эквивалентность немедленно привела бы к противоречию.

положение можно было бы оправдать, будь A семантически истинным. Но оно берется совершенно произвольно. Таким образом, всякое A оказывается как бы необходимым, тем более, что у (1) есть такой подстановочный частный случай, как

$$T(A)/w_i \supset T((A \Rightarrow A) \Rightarrow A)/w_i \ (2).$$

И это последнее утверждение выглядит таким образом, что верность любого произвольного A в некотором мире достаточна, чтобы во всех достижимых мирах его можно было рассматривать как следствие из очевидного логического закона. Подобное понимание утверждений (1) и (2) нередко влечет негативное отношение к исчислению R и его модальным расширениям (см., например, [8]).

Я предлагаю здесь принципиально иное толкование этих утверждений. Оно связано с определенным пониманием отношения достижимости. Данное отношение очень различно в семантиках для E и для R. Так в семантике для E мы имели дело с неким, так сказать, абсолютным отношением достижимости, которое разбивало все множество универсумов рассуждений на соответствующие пары таким образом, что у всякого w_i имелось всегда одно свое точно очерченное и неизменное множество достижимых миров. И всякий мир из W всегда либо принадлежал, либо не принадлежал к этому множеству. В семантике для R отношение достижимости носит совсем иной характер. Оно релятивизировано относительно самих верифицируемых высказываний и является контекстуально обусловленным. В E описывается необходимая импликация, и поэтому в ее семантике достижимые миры это те, которые сохраняют верность всех необходимых высказываний.

Когда же мы говорим о достижимых мирах при верификации обычной условной связки, которую описывает исчисление *R*, то в число таковых попадают только те из миров, в которых сохраняют свою верность также и некоторые, пусть и не являющиеся необходимыми, но явно или неявно предполагаемые верными высказывания. Условное высказывание в случае своей верности описывает допустимую ситуацию, возможное положение дел и тем самым ограничивает число возможных достижимых миров. Так, скажем, из предполагаемой истинности высказывания: "Если сумма цифр данного числа делится на 3, то данное число делится на 30" – с очевидностью следует, что речь идет о числе, которое оканчивается на 0. И это соответствующим образом детерминирует множество возможных миров, которые относятся к достижимым.

Мы имеем дело, таким образом, с двумя различными отношениями достижимости, одно из которых (в семантике для *E*) мы будем именовать отношением *N–достижимости*, а второе (в семантике для *NR*) отношением *C–достижимости*. Это второе является подотношением первого. Вне какого-либо контекста множество достижимых миров в обоих случаях одно и то же. Контекст может сузить множество *C–достижимых* миров, и, возможно, терминологически более оправданным было бы говорить в этом случае не о *достижимых*, а скорее о *допустимых* мирах. Вместе с тем никакой контекст не влияет на множество *N*–достижимых миров, которое всегда остается тем же самым. Указанная разница между обсуждаемыми отношениями особенно видна, когда верифицируются итерированные импликативные высказывания вида $A \rightarrow .B \rightarrow C$ и $A \Rightarrow .B \Rightarrow C$. При верификации консеквента $B \rightarrow C$ первого из них в числе достижимых остаются все те же миры, что и при верификации всего высказывания. В то время, как при верификации консеквента $B \Rightarrow C$ второго высказывания в число допустимых попадают лишь те миры, в которых верифицируется A. Высказывание $A \Rightarrow .B \Rightarrow C$ будет истинно поэтому только при условии, что в каждом мире, где верно B, оказывается верным $A \Rightarrow C$. Иначе говоря, порядок, в котором встречаются условия, обеспечивающие верность консеквента, не имеют значения.

Более полно различия между отношениями N–достижимости и R–достижимости будут раскрыты, когда ниже будет предложена семантика исчисления NR, в которой будут фигурировать одновременно оба этих отношения.

Чтобы закончить с содержательным обсуждением утверждений (1) и (2), заметим еще раз, что верность консеквентов этих утверждений действительно предполагает, что A верифицируется в каждом достижимом из w_l мире, но отнюдь не в силу каких-то свойств A, а только потому, что достижимыми (допустимыми) мирами оказываются исключительно те, где A верно[55]. При этом

(1) $T(A)/w_l \supset T(A \Rightarrow B \Rightarrow B)/w_l$ и

(2) $T(A)/w_l \supset T((A \Rightarrow A) \Rightarrow A)/w_l$

являются верными и в том возможном случае, когда соответственно $A \Rightarrow B$ и $A \Rightarrow A$ не верифицируются ни в одном из достижимых миров. Заметим также, что утверждение

---

[55] Здесь можно провести некоторую аналогию. Представьте, что некто утверждает, что его идеи разделяют все прогрессивные и умные люди. Вы можете считать глупостью и сами эти идеи, и тем более приведенное заявление. Однако опровергнуть автора последнего невозможно, ибо он может считать себя правым уже просто потому, что людей, не разделяющих его идей, он к прогрессивным и умным не относит.

$(A \Rightarrow .(A \Rightarrow A) \Rightarrow A)$ не придает A никакого особого логического статуса. И оно, и утверждение $(A \Rightarrow .(A \Rightarrow B) \Rightarrow B)$, говорят о свойствах A нисколько не больше, чем верные в силу MP принципы $A(A \Rightarrow A) \Rightarrow A$ и $A(A \Rightarrow B) \Rightarrow B$.

Вообще, мне представляется, что от некоторой интуитивной неудовлетворенности по отношению к принципу

$$A \Rightarrow .(A \Rightarrow B) \Rightarrow B$$

можно избавиться, прочтя его так:

Предположим имеет место А. Тогда если А влечет В, то имеет место В.

При этом ясно, что следует считать A все время истинным не потому, что оно необходимо или даже вообще истинно, но просто по предположению. И кроме того, в случае реальной истинности A и, стало быть, также и $(A \Rightarrow B) \Rightarrow B$, это последнее даже в случае теоретического характера $(A \Rightarrow B)$ не надо трактовать как утверждение о том, что B есть следствие теории, но только как теоретическое (*если эта теория принимается*) следствие из A. Говорим же мы, что из $\neg\neg A$ в классической логике следует A. Причем с этим утверждением согласится и представитель интуиционистской логики, в рамках которой, конечно, совершенно неприемлемо утверждение о том, что из $\neg\neg A$ логически следует A. Отсюда, кстати, видно, что обсуждаемый принцип говорит нечто большее, чем утверждение $A \Rightarrow B \Rightarrow A \Rightarrow B$, из которого он получается перестановкой.

8. Семантика исчисления R

Обратимся теперь непосредственно к задаче построения семантики для исчисления R. Будем решать эту задачу путем соответствующей адаптации семантики S^{ea}, построенной для E. Первое, с чего мы начнем, это примем все пункты определения (1)–(7) определения $D1$, а также замыкания ($Cl1$) и ($Cl2$), заменив в них одинарную стрелку " $\rightarrow$" двойной стрелкой " $\Rightarrow$".

Такая замена является чисто технической и, естественно, ничего не меняет в семантике. Нужной адаптации семантики S^{ea} мы в принципе можем добиться, только принимая некоторые специальные условия, без которых не может быть оправдано никакое утверждение вида $\models A \Rightarrow .B \Rightarrow C$, где A – контингентное высказывание. Пока эта семантика может перерабатывать в импликативные утверждения только сами импликативные утверждения. И это понятно: только такие высказывания говорят нечто о связи между первым и вторым этажами некоторого мира, и если в антецеденте о такой связи ничего не сказано, то в консеквенте информации о такой связи просто неоткуда почерпнуть.

Мы уже говорили выше, что семантика немодальной условной связки, какой является "$\Rightarrow$", должна устранить семантические различия между условным и обычным высказываниями. Причем речь идет о тех семантических различиях, которые вызываются их структурным различием. Мы видели также, что одним из способов решить эту задачу может быть принятие любого из утверждений:

$$T(A)/w_i \supset T(A \Rightarrow A \Rightarrow A)/w_i \text{ или } T(A)/w_i \supset T(A \Rightarrow B \Rightarrow B)/w_i.$$

Мы поступим здесь по-иному, дополнив имеющуюся у нас семантику S^{ea}, адаптированную для E, таким замыканием возможных миров W, которое явным образом будет устранять последствия структурных различий между импликативными и неимпликативными высказываниями.

Семантику S^{ea} для исчисления R мы получаем, таким образом, из соответствующей семантики для E за счет изменений в определении $D1$, осуществляемых за счет принятия следующего определения:

Определение D3*. Формулы языка исчисления R верифицируются в мире* w_i *исключительно в соответствии с определением D1 и замыканиями* (*Cl1*) и (*Cl2*), *в формулировках которых одинарная стрелка " $\rightarrow$" заменяется двойной стрелкой " $\Rightarrow$", и кроме того выполняется дополнительное требование, обозначаемое* (*EQcl*):

(***EQcl***) *Для любой формулы A существует такая импликативная формула* $A_1 \Rightarrow A_2$, *что A верифицируется или фальсифицируется в некотором достижимом мире* w_i , *если и только если в этом мире соответственно верифицируется или фальсифицируется* $A_1 \Rightarrow A_2$.

Иными словами, (*EQcl*) утверждает, что для любого высказывания, в том числе контингентного, имеется семантически эквивалентная ему импликация. Ничего противоестественного в таком подходе нет, так как, вообще говоря, любое высказывание может быть представлено в виде эквивалентного ему условного. Возьмите любое чисто эмпирическое высказывание, например, "*Карцев любит раков*". То же самое можно высказать так: "*Если этот человек – Карцев, то он любит раков*". Можно и более формально: "*Если* (*x* = *Карцев*), *то Любит раков*(*x*)". В принципе, вместо принятого (Cl4) можно было бы принять дающее тот же эффект утверждение:

(Cl4*) Если для всякого D:
$T(D \Rightarrow A)/w_i \supset T(D \Rightarrow B \Rightarrow .D \Rightarrow C)/w_i)$, то $T(A)/w_i \supset T(B \Rightarrow C)/w_i$.

Смысл (Cl4*) достаточно прозрачен. Допустим, что имеет место случай, когда для любого D утверждение $T(D \Rightarrow A)/w_i \supset T(D \Rightarrow B \Rightarrow .D \Rightarrow C)/w_i)$ является справедливым, а детерминирующее его предложение $T(A)/w_i \supset T(B \Rightarrow C)/w_i)$ не верно. При произвольном D такое положение возможно лишь в силу того, что в первом, в отличие от второго, фигурируют импликативные формулы. В силу (Cl4*) структурное различие между импликативными и неимпликативными предложениями утрачивает семантические последствия. А это именно то, что нужно для адаптации семантики S^{ea} к исчислению R.

Определение семантически истинной формулы также корректируется соответствующим образом:

Определение D4*. Некоторая формула B называется семантически истинной в семантике* S^{ea} *(символически:* $\models B$*), если и только если во всяком мире* w_i*, в котором верифицируется* $B \Rightarrow B$*, верифицируется B. Или формально*:

$$\models B =_{df} \forall w_i (T(B \Rightarrow B)/w_i \supset T(B)/w_i).$$

Имеет место лемма:

(***LM1***) *Если* $\forall w_i (T(A \Rightarrow A)/w_i \supset T(B)/w_i$, *то* $\models B$.

Доказательство (*LM1*) аналогично данному ранее доказательству Леммы 1.

Имеет силу также соответствующий аналог Леммы 2:
(**LM2**) Если $\forall w_i (T(A)/w_i \supset T(B)/w_i)$, то $\models A \Rightarrow B$.
Нам потребуется также лемма:

(LM3) Пусть G есть семантически истинная формула, в которую входит формула D, имеющая вид $D_1 \Rightarrow D_2$, и пусть G остается семантически истинной при замене всех вхождений в нее D любой другой импликативной формулой $C_1 \Rightarrow C_2$. Тогда семантически истинной является также любая формула G^1, которая получается из G заменой всех вхождений D любой произвольно взятой формулой B.

Доказательство (*LM3*) немедленно вытекает из (*EQcl*), так как любой произвольной формуле B соответствует некоторая семантически эквивалентная импликация.

Можно показать теперь, что все теоремы исчисления R являются семантически истинными в смысле определения $D4$.

Метатеорема МТ4. *Если формула B есть теорема системы R, то $\models B$ в семантике S^{ed} языка исчисления R..*

Учитывая, что произведенные в семантике, построенной для E, изменения сохраняют семантическую истинность аксиом $A1$–$A15$ исчисления R, а также свойство правил вывода R оставлять такую истинность в силе, для доказательства $MT4$ остается установить семантическую истинность аксиомы

$$A16.\ (A \Rightarrow .B \Rightarrow C) \Rightarrow .B \Rightarrow .A \Rightarrow C.$$

Так как все аналоги теорем системы E являются семантически истинными, имеем для соответствующей E-теоремы:

$$\models (A \Rightarrow .(D_1 \Rightarrow D_2) \Rightarrow C) \Rightarrow .(D_1 \Rightarrow D_2) \Rightarrow .A \Rightarrow C,$$

где вхождения $D_1 \Rightarrow D_2$ можно заменить любой произвольной (одинаковой) импликацией, сохраняя семантическую истинность формулы в силе. Из этого и $LM3$ вытекает семантическая истинность аксиомы A16.

Метатеорема MT5. *Если* $\models B$ *в семантике* S^{ca} *для языка исчисления* R, *то формула* B *доказуема в* R (*теорема полноты*).

Чтобы доказать справедливость МТ5, нам достаточно показать, что внесенное в семантику S^{ca} для E изменение, связанное с замыканием (*EQcl*), сохраняет для R свойство теоремности. Так как (*EQcl*) сводится к предположению существования для произвольной формулы A семантически эквивалентной ей импликативной формулы, то нам достаточно сказать, что это соответствует исчислению R, так как в нем имеет силу эквивалентность формул A и $A \Rightarrow A \Rightarrow A$. *MT5* доказана.

Из *MT4* и *MT5* следует:

Метатеорема MT6. *Формула* B *является теоремой системы* R, *если и только если* $\models B$ *в семантике* S^{ca} *для языка исчисления* R.

9. Семантика исчисления NR

Переходим к построению семантики S^{ea} для модального расширения R, известного как NR. Чтобы не утруждать читателя ссылками на предыдущие определения и результаты, семантика для исчисления NR будет строиться хотя и не так подробно, но достаточно независимо от уже изложенного материала.

Исчисление NR получается из R добавлением четырех модальных аксиом и одного дополнительного правила вывода.

Аксиомы NR:

A1. $(A \Rightarrow A)(B \Rightarrow B) \Rightarrow C \Rightarrow C$

A2. $A \Rightarrow B \Rightarrow .B \Rightarrow C \Rightarrow .A \Rightarrow C$

A3. $A \Rightarrow B \Rightarrow .C \Rightarrow A \Rightarrow .C \Rightarrow B$

A4. $(A \Rightarrow .A \Rightarrow B) \Rightarrow A \Rightarrow B$

A5. $AB \Rightarrow A$

A6. $AB \Rightarrow B$

A7. $(A \Rightarrow B)(A \Rightarrow C) \Rightarrow .A \Rightarrow BC$

A8. $A \Rightarrow A \vee B$

A9. $B \Rightarrow A \vee B$

A10. $(A \Rightarrow C)(B \Rightarrow C) \Rightarrow .A \vee B \Rightarrow C$

A11. $A(B \vee C) \Rightarrow AB \vee C$

A12. $A \Rightarrow B \Rightarrow .\neg B \Rightarrow \neg A$

A13. $A \neg B \Rightarrow \neg(A \Rightarrow B)$

A14. $A \Rightarrow \neg\neg A$

A15. $\neg\neg A \Rightarrow A$

$A16. (A \Rightarrow .B \Rightarrow C) \Rightarrow .B \Rightarrow .A \Rightarrow C$

A17. $NA \Rightarrow A$

A18. $NA \Rightarrow NNA$

A19. $NANB\ N(AB)$

A20. $N(A \Rightarrow B) \Rightarrow .NA \Rightarrow NB$

Правила вывода NR:

R1. Из $A \Rightarrow B$ и A следует B (Modus ponens: MP).

R2. Из A и B следует AB (*Правило адъюнкции*).

R3. Из A следует NA (*Правило Геделя*).

Выражение $A \rightarrow B$ понимается в NR как сокращение для $N(A \Rightarrow B)$. Оператор возможности M определяется через оператор необходимости N обычным образом:

$$MA = \neg N \neg A.$$

Как $E(A)$ будем обозначать формулу, которая получается из A заменой всех вхождений знака "$\Rightarrow$" на знак "$\rightarrow$". Указанную формулу будем называть *E-преобразованием* формулы A.

Семантика S^{ca} для NR может быть сформулирована за счет преобразований соответствующей семантики для R. Однако чтобы не отсылать читателя к последней, тем более, что сама она получена со ссылками на соответствующую семантику для E, мы сформулируем семантика S^{ca} для NR с самого начала.

Модельная структура представляет собой тройку $<W, R^C, R^N>$, где W есть бесконечное множество универсумов рассуждений (миров) $w_1, w_2, \ldots$, каждый w_i из которых в свою очередь представляет собой упорядоченную пару $<w_i^a, w_i^c>$. Первый член этой пары, или атомарный мир, есть список пропозициональных переменных или их отрицаний. Требование полноты к атомарным мирам не предъявляется. Такой мир может быть пустым. Вводится требование непротиворечивости атомарных миров: никакая пропозициональная переменная a не может входить ни в какой мир w_i^a одновременно со своим отрицанием.

Второй член пары, w_i^e – мир следствий, есть множество формул принятого языка, в нашем случае языка NR.

R^C и R^N являются бинарными рефлексивными и транзитивными отношениями достижимости на W. При этом выражения Rw_iw_j и $Rw_i^aw_j^a$, где R есть R^C или R^N, рассматриваются как идентичные. R^C является подношением R^N в том смысле, что $\forall w_i \forall w_j (R^C w_iw_j \supset R^N w_iw_j)$.

К множеству формул, составляющих вторые этажи, предъявпяется ряд требований. В частности, как и ранее, сохраняются требования конъюнктивной и композиционной замкнутости, согласно которым если A и B – элементы этого множества, то конъюнкция AB также является его элементом. И если $(C \Rightarrow A)$ и $(C \Rightarrow B)$ – элементы такого множества, то к числу его элементов принадлежит $(C \Rightarrow AB)$. Формально:

(***CL1***) $\forall w_j ((A \in w_j^e) \& (B \in w_j^e) \supset (AB \in w_j^e))$.

(***CL2***) $\forall w_j (((C \Rightarrow A) \in w_j^e) \& (C \Rightarrow B) \in w_j^e) \supset (C \Rightarrow AB) \in w_j^e)$.

В семантике для NR к миру следствий w_i^e предъявляется также несколько новых требований:

(***CL3***) $\forall w_i (\forall w_j (R^N w_i w_j \supset ((B \in w_j^e)) \supset (NB \in w_j^e)))$.

Иными словами, если на вторых этажах всех N-достижимых из w_i миров w_j имеется формула B, то на втором этаже мира w_i, а значит, на тех же этажах всех достижимых из него миров имеется NB.

($\boldsymbol{CL4}$) $\forall w_j(\exists w_j(R^n w_i w_j \ \&(B \in w_j^e)) \supset (\forall w_k(R^n w_i w_k \supset \supset (\neg N \neg B \in w_k^e))))$.

Если хотя бы в одном из N-достижимых из w_i миров на втором этаже есть B, то на вторых этажах всех этих миров, включая w_i, есть $\neg N \neg B$, или, что то же самое, MB.

($\boldsymbol{CL5}$) $\forall w_j(\neg(C \Rightarrow B) \in w_j^e) \supset \neg(C \Rightarrow NB) \in w_j^e))$.

Согласно последнему замыканию при существовании на втором этаже мира формулы, являющейся отрицанием импликации, там должна быть формула, отрицающая более сильную импликацию с оператором необходимости перед ее консеквентом.

Мы используем выражения $T(A)/w_i$ и $F(A)/w_i$ для утверждений о верифицируемости и соответственно о фальсифицируемости формулы A в мире w_i. Как и ранее будут справедливыми также следующие соотношения:

$$T(A)/w_i = F(\neg A)/w_i \text{ и } T(\neg A)/w_i = F(A)/w_i.$$

Определение D5: В мире w_i формулы верифицируются исключительно в соответствии со следующими условиями:

(1) Если A – пропозициональная переменная или ее отрицание и А входит в список w_i^a, то $T(A)/w_i$.

(2) $T(AB)/w_i$, если и только если $T(A)/w_i$ *и* $T(B)/w_i$.

(3) $T(A \vee B)/w_i$, если и только если $T(A)/w_i$ или $T(B)/w_i$.

(4) $T(\neg(A \vee B))/w_i$, если и только если $T(\neg A)/w_i$ и $T(\neg B)/w_i$.

(5) $T(\neg(AB))/w_i$, если и только если $T(\neg A)/w_i$ или $T(\neg B)/w_i$.

(6) $T(\neg(A \Rightarrow B))/w_i$, если и только если $\exists w_j R^c w_i w_j \ \& T(A)/w_j \ \& \ F(B)/w_j$.

(7) $T(NA)/w_i$, если и только если $\forall w_j (R^n w_i w_j \supset T(A)/w_j)$.

(8) $T(\neg NA)/w_i$, если и только если $\exists w_j (R^n w_i w_j \ \& \ T(\neg A)/w_j)$.

Список условий верификации формул закончим после принятия дополнительных подопределений, которые рассматриваются как составная часть определения $D5$.

(***S1D5***) *Некоторый мир* w_i *называется* ***потенциально противоречивым*** *и обозначается* $(w_i \in PC)$, *если и только если существует такая формула вида* $\neg N(A \Rightarrow A)$, *которая верифицируется в* w_i. Формально:

$$(w_i \in PC) =_{df} \exists A T(\neg N(A \Rightarrow A))/w_i = \exists A F(N(A \Rightarrow A))/w_i.$$

Из $S1D5$ и условий верификации оператора необходимости видно, что любой мир, в котором верифицируется $\neg(A \Rightarrow A)$, также является потенциально противоречивым.

Следующее подопределение $S2D5$ вводит *внеязыковую* бинарную связку "$\Rightarrow$", которую мы называем *квазиимпликацией*. Понятие правильно построенной формулы при этом не изменяется, так как знак квазиимпликации к нашему объектному языку не относится и в формулу объектного языка входить не может.

$$(S2D5)\ (A \Rightarrow B)/w_i =_{df} \forall w_j (R^C w_i w_j \supset (T(A)/w_j \supset T(B)/w_j \&(B \in w_j^c))\&$$
$$\&(T(\neg B)/w_j \supset (T(\neg A)/w_j \&(\neg A \in w_j^c))\&T(\neg A \vee B)/w_j \&$$
$$\&\forall w_k((T(\neg A)/w_k \supset (w_k \in PC)) \supset T(B)/w_j)\&$$
$$\&\ \forall w_k(T(B)/w_k \supset (w_k \in PC)) \supset T(\neg A)/w_j))).$$

Таким образом, выражение $(A \Rightarrow B)$ имеет силу в мире w_i, если и только если во всяком C-достижимом из w_i мире w_j выполняются следующие пять условий:

(1) $(T(A)/w_j \supset T(B)/w_j \&(B \in w_j^c))$

(2) $(T(\neg B)/w_j \supset (T(\neg A)/w_j \&(\neg A \in w_j^c))$

(3) $T(\neg A \vee B)/w_j$

(4) $\forall w_k((T(\neg A)/w_k \supset (w_k \in PC)) \supset T(B)/w_j)$

(5) $\forall w_k(T(B)/w_k \supset (w_k \in PC)) \supset T(\neg A)/w_j))$.

Первое условие требует, чтобы во всяком достижимом мире, в котором верифицируется A, формула B также была истинна и при этом B к тому же находился на его (этого мира) втором этаже w_j^c. Согласно второму условию то же самое имеет место в отношении формул $\neg B$ и $\neg A$: во всяком достижимом из w_i мире w_j, в котором верифицируется $\neg B$, формула $\neg A$ также истинна и входит в w_j^c. Третье условие предполагает, что в каждом достижимом w_j верно $\neg A \vee B$.

Условие (4) дает возможным признать верной в w_j формулу B для случая, когда $T(\neg A \vee B)/w_j$ является верным в силу верифицируемости в w_j формулы $\neg A$ при том, что последняя имеет вид, например, $\neg(C \rightarrow C)$, так как последняя согласно $S1D5$ может верифицироваться только в потенциально противоречивом мире. (5) распространяет последнее требование на случай, когда место $\neg A$ при указанных обстоятельствах занимает B.

Выражения ($A \Rightarrow B$) и ($\neg B \Rightarrow \neg A$) в силу $S2D5$ являются эквивалентными.

Мы можем теперь закончить формулировку условий истинности формул нашего языка:

(9) $T(A \Rightarrow B)/w_i = T(\neg B \Rightarrow \neg A)/w_i = \forall C((C \Rightarrow A) \Rightarrow (C \Rightarrow B))/w_i)$,

если и только если

$(A \Rightarrow B)/w_i \& \forall C \forall w_j(R^c w_i w_j \supset (T(\neg(C \Rightarrow B))/w_j \supset \neg(C \Rightarrow A) \in w_j^c))$[56].

[56] Если в определяемую часть пункта (9) вставить наряду с $\forall C((C \Rightarrow A) \Rightarrow (C \Rightarrow B))/w_i)$ также и $\forall C((C \rightarrow A) \Rightarrow (C \rightarrow B))/w_i)$, то сформулированные выше замыкания верхних этажей CL3 - CL5 можно опустить. Данные ограничения принимаются исключительно для того, чтобы можно было доказать семантическую истинность аксиомы $N(A \Rightarrow B) \Rightarrow. NA \Rightarrow NB$. При указанном изменении определе-

Как и в случае семантики, которая строилась для R, имеет силу замыкание:

(***EQcl***) *Для любой формулы A существует такая импликативная формула $A_1 \Rightarrow A_2$, что A верифицируется или фальсифицируется в некотором достижимом мире w_i, если и только если в этом мире соответственно верифицируется или фальсифицируется $A_1 \Rightarrow A_2$.*

Иными словами, (*EQcl*) утверждает, что для любого высказывания, в том числе контингентного, имеется семантически эквивалентная ему импликация.

Определение условий верификации формул языка исчисления NR завершено. По существу, условия семантики для исчисления R дополнены только двумя новыми пунктами: (7) и (8), которые вводят условия верификации оператора необходимости стандартным для реляционных семантик образом.

Докажем две метатеоремы: о семантической истинности доказуемых в исчислении NR формул и о семантической полноте этого исчисления.

Как и ранее, поскольку никакая формула принципиально не может верифицироваться во всех мирах, принимается следующее определение семантической истинности формул NR:

Определение D6. $\models B =_{df} \forall w_i(T(B \Rightarrow B)/w_i \supset T(B)/w_i$.

Сделаем в связи с данным определением некоторые замечания. Во-первых, так как речь в нем идет обо всех мирах, не имеет значения, берется ли в определяющей части двойная или же одинарная стрелка. И во-вторых, для уста-

---

ния мы будем иметь $N(A \Rightarrow B) \Rightarrow .(A \rightarrow A \rightarrow A) \Rightarrow (B \rightarrow B \rightarrow B)$, где$(A \rightarrow A \rightarrow A) \Rightarrow (B \rightarrow B \rightarrow B)$ равносильно $NA \Rightarrow NB$.

новления семантической истинности импликативной формулы, будь то $A \Rightarrow B$ или $A \rightarrow B$ (напоминаем, что последнее по определению есть $N(A \Rightarrow B)$), как и в предыдущих случаях, достаточно показать, что во всяком мире, в котором верифицируется A, всегда верифицируется также и B[57]. Утверждения $\vDash A \Rightarrow B$ и $\vDash A \rightarrow B$ являются эквивалентными.

Метатеорема МТ7. Если формула B есть теорема системы NR, то $\vDash B$ в семантике S^{ca} для языка исчисления NR.

Доказательство. Очевидно, что все теоремы исчисления R в соответствии с $D5$ остаются семантически истинными. Для доказательства *МТ7* достаточно показать поэтому, что семантически истинными являются аксиомы A17-20, а *правило Геделя* сохраняет это свойство.

У нас имеет силу замыкание:

(***MPcl***) *Пусть Q – имеет вид конъюнкции $(A_1 \rightarrow B_1) \wedge \ldots \wedge (A_n \rightarrow B_n)$ $(n \geq 1)$, и для любого возможного мира w_i имеет место $\forall k(T(A_k)/w_i \supset T(B_k)/w_i)$ $(n \geq k \geq 1)$, тогда если формула $Q \Rightarrow C$ верифицируется в мире w_i, то в w_j верифицируется формула C.*

Для доказательства семантической истинности названных аксиом достаточно показать, что во всех мирах, в которых верифицируются их антецеденты, будут всегда верифицироваться и их консеквенты.

Тот факт, что аксиома $NA \Rightarrow A$ (A17) семантически истинна, очевиден: формула NA не может верифицироваться ни в каком мире, в котором не верифицируется A.

Семантическая истинность $NA \Rightarrow NNA$ (A18) при транзитивности отношения N–достижимости очевидна. Семантическая истинность $NANB \Rightarrow N(AB)$ (A19) непосредственно

---

[57] Объяснение этому факту дает Лемма 2.

вытекает из условий верификации оператора N и конъюнкции.

Наконец, доказательство семантической истинности аксиомы $N(A \Rightarrow B) \Rightarrow .NA \Rightarrow NB$ ($A20$) требует определенных усилий.

Мы должны показать, что во всяком мире w_i, в котором верифицируется $N(A \Rightarrow B)$, будет верифицироваться также $NA \Rightarrow NB$. Чтобы последняя импликация была верной, в соответствии с пунктом (9) из $D5$ требуется обосновать верность утверждений:

$$\text{(a) } (NA \Rightarrow NB)/w_i$$

и

$$\text{(b) } \forall C \forall w_j (R^C w_i w_j \supset (T(\neg(C \Rightarrow \neg NA))/w_j \supset \neg(C \Rightarrow \neg NB) \in w_j^{\,c})).$$

Для обоснования (a) надо доказать, что для любого достижимого из w_i мира w_j имеют силу пять утверждений:

(1) $(T(NA)/w_j \supset T(NB)/w_j \& (NB \in w_j^{\,c}))$

(2) $(T(\neg NB)/w_j \supset (T(\neg NA)/w_j \& (\neg NA \in w_j^{\,c}))$

(3) $T(\neg NA \vee NB)/w_j$

(4) $\forall w_k((T(\neg NA)/w_k \supset (w_k \in PC)) \supset T(NB)/w_j)$

(5) $\forall w_k(T(NB)/w_k \supset (w_k \in PC)) \supset T(\neg NA)/w_j))$.

Начнем с того, что верность $N(A \Rightarrow B)$ в некотором мире w_i обеспечивает в этом мире верность утверждения $N(NA \Rightarrow B)$, равносильного $(NA \rightarrow B)$. И это означает, что на вторых этажах $w_j^{\,c}$ всех N-достижимых из w_i миров w_j, в которых истинно NA, имеет место B. В силу замыкания $CL3$ на каждом таком этаже находится также NB. Так как при верности NA в w_i в каждом N-достижимом мире w_j будет верифицироваться B, можно утверждать, что в w_i будет верифицироваться NB. Таким образом, утверждение (1) доказано.

Если в w_i имеет силу $\neg NB$, то существует N–достижимый мир w_j, в котором верифицируется $\neg B$. В силу верности $\neg B \rightarrow \neg A$ на втором этаже этого мира имеется $\neg A$. В силу замыкания $CL4$ на вторых этажах всех достижимых из w_i миров имеется $\neg NA$. В силу верности $\neg A$ в одном из достижимых миров в мире w_i фальсифицируется NA. Из этого следует верность (2).

В w_i имеет силу $NA \rightarrow B$. Чтобы доказать утверждение (3), допустим противное, что существует некоторый N–достижимый мир w_j, в котором не верифицируются ни $\neg NA$, ни NB. Это означает, в частности, что существует N–достижимый из w_j мир w_k, в котором не верифицируются B. Но тогда в силу справедливости $T(\neg NA \vee B)/w_k$ для всякого N–достижимого мира в этом мире верифицируется $\neg NA$. Это противоречит нашему допущению, так как возможно только в том случае, когда $\neg NA$ верифицируется также и в w_j. Утверждение (3) $T(\neg NA \vee NB)/w_j$ доказано.

Из $T(NA \rightarrow B)/w_i$ следует, что в случае, когда $\neg NA$ верифицируется только в потенциально противоречивых мирах, тогда во всех N–достижимых мирах верифицируется B, а значит, NB, что говорит о верности утверждения (4).

Из $T(NA \rightarrow B)/w_i$ также следует, что в случае, когда B верифицируется только в потенциально противоречивых мирах, тогда во всех N–достижимых мирах верифицируется $\neg NA$. Так как NB верифицируется только в тех мирах, в которых верифицируется B, то имеет силу утверждение (5).

Для доказательства $T(NA \Rightarrow NB)/w_i$ при верности $T(N(A \Rightarrow B)/w_i$ остается убедиться в верности утверждения:

(b) $\forall C \forall w_j (R^c w_i w_j \supset (T(\neg(C \Rightarrow \neg NA))/w_j \supset \neg(C \Rightarrow \neg NB) \in w_j^c))$.

В силу $T(\neg B \rightarrow \neg NA)/w_i$, эквивалентного $T(NA \rightarrow B)/w_i$, имеем:

(b^1) $\forall C\ \forall w_j\,(R^c w_i w_j \supset (T(\neg(C \Rightarrow \neg NA))/w'_j \supset \neg(C \Rightarrow \neg B) \in w_j^c))$,
которое отличается от (b) тем, что на месте требуемого $\neg(C \Rightarrow \neg NB) \in w_j^c$ стоит $\neg(C \Rightarrow \neg B) \in w_j^c$. В силу замыкания $CL5$ каждый второй этаж w_j^c любого из миров w_j, для которого верно $\neg(C \Rightarrow \neg B) \in w_j^c$, содержит также формулу $\neg(C \Rightarrow \neg NB)$. Это доказывает (*b*) и завершает доказательство семантической истинности аксиомы A20.

Для окончания доказательства MT7 остается показать для правила $R3$, что при верности

$$T(A \Rightarrow A)/w_l \supset T(A)/w_l$$

с необходимостью будет верным

$$T(NA \Rightarrow NA)/w_l \supset T(NA)/w_l.$$

Справедливость последнего следует из легко получаемого в силу семантической истинности A утверждения

$$T(A \to A \to A \to A \to A \to A)/w_l \supset T(A \to A \to A)/w_l\,,$$

в котором в силу семантической эквивалентности формул $A \to A \to A$ и NA можно сделать соответствующую замену и получить требуемый результат.

Метатеорема MT8. Если $\models B$ в семантике S^{ea} для языка исчисления NR, то формула B доказуема в NR (*теорема полноты*).

Доказательство. Всякая семантически истинная формула A может быть получена из $A \to A$ в результате семантических преобразований, обусловленных принятой семантикой. Всякое такое преобразование оставляет любую теорему исчисления NR, к которой оно применено, теоремой этого исчисления[58]. И так как формула $A \to A$, с которой на-

---

[58] Анализ семантических преобразований, возможных в соответствии с конкретными пунктами определения D5, который дается при дока-

чинаются семантические преобразования, естественно является теоремой *NR*, этого достаточно для доказательства *MT8*. Из *MT7* и *MT8* вытекает

Метатеорема MT9. Формула *B* доказуема в *NR*, если и только если $\models B$ в семантике S^{ca} для языка исчисления *NR*.

Этим мы завершаем построение реляционной семантики S^{ca} для релевантных исчислений *E*, *R* и *NR*.

Семантика S^{ca} достаточно легко адаптируется к другим релевантным системам. Скажем, для так называемых минговых систем, которые получаются из *E* и *R* добавлением к ним аксиомных схем

$$A \rightarrow A \rightarrow A \quad \text{и} \quad A \Rightarrow .A \Rightarrow A$$

соответственно к семантикам для *E* и *R* достаточно добавить замыкания, согласно которым во всяком мире *w*, для любой верифицируемой в нем формулы *A* на втором этаже этого мира находятся все импликации вида $A \rightarrow A$ (для *E*) и $A \Rightarrow A$ (для *R*) и соглашение, что всякая находящаяся на втором этаже мира *w*, формула в этом мире верифицируется. Я не буду приводить здесь доказательства этих утверждений. Причем не только по причине достаточной их очевидности, но и потому, что не склонен относить минговые системы к релевантным. При этом под релевантностью я имею в виду в данном случае именно логическую уместность. Мне совершенно не понятны те основания, по которым предположение об истинности некоторого высказывания *A*[59] может

зательстве предшествующих метатеорем, сохраняет свою силу и в данном случае.

[59] Как впрочем и из утверждения о ложности *A*, так как в силу закона контрапозиции импликации верными в минговых

логически влечь утверждение о выводимости A из A. Тем более, что рассмотренная нами семантика показала, что закон $A \to A$ является самым сильным в логическом смысле утверждением, из которого все остальные могут быть получены за счет ослаблений, основанных на соглашениях о смысле соответствующих выражений используемого языка.

исчислениях являются также утверждения вида $\neg A \to . A \to A$ и $\neg A \Rightarrow . A \Rightarrow A$.

10. Взаимоотношения между системами E и NR

В свое время я достаточно подробно рассмотрел взаимоотношения между исчислениями E и NR на синтаксическом уровне[60]. Теперь мы можем рассмотреть эту проблему в семантическом плане. Сейчас уже общеизвестно, что импликация, описываемая в системе E, не есть то же самое, что и необходимая релевантная импликация в системе NR, как это считали многие исследователи в начале 70-х годов. Однако факт такого несовпадения до сих пор обычно констатируется лишь как следствие того, что удалось найти формулу

$$(A \to .B \to C)(B \to A \vee B) \to .(B \to C) \ (1),$$

которая имеет силу в NR, но не доказуема в E[61]. Нам бы хотелось здесь, во-первых, описать весь тот класс формул, которые могут быть доказаны в NR, но не в E, выявив при этом причины данного обстоятельства. И во-вторых, показать, что система E может быть усилена таким образом, что между описываемым в ней отношением следования и необходимой релевантной импликацией будет иметься полное совпадение.

Дело в том, что само наличие указанного несовпадения поставило под сомнение качество системы E как таковой. Не случайно в связи с обнаружением формулы (1) в абстрактах VII Международного конгресса по логике методоло-

---

[60] См. по этому поводу [7, с. 103-108, 138-147].

[61] Предположение об этом первым сделал, по-видимому, Г.Е. Минц, и указанную формулу достаточно долго называли формулой Минца. Строго данный факт был доказан Л.Л. Максимовой [15].

гии и философии науки появились тезисы сторонников релевантной логики Мейера, Роутли и Пламвуд под претенциозным названием "Прощай, интеилмент"[45], в которой ее авторы, как это видно из названия, так как именно интеилмент (entailment) описывает система E, подвергли ее резкой критике, выразив сомнение, что она вообще может претендовать на какое-либо приличное место в рамках решения проблемы формализации следования[62].

Итак, пусть A есть конъюнкция вида $B_l \wedge ... \wedge B_m$, где каждый B_l ($i \leq m$) имеет вид $C_{1l} \Rightarrow. ... \Rightarrow .C_{(n-1)l} \Rightarrow \neg C_{nl}$ ($n \leq 2$), где любое из C_{jl} ($j \leq n$) есть формула классической логики. Пусть далее A^+ есть любая из формул, которые получается путем любых перестановок любых формул C_{jl} и C_{kl} в любом B_l. Для большей строгости дальнейших рассуждений включим в класс формул, обозначаемых как A^+, также любую конъюнкцию $A^+ \wedge B_l^+$, где B_l^+ есть результат указанных перестановок в B_l, отличный от того, который входит в конъюнкцию A^+. Совершенно очевидно, что всякая формула A^+ в исчислении NR эквивалентна исходной формуле A, которая сама относится к числу формул A^+, а формулы $A^+ \Rightarrow A$ и $A^+ \rightarrow A$ всегда семантически истинны.

Представим теперь, что семантически истинной, а значит, доказуемой в NR, является формула $A \rightarrow B$, где A имеет описанный выше вид, а B есть либо формула классической

62 В абстрактах следующего VIII Конгресса я опубликовал тезисы [45], объяснил причины несовпадения E-импликации (интеилмент) и необходимой импликации в NR и показал, как оно может быть устранено. В связи с этой публикацией я позже получил письмо от Роутли, в котором он, в частности, без каких-либо разъяснений писал, что он и Пламвуд к работе "Прощай, интеилмент" отношения не имеют.

логики, либо импликация $C \Rightarrow D$ двух таких классических формул C и D. Дальнейшие рассуждения в том и другом случаях совпадают. Для удобства ограничимся рассмотрением только второго случая, когда B имеет вид указанной импликации классических формул, рассматривая первый как вырожденный случай второго. Тогда семантически истинной является также формула $E(A) \to E(B)$, где формула вида $E(A)$, называемая E-преобразованием формулы A, получается из A путем замены всех двойных стрелок на одинарные. Это следует из того, что $E(A)$ (при указанном виде A) семантически влечет A, и значит, мы имеем $E(A) \to B$, откуда следует $N(E(A) \to B)$, а значит, $NE(A) \to NB$, где $NE(A)$ семантически эквивалентно $E(A)$, а NB совпадает с $E(B)$.

Заметим теперь, что формула $E(A) \to E(B)$ записана в языке системы E, но будучи теоремой NR она совсем не обязательно окажется теоремой E. Это же относится, вообще говоря, к любой формуле $E(A^+) \to E(B)$, причем несмотря на то, что в NR, как и в E, формулы $E(A)$ и $E(A^+)$ в общем случае не являются эквивалентными. Имеется, таким образом, целый класс теорем системы NR вида $E(A) \to E(B)$, недоказуемых в E. Легко заметить, что приведенная выше формула (1), недоказуемость которой в свое время установили Минц Г.Е. и Максимова Л.Л., относится именно к этому классу.

Вместе с тем, если $E(A) \to E(B)$ есть теорема исчисления NR, недоказуемая в E, то всегда найдется семантически эквивалентная A формула A^+, такая, что семантическую истинность $E(A^+) \to E(B)$ можно будет обосновать, не используя принципа перестановочности импликации, так как необходимость в нем отпадает в силу того, что он может всегда быть применен при построении A^+. Такую формулу

$E(A^+) \to E(B)$ можно доказать в *NR* без использования аксиомы *A*16. Но это означает, что она будет теоремой *E*. Указанное обстоятельство дает возможность усилить систему *E* таким образом, чтобы устранить отмеченные расхождения между *E*-следованием и необходимой релевантной импликацией.

Приведем некоторые содержательные соображения в пользу оправданности решения самой этой задачи.

Допустим, мы используем в выводе систему *NR* и принимаем в качестве посылки формулу вида $E(A)$, например $E(D \Rightarrow .B \Rightarrow C)$ или, что то же самое, $D \to .B \to C$. При этом мы всегда получаем право использовать наряду с другими те возможности, которые предоставляет переход к семантически более слабой формуле *A*, в нашем случае к $D \Rightarrow .B \Rightarrow C$. Когда та же посылка $D \to .B \to C$ дается в рамках вывода в системе *E*, мы такого права оказываемся лишены.

В пользу принятия в системе *E* отсутствующих в ней, но доказуемых в *NR*, принципов говорит также тот факт, что обогащение языка этой системы за счет релевантной импликации из *R* при установлении между двумя импликациями соответствующей семантической субординации привело бы к принятию тех же принципов.

Определение D7*. Выражение вида* $Perm(A)$ *определяется в соответствии со следующими условиями. Пусть A есть конъюнкция вида* $B_1 \wedge \ldots \wedge B_m$, *где каждый* B_i $(i \geq m)$ *имеет вид*

$$C_{1i} \to . \ldots \to .C_{(n-1)i} \to \neg C_{ni} \ (n \geq 2),$$

где любое из C_{ji} $(j \geq n)$ *есть формула классической логики. Тогда* $Perm(A)$ *есть любая из формул, которые получаются путем любых перестановок любых формул* C_{ji} *и* C_{ki} *в любом*

B_1. Если формула A имеет вид, отличный от указанного, то $Perm(A)$ совпадает с A.

Будем обозначать как E_{NR} логическое исчисление, которое получается из системы E за счет добавления следующего правила вывода:

(δ) *Из $A \rightarrow B$, где B содержит не более одного, причем главного, вхождения знака "$\rightarrow$", следует любой подстановочный частный случай формулы $Perm(A) \rightarrow B$.*

В системе E_{NR} по причинам, которые мы объяснили выше, будет доказуема всякая формула языка E, которая доказуема в NR, и, естественно, наоборот, всякая теорема E_{NR} будет теоремой NR. В связи с этим является очевидной справедливость следующего утверждения:

Метатеорема МТ10. *Формула B языка E является теоремой E_{NR}, если и только если B является семантически истинной в семантике S^{ea} для NR.*

Обратим внимание на оригинальность и необычность семантики, предлагаемой для E_{NR}. Может показаться, что мы просто воспользовались уже имеющейся семантикой, построенной для NR. Дело, однако, принципиально в другом. Характер описываемой в E_{NR} импликации таков, что мы не можем задать условий ее верификации в семантике S^{ea} без использования более слабой (и не входящей в язык E_{NR}) R-импликации с ее собственными условиями такой верификации. Иными словами, нам все равно пришлось бы построить именно принятую здесь семантику, если бы даже исчислений R и NR, как и описываемой в них импликации, не существовало бы вообще. Принципиальная необычность данной семантики состоит в том, что для ее построения оказывается необходимым расширение языка, для которого семантика строится, за счет новых логических констант. В данном случае такое расширение осуществляется за счет введения *R*-импликации и оператора необходимости.

В [7] я рассмотрел достаточно большое множество уместных расширений практически всех релевантных систем. Проблема адаптации к ним предложенной здесь семантики остается открытой в том смысле, что я просто ее пока не рассматривал. В равной мере это относится и к неклассическим расширениям релевантных систем, рассмотренных мной в [14].

11. Семантика S^{ca} и паранепротиворечивость релевантных систем

Я показал в свое время [14, 26], что система E [2] может быть непротиворечиво расширена за счет классически неприемлемых принципов, включая отрицания теорем классической логики. Было показано, в частности, что к E можно добавить аксиому:

$$\neg(A \vee \neg A \rightarrow (B \rightarrow C)) \ (1).$$

Очевидно, утверждение (1) может быть заменено эквивалентным ему

$$\neg(\neg(B \rightarrow C) \rightarrow A \neg A)) \ (2).$$

Фигурально говоря, система E является дважды паранепротиворечивой, так как не только не позволяет получать произвольных следствий из противоречивых посылок, тривиализируя противоречивые теории, но и не влечет противоречий из отрицаний ее собственных теорем вида $B \rightarrow C$.

Но если отрицание теорем некоторой логической системы не влечет противоречий, то вполне резонно предполагать, что сами теоремы не являются логическими тавтологиями. Можно считать, таким образом, что в этом есть определенное идеологическое оправдание представленной нами семантики, в которой теоремы не являются непосредственно тавтологичными. Логически истинные высказывания, **законы логики – не тавтологичны**. Они несут соответствующую информацию о свойствах отображаемых в них терминов языка и должны, как и любые другие законы, выявляться, открываться и постулироваться.

Еще одно любопытное замечание по поводу отрицаний теорем релевантных исчислений, которое практически потребуется нам в следующей главе, где мы исследуем вопрос об усилении дедуктивных возможностей релевантной логики и покажем, что она в указанном отношении может быть столь же сильной, что и логика классическая, и не допускать при этом парадоксальных следствий.

Ясно, что закон исключенного третьего $A \vee \neg A$, эквивалентный $\neg(\neg AA)$, при его отрицании даст противоречие $\neg AA$. Противоречием окажется, очевидно, и отрицание формулы $B \vee \neg B$. А как будет обстоять дело с отрицанием конъюнкции $(A \vee \neg A)(B \vee \neg B)$? Такое отрицание эквивалентно формуле $\neg AA \vee \neg BB$. Последняя, конечно, заведомо противоречива. Однако, если под противоречием в буквальном смысле понимать выражение, из которого в рамках принимаемой логики можно вывести некоторую формулу и ее отрицание, то в релевантной логике из $\neg AA \vee \neg BB$ этого сделать невозможно. Так же, как нельзя получить в ней, в отличие от классической, формулу и ее отрицание из таких выражений, как $\neg(A \to A) \vee \neg BB$, $\neg(A \to A) \vee \neg(B \to B)$ и тому подобных[63]. На эту любопытную и в общем-то не безобидную черту релевантной логики обычно не обращают внимания.

63 При этом к числу релевантных я не отношу так называемые минговые системы, которые получаются из релевантных добавлением принципа $A \to .A \to A$, а значит, и $\neg A \to .A \to A$, на которые данное утверждение в связи с этим не распространяется.

12. Как усилить дедуктивные возможности релевантной логики до классической

Выше уже говорилось о некоторых оправданных возможностях расширения класса теорем, доказуемых в релевантных исчислениях. Однако, каковы бы ни были эти возможности, релевантная логика, сохраняя свои металогические принципы, будет уступать дедуктивным возможностям классической логики. И совсем не только потому, что не позволяет из противоречия получать, что угодно. Это-то как раз дедуктивное достоинство релевантной логики. Недостаток ее дедуктивных возможностей, по сравнению с классической, проявляется при выводах именно в рамках непротиворечивых теорий. Некоторый способ усиления этих возможностей мы рассмотрим ниже, но сначала поговорим о причинах тех парадоксов следования, которых стремится избежать релевантная логика, и о цене, которую она за это вынуждена платить.

Иногда приходится сталкиваться с утверждением, что релевантная логика содержит в себе классическую. Основано такое мнение на том факте, что в релевантной логике имеет силу всякое утверждение $\otimes B$, где B является классической тавтологией. Однако верность, например, утверждения $\otimes(p \supset q)p \supset q$ отнюдь не предоставляет возможности получить в релевантной логике q из $(p \supset q)p$, так как в ней не имеет силы модус поненс для материальной импликации[64].

На самом деле релевантная логика исключает из числа приемлемых такие известные и постоянно используемые в расссуждениях классические принципы, как $(p \supset q)p \rightarrow q$, $(p \vee q)\neg p \rightarrow q$ и $\neg pp \vee q \rightarrow q$. Принципы эти в релевантной логике эквивалентны, и присоединение любого из них к какой-либо из релевантных систем немедленно превратило бы эту систему в классическую. Причина такого превращения объясняется достаточно просто. Технически она связана с неизбежной доказуемостью в расширенной системе утверждения $\neg pp \rightarrow q$, ради устранения которого во многом и строилась релевантная логика.

Попытаемся рассмотреть этот вопрос в теоретическом плане и понять, откуда и почему вообще появляются парадоксы следования.

12.1. Принцип непротиворечия и парадоксы следования

Начнем с определения вывода из данных посылок (гипотез).

---

[64] На то обстоятельство, что утверждение вида $(A \supset B)A \supset B$ без принятия правила модус поненс являются в логическом смысле совершенно бесполезными, справедливо указывал еще Льюис Кэрролл в работе "Что сказала черепаха Ахиллесу" (См.: Кэрролл Л. История с узелками. М.: Мир, 1973. С. 368–372). Казалось бы, что перейти от $(A \supset B)A$ к B, можно на основании того, что имеет силу $(((A \supset B)A \supset B)(A \supset B)A)) \supset B$. Но и последнее без правила *MP* опять-таки требует повторения антецедента, и так до бесконечности.

Определение 1. Конечная последовательность высказываний (формул) $B_1, ..., B_m$, ($m \geq 1$) называется логическим выводом высказывания (формулы) B из посылок (гипотез) $\Gamma = \{A_1, ..., A_n\}$ ($n \geq 0$) (символически: $\Gamma \vdash B$) в некоторой теории (исчислении) T, если и только если выполняются два следующих условия:

(1) последний член последовательности B_m совпадает с B, и всякое B_i ($1 \leq i \leq m$) есть: (а) B_i есть одна из посылок из Γ; или (б) B_i - теорема теории (исчисления) T; или (в) B_i получается из двух предшествующих членов последовательности по правилу MP (modus ponens); или (г) B_i представляет собой конъюнкцию двух предшествующих членов последовательности (по правилу адъюнкции: RA);

(2) B_m может быть отмечено звездочкой (*) в результате исключительно следующей процедуры: если B_i ($i \leq m$) одна из гипотез, то B_i отмечается звездочкой; если B_i получено из двух предшествующих членов последовательности по правилу modus ponens (MP), то B_i отмечается звездочкой; если B_i получено из двух предшествующих членов последовательности по правилу RA, то B_i отмечается звездочкой, если и только если оба эти члена последовательности были отмечены звездочкой.

При верности $\Gamma \vdash B$ в теории T высказывание B называется (логическим) следствием из Γ в T.

Пункт (2) приведенного определения отличает его от стандартного, принимаемого обычно в классической логике. Принятие этого пункта обусловлено попыткой обеспечить связь между выводимым высказыванием B и гипотезами. По идее такой пункт должен исключать возможность поставить на место B_m произвольную теорему из T. Оказывается, однако, что в том случае, когда в язык теории T входит материальная импликация и для нее считается верным MP, пункт (2) становится бесполезным. Дело в том, что в силу свойств материальной импликации, если B_m - теорема, то всегда будет теоремой также утверждение $A_i \supset B_m$, где A_i - одна из посылок. Это дает возможность в соответствии с (2) отметить B_m звездочкой.

Таким образом, в рамках теорий с правилом MP для материальной импликации, скажем в классической логике, пункт (2) становится тривиально выполнимым, и приведенное определение вывода дает тот же класс утверждений о выводимости, что и стандартное определение. С одним, правда, исключением. В соответствии с определением 1 не является верным никакое утверждение $\Gamma \vdash B$, где Γ является пустым. Иными словами, утверждение вида $\vdash B$ ни в какой теории получить нельзя, так как при отсутствии посылок никакая формула в последовательности вывода не может быть отмечена звездочкой. Чтобы сохранить за выражением $\vdash$B осмысленность, будем понимать его не как выводимость B из пустого списка гипотез, а как утверждение о том, что в теории можно построить доказательство B. Это важное различие, так как при непустом Γ верность $\Gamma \vdash B$ обеспечивает верность $\Gamma, \Delta \vdash B$, где Δ - произвольный список гипотез. При пустом Γ верность $\vdash B$ не влечет верности $\Delta \vdash B$.

Для определенности будем называть парадоксальной относительно выводимости (в смысле наличия в ней неуместных утверждений о следовании) такую теорию T, в рамках которой имеют силу утверждения о логической выводимости вида $A \vdash B$, в которых, сохраняя их верность, формулы A или B можно заменить произвольной формулой C.

Я уже говорил выше, что одной из главных и необходимых причин появления парадоксов следования является универсальное использование ***принципа непротиворечия***. Дело в том, что сам этот принцип и многие основанные на нем законы используются в рассуждениях без учета того, что те посылки, к которым этот принцип и эти законы применяются, сами могут быть следствиями из предположенного истинным (или неявно допущенного) *противоречия*. Вывод из противоречивых посылок с использованием принципа, запрещающего противоречие, при некоторых условиях, о которых будет сказано ниже, в силу своей непоследовательности неизбежно должен привести к парадоксальным (произвольным) следствиям.

Подробно этот вопрос обсуждается мной в [7, 27]. Здесь я хочу обратить внимание на некоторые содержательные соображения, имеющие общелогический характер, и приведу простейший образчик того, как предположение о верности противоречивой посылки $\neg AA$ при использовании логического принципа modus tollendo ponens, основанного на принципе непротиворечия, ведет к получению произвольного следствия B.

Допустим, что в некоторой теории T осуществляется вывод, в котором одна из принятых гипотез является заведомо ложной. Пусть это, скажем, отрицание одной из доказуемых в T теорем. К таким выводам, например, обращаются, когда хотят доказать теорему от противного. Заметьте, что ничто не запрещает вам в процессе вывода использовать T в полном объеме. Таким образом не исключена возможность, что в процессе вывода вы будете опираться на ту самую теорему, отрицание которой взяли в качестве гипотезы. И если даже это так, в этом не будет никаких формальных нарушений. И вместе с тем обоснованность такого вывода представляется весьма сомнительной. Ведь ясно, что, допустив неверность некоторого положения, вы теряете право на это положение опираться[65]. Казалось бы, последнее требование настолько банально, что нет необходимости его подчеркивать. В логике, однако, как бы ни казалось это странным, в одном случае данное требование безотчетно нарушается.

Речь идет о фундаментальном для логики законе (принципе) непротиворечия, в соответствии с которым не могут быть признаны одновременно истинными предложение A и его отрицание $\neg A$. На этом принципе базируются многие законы логики. Именно на этом принципе основан modus tollendo ponens, в соответствии с которым разрешено умозаключение от $(A \vee B) \wedge \neg A$ к B.

Приведем теперь вывод, иллюстрирующий, как можно вывести из противоречия все, что угодно:

1. $\neg A A$ (гипотеза)
2. $\neg A$ (из 1)
3. A (из 1)
4. $(A \vee B)$ (из 3)
5. $(A \vee B) \wedge \neg A$ (из 3 и 4)
6. B (5, modus tollendo ponens).

---

[65] Вообще говоря, отрицая некоторое утверждение, вы не имеете права опираться не только на него, но и на его следствия. Но тут начинаются серьезные неопределенности. Так как теорема представляет собой следствие из аксиом теории, то из ее отрицания следует отрицание конъюнкции всех или части аксиом. И, будучи последовательными, мы уже не должны опираться и на следствия из них. Непонятно, что остается от теории. Начнешь понимать тех, кому противно доказательство от противного.

Замечу, что этот вывод был известен уже в средние века. Согласно Стяжкину Н.И. [51], его использовал Псевдо-Скотт (VI в.). Строился такой вывод содержательно. При этом в качестве A бралось, например высказывание "Сократ существует", в качестве $\neg A$ соответственно "Сократ не существует", а в качестве B "Человек - осел"[66].

Те, кто отвергает правомерность рассмотренного вывода, стоят перед необходимостью указать, в чем его некорректность. Скажу сразу, что нет ни одного пункта вывода, который бы ни отвергался тем или иным автором. Есть отвергающие уже первый шаг вывода, на том основании, что из противоречия выводы делать вообще не имеет смысла. Есть авторы, для которых неприемлем переход от конъюнкции к ее составляющим и которые считают неправомерными шаги 2 и 3. Для кого-то неправильным выглядит переход от 3 к 4, так как переход от A к менее определенному A-или-B представляется им бессмысленным. Наконец, как мы видели, в релевантной логике не признается широко используемый в рассуждениях modus tollendo ponens[67] и, следовательно, считается незаконным переход от 5 к 6.

---

[66] Естественно, что при желании можно подобрать для A и B какие угодно высказывания. Так, взяв в качестве A высказывание "*a* есть отец", можно получить из A и $\neg A$ в качестве следствия B высказывание "*a* есть мать". Привлекательно здесь то, что вместо дизъюнкции А-или-В, переход к которой выглядит достаточно искусственно, берется такое естественное следствие из "*a* есть отец", как "*a* есть родитель".

[67] Если быть более точным, то сторонники релевантной логики считают этот модус уместным для союза "или", используемого в естественном языке, но не считают таковым для истинностно-функциональной дизъюнкции, фигурирующей в языке релевантной логики.

На самом деле рассматриваемый вывод демонстрирует ту непоследовательность, о которой я говорил выше: он допускает в качестве исходной посылки противоречие $A\neg A$ и одновременно использует modus tollendo ponens, который базируется на недопустимости противоречия, причем в данном случае этот модус отвергает возможность именно $A\neg A$, что и дает возможность умозаключать от $(A\vee B)\wedge\neg A$ к B.

Итак, переход от 5 к 6 в выводе осуществляется на том основании, что из альтернатив A и B первая никак не может быть верной, ибо имеет место отрицание A. Именно невозможность $\neg AA$ влечет B. Но само появление этого B среди альтернатив, из которых осуществлялся вывод, было возможно только в силу предположения верности A, которое само было следствием допущения верности $\neg AA$.

Можно с уверенностью утверждать, что любой вывод, демонстрирующий выводимость произвольных следствий из противоречивых гипотез, всегда на том или ином шаге опирается на принцип непротиворечия[68]. При соблюдении всех предъявляемых к логическим умозаключениям требований использование основанных на принципе непротиворечия законов является необходимым условием получения произвольных следствий из противоречивых посылок.

---

[68] Особенно привлекателен своей непоследовательностью вывод произвольного следствия из противоречивых гипотез в доказательствах, называемых доказательствами от противного. Пусть есть противоречивая гипотеза $\neg AA$. Покажем, что из этой гипотезы выводимо B. Будем рассуждать от противного. Допустим, что имеет место $\neg B$. Тогда имеет место противоречие $\neg AA$. Так как допущение $\neg B$ ведет к противоречию, то следовательно, имеет место B. И хотя понятно, что ни к какому противоречию $\neg B$, как и любое другое высказывание, в данном случае не влечет, формально все правильно.

Вторым необходимым условием появления парадоксальных выводов является возможность получать в теории так называемые слабые следствия. Идея и сам способ разделить все следствия из данных (посылок) гипотез на сильные и слабые принадлежит автору (см., например, [52]). Такое разделение и возможность осуществлять их различение имеют важное эвристическое значение.

С содержательной точки зрения под слабыми следствиями имеются в виду те, в которых извлеченная из посылок информация некоторым образом разбавляется, становится менее определенной. С наиболее тривиальными случаями слабых следствий мы имеем дело, когда от определенного высказывания A переходим к заведомо менее определенному A-или-B. Со слабыми следствиями мы имеем дело также тогда, когда ослабляем имеющуюся импликацию, усиливая ее антецедент или ослабляя консеквент, например умозаключая от $A \rightarrow B$ к $AC \rightarrow B$. Или когда вместо выводимого из посылок некоторого общего высказывания берем более слабое частное[69] и т.п.

Именно слабые следствия не дают возможности сказать, что у двух высказываний, одно из которых говорит, допустим, о динозаврах, а другое - о простых числах, нет ничего общего и никаких общих следствий. Ибо таким общим следствием будет их дизъюнкция и весь бесконечный

[69] Когда-то в период борьбы с буржуазной формальной логикой одним из серьезных аргументов в ее ущербности был тот, что она позволяет из верного утверждения, что все капиталисты эксплуататоры, выводить неверное, что некоторые капиталисты эксплуататоры

класс ее собственных следствий. В связи с существованием слабых следствий у нас практически отсутствует возможность говорить о независимых теориях, т.е. о теориях, которые не имеют общих следствий. Не спасает даже оговорка, что речь идет о следствиях, которые не являются истинными, так как и в этом случае две теории с непустым внелогическим содержанием не имеют общих следствий, только когда одна теория полностью состоит из отрицаний внелогических утверждений другой[70]. Все такого рода проблемы исчезают, если говорить не о следствиях вообще, а о сильных логических следствиях. И тогда открывается возможность говорить о высказываниях, классах высказываний, гипотезах, теориях и т.п., не имеющих общих сильных следствий и в этом смысле независимых.

Имеются целые классы проблем, где указанная возможность позволяет находить принципиально новые решения, что и позволяет говорить об эвристической значимости различения сильных и слабых следствий.

Возьмем, например, известные трудности, с которыми приходится сталкиваться в связи с построением логики так называемых пропозициональных установок.

Скажем, объем заказанной мне статьи, над которой я сейчас работаю, не превышает одного авторского листа. Этот объем, следовательно, не превышает двух авторских

[70] См. в связи с этим [54, с. 32-34]. Согласно автору получается, что независимых теорий с внелогическим содержанием вообще нет. То, что данное утверждение относится к теориям, сформулированным в одном языке, положения не только не меняет, но и усугубляет, так как при разных языках двух теорий следствия из них все-таки както различимы, и попытки представить в качестве общего следствия их дизъюнкцию выглядят искусственными.

листов. Если, однако, заказчик статьи разрешил мне представить статью не более, чем в один авторский лист, то это совсем не означает, что мне позволено написать статью не более, чем в два авторских листа. Иными словами, то обстоятельство, что высказывание *А* влечет высказывание В, не означает, что из *Разрешено А* следует *Разрешено В*.

Мы имеем здесь дело с примером парадоксов деонтической логики, когда при разрешении некоторого действия не всегда правомерно считать разрешенными также действия в логическом отношении более слабые. Если разрешено выпить таблетку аспирина, то отнюдь не значит, что разрешено выпить таблетку аспирина или стакан вина; таблетку аспирина или 10 таблеток анальгина. Легко сообразить, к каким сложностям это приводит при построении деонтической логики. С аналогичными трудностями можно встретиться и при описании норм рассуждений с другими пропозициональными установками.

Можно видеть, что парадоксы рассмотренного типа связаны со слабыми следствиями.

Первоначально проблема различения сильных и слабых следствий возникла у меня в связи с установлением логических критериев истинности условных высказываний. Без такого различения оказалось, в частности, невозможным сформулировать адекватные требования, при соблюдении которых выводимость высказывания *В* из класса истинных посылок (аргументов) *Г* и высказывания *А* позволяла бы считать верным содержательно понимаемое условное высказывание “Если *А*, то *В*”. Дело в том, что содержательная связь между антецедентом *А* и консеквентом *В* условного высказывания при таком подходе может быть обеспечена, только когда из одного лишь *Г* нельзя вывести не только *В* (что очевидно, так как в противном случае утверждение о какой-либо связи между *А* и *В* становится неправомерным), но также (из одного *Г*) нельзя вывести никакого высказывания *С*, являющегося сильным следствием из *В*. Допустите, что такое сильное следствие *С* существует, и вы при этом признаете верным "Если *А*, то *В*". Тогда в силу верности "Если *В*, то *С*" вы будете по транзитивности иметь "Если *А*, то *С*", где между *А* и *С* какая-либо связь никоим образом не гарантирована.

Без понятия сильного следствия адекватные требования, о которых идет речь, вообще сформулировать было бы невозможно, ибо, как мы отмечали выше, какие-то общие логические следствия (слабые) у любых *Г* и *В* всегда имеются.

Упомянем еще только одну проблему, которую, как мне представляется, нельзя решить без различения сильных и слабых следствий. Речь идет об известном требовании, связанным с так называемым (порочным) кругом в доказательстве. Это требование, как все знают, запрещает предвосхищение тезиса в аргументах доказательства. Но вот ведь какое дело, на которое не желают обратить внимание и задуматься. Тезис любого корректного доказательства является логическим следствием принятых аргументов, и поэтому с необходимостью пусть неявно, имплицитно содержится в аргументах и в этом смысле с необходимостью в них предвосхищается. Во всяком случае указанное требование, воспринимаемое как очевидное и понятное, в сущности не является очень ясным и должно быть, если это возможно, некоторым образом эксплицировано. Не занимаясь здесь этой проблемой специально, укажу только, что корректность доказательства в указанном отношении соблюдается при следующем условии.

Если сам тезис B, или, в общем случае, какое-нибудь сильное следствие из него C выводится из некоторых аргументов Γ (в число аргументов в данном случае включаются также используемые теоремы соответствующих теорий), то всегда должна иметься возможность продемонстрировать, что Γ можно разбить на две группы аргументов Δ и Σ, такие, что $\Delta \cup \Sigma = \Gamma$ и при этом никакое сильное следствие C (из тезиса B) нельзя вывести только из Δ или только из Σ по отдельности. Это означает, что никакое сильное следствие, выводимое из тезиса, не находится среди аргументов и оно может быть получено за счет некоторых правил логики, например, за счет МР, причем характер этих правил таков, что никакая из посылок, к которым эти правила применяются, не является логически более сильной, чем любое сильное следствие из B.

Для простоты будем говорить в дальнейшем о высказываниях, записанных в некотором символическом языке, т.е. о формулах. При необходимости, однако, все это легко может быть адаптировано и к обычным высказываниям, и к обычным содержательным рассуждениям. Начнем с введения одного чисто технического понятия.

Определение 2. Будем называть формулу B нормальным (логическим) ослаблением формулы A в теории T, если и только если имеет место один из двух случаев: (1) в T является верным $A \vdash B$, но не верно обратное $B \vdash A$, и при этом в B не входит никакая подформула C (возможно совпадающая с B), такая, что при ее замене любой другой формулой выводимость $A \vdash B'$, где B' - результат указанной замены, сохраняется (иначе говоря, B не содержит вхождений несущественных относительно A подформул); (2) формула B эквивалентна некоторой формуле C, которая является нормальным ослаблением формулы A в соответствии с пунктом (1).

Например, формулы $P(x)$ и $\exists xP(x)$ являются нормальными логическими ослаблениями формулы $\forall xP(x)$, а вот формула $\forall xP(x)\vee Q(y)$ таковой не является, так как один из дизъюнктивных членов в ней можно заменить произвольной формулой и она останется при этом следствием исходной формулы $\forall xP(x)$. Формула $p\vee q$ не будет нормальным ослаблением для pr, так как вхождение q в ней может быть заменено произвольной формулой. Формула же $p\vee pq$ будет нормальным ослаблением pr, так как эквивалентна нормальному ее ослаблению p.

Ослабление В формулы A, которое не относится к числу нормальных ослаблений, будем называть произвольным ослаблением.

Прежде чем дать определение слабых и сильных следствий из данных гипотез Γ, условимся обозначать как $\Gamma^{\&}$ конъюнкцию всех гипотез из Γ. Предварим определение также замечанием о том, на чем базируется сама его идея.

Выше было замечено, что слабое следствие не просто часть информации, содержащейся в исходных гипотезах, но информация, разбавленная за счет привнесения некоторой альтернативной, снижающей определенность информации. Это обстоятельство явным образом должно будет проявиться, если мы обратимся к отрицанию слабого следствия. Такое отрицание (в отличие от отрицания сильного следствия) будет в явном виде содержать информацию, без которой можно обойтись для отрицания конъюнкции гипотез Γ, из которых следствие получено. Таким образом, если мы имеем $\Gamma \vdash B$, то верно также $\neg B \vdash \neg \Gamma^{\&}$. И если при этом B есть слабое следствие, то у $\neg B$ должно быть два различных нормальных логических ослабления, по крайней мере одно из которых противоречит гипотезам.

Строгое определение будет выглядеть следующим образом:

Определение 3. Пусть в некоторой теории T имеет силу утверждение $\Gamma \vdash B$. Формула B называется слабым логическим следствием из Γ в T, если и только если существуют формулы A и C, такие, что они являются нормальными логическими ослаблениями формулы B в T, ни одна из них не эквивалентна их конъюнкции AC, и при этом в T является верным $A \vdash \neg \Gamma^{\&}$. В противном случае B является сильным логическим следствием из Γ.

Итак, слабое следствие из гипотез Γ должно иметь два различных нормальных ослабления A и C. Причем ни одно из них не должно быть следствием из другого. Это условие обеспечивается требованием, что ни одно из этих ослаблений не эквивалентно их конъюнкции. Одно из ослаблений A должно противоречить гипотезам. Второе ослабление C свидетельствует о наличии в отрицании следствия, т.е. в $\neg$B излишней информации, что мы и стремимся выявить. Это второе ослабление может как влечь, так и не влечь утверждение об отрицании посылок. В данном случае это не имеет значения.

Поскольку $\Gamma \vdash B$, имеет место $\neg B \vdash \neg \Gamma^{\&}$. Мы устанавливаем, что имеет силу $\neg B \vdash AC$, и при этом не верно ни одно из утверждений $A \vdash \neg B$; $C \vdash B$; $A \vdash AC$; $C \vdash AC$. Но является верным $A \vdash \neg \Gamma^{\&}$. На этом основании приходим к выводу, что $\neg B$ содержит излишнюю для отрицания конъюнкции гипотез $\Gamma^{\&}$ информацию, а значит, B является слабым логическим следствием из Γ в T.

Требование, что A и C должны быть не просто ослаблениями, но нормальными ослаблениями формулы $\neg B$, связано с необходимостью исключить из числа допустимых ослаблений формулы вида, например, $\neg B \vee \neg D$, где D - следствие из Γ. Без этого нельзя было бы признать сильным никакое следствие более слабое, чем сами гипотезы.

Может показаться, что в определении достаточно ограничиться требованием, чтобы у $\neg B$ было любое противоречащее гипотезам нормальное ослабление, уже как бы свидетельствующее о наличии в нем излишней для отрицания гипотез информации. Однако может случиться так, что $\neg B$ не имеет двух различных неэквивалентных нормальных ослаблений. И мы теряем основание говорить, что в $\neg B$ есть излишняя информация. Так, например, следствие $P(y)$, в отличие от $\exists y P(y)$, из гипотезы $\forall x P(x)$ будет сильным. Для формулы $\neg \exists y P(y)$ двумя требуемыми нормальными ослаблениями будут $\neg P(y)$ и $\neg P(x)$. Для $P(y)$ мы можем указать в качестве нормального ослабления только отрицание самой гипотезы $\neg \forall x P(x)$ и эквивалентные ему формулы.

О сильных и слабых следствиях можно говорить также и в рамках содержательных рассуждений. Например, высказывание: "*a* есть родитель" в рамках обычной теории родственных отношений будет слабым следствием из высказывания "*a* есть отец", так как у отрицания "Неверно, что а есть родитель" имеется два нормальных ослабления: "*a* не есть отец" и "*a* не есть мать", первое из которых противоречит посылке, а второе демонстрирует излишнюю информацию в отрицании следствия, позволяя считать его слабым. Интересно убедиться в следующем важном и, может быть, несколько неожиданном обстоятельстве, что если вместо исходной гипотезы взять “*a* есть отец”, два эквивалентных ей высказывания “*a* есть родитель” и “*a* есть мужчина”, то результат будет тем же: высказывание “*a* есть родитель” останется слабым следствием из новых посылок, хотя само входит в их число.

Суммируем некоторые общие положения, касающиеся свойств сильных и слабых следствий. Для парадоксальных логических теорий приводимые положения справедливы при предположении, что гипотезы, из которых получаются следствия, непротиворечивы, а сами следствия нетавтологичны.

(1) Если следствие B из гипотез Γ эквивалентно их конъюнкции $\Gamma^{\&}$, то B является сильным.

(2) Если B есть сильное следствие из Γ, и C есть сильное следствие из B, то C есть сильное следствие из Γ. Отношение “быть сильным следствием” транзитивно.

(3) Конъюнкция сильных следствий из гипотез Γ всегда есть сильное следствие из тех же гипотез.

(4) Слабое следствие В из гипотез Γ всегда есть слабое следствие из гипотез $\{\Gamma,\Delta\}$, включая $\{\Gamma,B\}$.

(5) Существуют дедуктивно замкнутые классы гипотез Γ и Δ, которые не имеют общих сильных следствий.

(6) Любые следствия из любого Γ, представляющие собой элементарные формулы вида p или $P(x)$, всегда являются сильными.

(7) В пропозициональной логике класс сильных следствий из конечного числа гипотез всегда конечен.

Интересно заметить в дополнение, что в классической пропозициональной логике из любых противоречивых гипотез в качестве сильных следствий могут быть получены только такие, которые эквивалентны некоторому литералу (элементарному высказыванию или его отрицанию) или конъюнкции литералов. Все другие следствия будут слабыми. Иными словами, противоречие в логическом смысле выступает в классической пропозициональной логике как формула, эквивалентная бесконечной конъюнкции всех литералов. Ясно поэтому, что тавтологичные следствия (отрицания которых, естественно, являются противоречивыми) в классической логике являются слабыми из любых нетавтологичных посылок. Из тавтологий они будут сильными следствиями как эквивалентные им.

Вернемся к проблеме парадоксов следования. Вряд ли можно усомниться в корректности рассуждения, позволяющего из гипотез "*a* есть родитель" и "*a* не является отцом" сделать вывод о том, что "*a* является матерью". Вместе с тем сами эти гипотезы можно получит как следствия из высказываний: "*a* является отцом" и "*a* не является отцом". Тогда мы вынуждены признать, что из противоречивых посылок "*a* является отцом" и "*a* не является отцом" следует, что "*a* является матерью". Выглядит такое следствие, конечно, нелепым. По своей структуре приведенное рассуждение вполне похоже на то, с помощью которого Псевдо-Скотт осуществлял из противоречивых посылок вывод высказывания, что "Человек является ослом". Мы, правда, не вводили явным образом на основании *A* дизъюнкцию *A*-или-*B* с произвольным *B*, осуществив содержательно вполне корректный переход от "*a* является отцом" к "*a* есть родитель". Тем не менее по своей результирующей нелепости оба рассуждения весьма похожи.

И общим в них является применение принципа непротиворечия к слабым следствиям из противоречивых посылок. Понять, почему это приводит к появлению абсурдных следствий несложно. Слабое следствие из некоторых посылок, как это видно из его определения, всегда представляет собой альтернативное ослабление имеющейся информации. То, что было сформулировано как нечто определенное, теперь становится одной из равноправных альтернатив. Если при этом из посылок можно получить отрицание этой теперь уже альтернативы, то подброшенная альтернатива, т.е. альтернатива, за счет которой имеющаяся информация была ослаблена, претендует на верность, так как та, к которой она была присоединена, опровергается. Принцип непротиворечия открывает возможность получить в качестве следствия как раз то утверждение, за счет присоединения которого вся эта альтернативность и появилась. При этом вместо данного утверждения можно было привнести его отрицание и вообще что угодно, включая любое противоречивое утверждение.

Совсем грубо это выглядит так. Берем противоречие. Считаем его верным утверждением. Присоединяем к нему некую альтернативу. Осуществляем среди альтернатив выбор, отбрасывая на основании принципа непротиворечия ту, что заведомо противоречива, и получая в качестве "законного" следствия высказывание, произвольно внесенное в число альтернатив.

Допустим теперь, что нас такое положение по каким-то причинам не удовлетворяет и мы хотим иметь теорию следования, которая не вынуждает признавать произвольные следствия даже в том случае, когда в универсуме рассуждения обнаружилось противоречие. У нас есть формализованная классическая теория следования. Какими могут быть пути ее перестройки, чтобы сделать ее непарадоксальной?

Существование большого числа теорий следования, претендующих на большую адекватность правильным способам рассуждений, чем логика классическая, казалось бы говорит о том, что таких путей изрядное множество. Однако понимание реальных причин появления парадоксов дает возможность предположить, что исследователи, по крайней мере те, которые желают сохранить возможно большее из того позитивного, что есть в логике классической, вынуждены, независимо от того, отдают ли они себе в этом отчет, принять один из двух следующих подходов.

Первый связан с устранением из теории принципов, ответственных за появление слабых следствий, например такого как $A \to A \vee B$ или $A \to B \to AC \to B$. Второй подход предполагает то или иное ограничение на применение принципа непротиворечия.

Анализ существующих непарадоксальных теорий следования, или теорий импликаций, какими бы соображениями и критериями (релевантности, уместности, непарадоксальности, существенности, интенсиональности, строгости и т.п.) ни руководствовались их авторы, показывает, что они при построении своих формализующих следование систем неизбежно оказываются в русле первого или второго из названных подходов.

Причины такого положения я пытался всячески здесь объяснить. Конечно же, в принципе возможны и другие подходы. Но, как я уже заметил, они связаны с неизбежной потерей тех или иных обоснованных способов рассуждений.

Каков из двух обрисованных мною подходов более предпочтителен. Я думаю, что все-таки второй. Первый предполагает изменение смысла логических констант, таких как дизъюнкция, конъюнкция, отрицание, вынуждает исключать из объектного языка материальную импликацию и т.п. Сразу ясно, что путь этот весьма искусственный и осуществляемый по известному, но сомнительному в теоретическом смысле принципу: сунуть хвост туда, куда голова не пролезает.

Подход, связанный с ограничением на применение принципа непротиворечия, с логической точки зрения является более оправданным. Дело в том, что в этом случае происходит отказ только от таких средств рассуждения, которые не являются универсальными в том смысле, что не являются правомерными в силу заведомой теоретической непоследовательности в противоречивых универсумах рассуждений, при выводах из противоречивых гипотез. Осознание этого обстоятельства позволяет не отбрасывать эти средства рассуждений вообще, но использовать их там, где опасность проявления их парадоксальности принципиально исключена. Когда гипотезы непротиворечивы, в универсуме рассуждения противоречия не обнаружены или как-то блокированы. Тем самым дедуктивные средства теории, освобождающейся от парадоксальных принципов, могут быть максимально восстановлены. Как это сделать, это уже вопрос техники. Я полагаю, и эта проблема будет обсуждена ниже, что закон непротиворечия может использоваться в рассуждениях и выводах как металогический принцип, каковым, я думаю, он на самом деле и является.

Прежде, однако, замечание, связанное с наличием не только тех парадоксов следования, которые позволяют получать произвольные следствия из противоречия, но и с парадоксами другого типа, утверждающих, что логические истины следуют из чего угодно. Причины появления последних, по моему мнению, не требуют специально анализа. Они есть результат применения принципа контрапозиции к парадоксам первого типа. Таким образом, проблема их устранения, если удается справиться с первыми, не требует каких-либо дополнительных мер и усилий.

12.3. Выводы, базирующиеся на релевантной логике и принципе непротиворечия

Зная причину появления парадоксов, можно предложить путь их избежания наиболее безболезненный в смысле ненужного ослабления дедуктивных возможностей классической логики и максимального усиления таких возможностей логики релевантной.

По существу, принцип непротиворечия, с универсальным применением которого мы связываем парадоксальность формализованных теорий, является метапринципом, позволяющим переходить от высказываний вида $(A \supset B)A$, $(A \vee B)\neg A$ и $\neg AA \vee B$ к высказыванию B на том основании, что $\neg A$ и A, и их конъюнкция никогда не могут быть истинными. И тогда приемлемой альтернативой остается B. Чтобы использовать этот метапринцип без получения отрицательных последствий, достаточно сделать это использование "непротиворечивым": не применять его тогда, когда высказывания, указанного вида, сами были получены как следствия из почему-либо содержащихся в универсуме рассуждения $\neg A$ и A.

Реализовать указанную идею можно, определяя в релевантной логике понятие вывода из посылок. Дадим сначала общее определение вывода из посылок (гипотез) для релевантных исчислений, не затрагивая обсуждаемого метапринципа.

D1. Логическим выводом высказывания (формулы) B из посылок (гипотез) $\Gamma = \{A_1, \ldots, A_n\}$ $(n \geq 0)$ (символически: $\Gamma \vdash B$) в релевантной теории (исчислении) T называется конечная последовательность высказываний *(формул)* $B_1, \ldots, B_m$, $(m \geq 1)$ такая, что последний член последовательности B_m совпадает с B, и для всякого B_i ($1 \leq i \leq m$) выполняется одно из следующих условий: (а) B_i есть одна из посылок из Γ; (б) B_i - теорема теории (исчисления) T; (в) B_i получается из двух предшествующих членов последовательности по правилу MP (modus ponens); (г) B_i представляет собой конъюнкцию двух предшествующих членов последовательности (по правилу адъюнкции: *RA*); (е) формула B_m зависит от каждой из посылок, включенных в последовательность $B_1, \ldots, B_m$.

(***Примечания к D1***: (1) Если в языке T нет знака конъюнкции, то пункт (г) должен быть опущен. (2) Мы говорим, что член B_i последовательности вывода $B_1, \ldots, B_m$ зависит от члена последовательности B_k исключительно в случаях: (i) B_i совпадает с B_k, т.е. каждый член последовательности зависит от себя самого, или (ii) B_k является одним из членов последовательности, из которых B_i получено по одному из правил вывода, или (iii) B_i зависит от B_j, и B_j зависит от B_k (отношение зависимости транзитивно)).

Принятое определение вывода адекватно рассмотренным выше релевантным системам в том смысле, что класс теорем этих систем вида $A \rightarrow B$ (символически: $\vdash A \rightarrow B$) и класс верных в них утверждений $A \vdash B$ совпадают. В более общем виде можно сказать, что совпадают классы утверждений вида $\vdash \Gamma^{\&} \rightarrow B$ и $\Gamma^{\&} \vdash B$, где $\Gamma^{\&}$ – конъюнкция всех посылок из Γ.

Мы усилим теперь принятое определение D1 за счет использования *принципа непротиворечия*. При этом новое определение D2 будет опираться на D1, так как вводимый в D2 дополнительный пункт предполагает наличие D1. Кроме того, с учетом тех замечаний, которые сделаны по поводу противоречия в предыдущем параграфе, под противоречием фактически будет пониматься отрицание теоремы той релевантной теории T, в которой строится вывод. Примечания, сделанные к D1, сохраняют свою значимость и для D2.

D2. Логическим выводом высказывания (формулы) B из посылок (гипотез) $\Gamma = \{A_1, ..., A_n\}$ $(n \geq 0)$ (символически: $\Gamma \vdash B$) в силу релевантной теории (исчисления) T и принципа непротиворечия называется конечная последовательность высказываний (формул) $B_1, ..., B_m$, $(m \geq 1)$ такая, что последний член последовательности B_m совпадает с B, *и для всякого* B_i $(1 \leq i \leq m)$ выполняется одно из следующих условий:

(а) B_i есть одна из посылок из Γ; (б) B_i - теорема теории (исчисления) T; (в) B_i получается из двух предшествующих членов последовательности по правилу MP (modus ponens); (г) B_i представляет собой конъюнкцию двух предшествующих членов последовательности (по правилу адъюнкции: *RA*); (д) формуле B_i предшествует член последовательности вида $C \vee B_i$, где C – отрицание теоремы T, и при этом C нельзя вывести из посылок $\Gamma, B_1,...,B_{i-1}$ в силу D1, и любая выводимая из Γ формула вида $C \vee F$, являющаяся отрицанием теоремы теории T, выводима из посылок $\Gamma, B_1,...,B_{i-1}$ в силу D1 только в случае выводимости из этих посылок формулы F; (е) формула B_m зависит от каждой из посылок, включенных в последовательность $B_1, \ldots, B_m$.

Итак, D2 отличает от определения D1 пропущенный в D1 пункт (д), основанный на принципе непротиворечия. Сделаем к нему некоторые пояснения. Пункт этот при определенных условиях разрешает переход от $C \vee B_i$ к B_i. Пусть C, которое хотя и может быть отрицанием любой из теорем T, имеет для определенности вид явного противоречия, скажем, $\neg AA$.

Самым простым путем избежать парадоксальных следствий было бы потребовать для перехода от $\neg AA \vee B_i$ к B_i непротиворечивости посылок. Наше требование является менее сильным, предполагая невыводимость из гипотез Γ не любого противоречия вообще, а именно $\neg AA$. Здесь важны два момента. Первый состоит в том, чтобы не использовать ограничение, если посылки Γ позволяют вывести некоторое другое противоречие, например $\neg FF$, которое не имеет к $\neg AA$ никакого отношения. Вместе с тем обсуждаемый переход должен быть запрещен, когда имеет место вывод из Γ дизъюнкции $\neg AA \vee \neg FF$ при том, что ни $\neg AA$, ни $\neg FF$ по отдельности из Γ не выводимы. Было бы неоправданным отбрасывать именно противоречие $\neg AA$, когда гипотезы допускают, что одно из двух явных противоречий $\neg AA$ или $\neg FF$ имеет место.

Второй момент, на который надо обратить внимание, связан с тем, что в пункте (д) идет речь о выводе в силу D1 не из посылок Γ, а из посылок $\Gamma, B_1, \ldots, B_{i-1}$. Делается это по той причине, что пункт (д) и связанное с ним отбрасывание противоречия уже могли быть использованы в выводе ранее, а именно до того, как его использовали для перехода от $\neg AA \vee B_i$ к B_i. В силу этого обстоятельства классы следствий из Γ и из $\Gamma, B_1,...,B_{i-1}$ в силу D1 могут не совпадать, так как среди $B_1,...,B_{i-1}$ могут быть такие формулы, которые получены с использованием принципа непротиворечия, который не допускается определением D1.

И наконец, последнее пояснение, которое мы отчасти уже дали выше. Определение D2 не может быть сформулировано независимо и без предварительного введения D1, так как нельзя в пункте (д) было бы сказать о недоказуемости чего бы то ни было в силу определения D2, не закончив его формулировки.

Важно иметь в виду, что вывод, определяемый в D2, не является монотонным. Это явствует из того, что добавление к Γ новых формул может привести к доказательству из расширенного класса посылок Г* таких формул, которые блокируют применение принципа непротиворечия, в приемлемом для D2 виде.

Так, например, в соответствии с D2 из посылок $p \supset q$, r и $p \vee \neg rr$ можно вывести q. Но этого уже нельзя сделать из посылок $p \supset q$, $p \vee \neg rr$, r и $p \supset q \supset \neg r$, так как новый класс посылок будет противоречивым относительно r и $\neg r$.

Введя возможность пользоваться принципом непротиворечия, мы добились того, что вывод из классических (относящихся к языку классической логики) непротиворечивых посылок в соответствии с определением D2 имеет практически ту же дедуктивную силу, что и вывод в обычной классической логике. Чтобы показать, что это означает в строгом смысле, введем специфические для релевантной логики определения дизъюнктивной и конъюнктивной нормальных форм для классических формул.

D3. Классическая пропозициональная формула B находится в дизъюнктивной нормальной форме (*днф*), если и только если она имеет вид дизъюнкции $B_1 \vee B_2 \vee \ldots \vee B_n$ ($n \geq 2$) и при этом выполняются следующие условия: (1) все B_i ($i \leq n$) различны и каждое B_i имеет вид элементарной конъюнкции $B_{i1} \wedge B_{i2} \wedge \ldots \wedge B_{im}$ ($m \geq 1$), где каждый B_{ik} ($k \leq m$) есть либо некоторая пропозициональная переменная a, либо ее отрицание $\neg a$; (2) все B_{ij} различны и упорядочены так, что для любых B_{il} ($l \leq m$) и B_{ir} ($r \leq m$) индекс l меньше индекса r тогда и только тогда, когда B_{il} есть переменная или ее отрицание переменной, стоящая в упорядоченном списке литералов раньше, чем B_{ir}; (3) все B_i различны и упорядочены так, что B_k предшествует B_l, если первый различающий B_k и B_l литерал, который входит в B_k, предшествует в упорядоченном списке литералов литералу из B_l.

D4. Классическая пропозициональная формула B находится в конъюнктивной нормальной форме (*кнф*), если и только если она имеет вид конъюнкции $B_1 \wedge B \wedge \ldots \wedge B_n$ ($n \geq 2$) и при этом выполняются следующие условия: (1) все B_i ($i \leq n$) различны и каждое B_i является элементарной дизъюнкцией, имея вид $B_{i1} \vee B_{i2} \vee \ldots \vee B_{im}$ ($m \geq 1$), где каждый B_{ik} ($k \leq m$) есть либо некоторая пропозициональная переменная a, либо ее отрицание $\neg a$; (2) все B_{ij} различны и упорядочены так, что для любых B_{il} ($l \leq m$) и B_{ir} ($r \leq m$) индекс l меньше индекса r тогда и только тогда, когда B_{il} есть переменная или ее отрицание переменной, стоящая в упорядоченном списке литералов раньше, чем B_{ir}; (3) все B_i различны и упорядочены так, что B_k предшествует B_l, если первый различающий B_k и B_l литерал, который входит в B_k, предшествует в упорядоченном списке литералов литералу из B_l.

Будем обозначать как B^* классическую формулу в *днф* и как B° в *кнф*. Во всех рассмотренных нами релевантных исчислениях в силу верности в них законов двойного отрицания, коммутативности, ассоциативности и дистрибутивности конъюнкции и дизъюнкции, законов де Моргана, а также принципа замены эквивалентностей имеет силу следующее положение.

Для всякой классической пропозициональной формулы B существуют такие формулы B^* и B° соответственно в *днф* и *кнф*, что в силу D1 являются верными следующие утверждения о выводимости: $\vdash B^* \rightarrow B$ и $\vdash B \rightarrow B^*$; $\vdash B^\circ \rightarrow B$ и $\vdash B \rightarrow B^\circ$.

Следствиями приведенного положения являются:

Следствие 1. Для классических формул A и B имеет силу утверждение о выводимости в силу D1, если и только если для эквивалентных им соответственно формул A^* и B° выполняется следующее условие: каждая элементарная конъюнкция из A^* имеет по крайней мере один общий литерал с каждой элементарной дизъюнкцией из B°.

Следствие 2. Для классических формул A и B имеет силу утверждение о выводимости в силу D2, если и только если для эквивалентных им соответственно формул A^* и B° выполняется следующее условие: каждая *непротиворечивая* элементарная конъюнкция из A^* имеет по крайней мере один общий литерал с каждой элементарной дизъюнкцией из B°.

Различие между выводами в силу D1 и D2 очевидно. В первом случае (D1) у нас нет возможности исключать из дизъюнкции тождественно ложных ее составляющих, во втором (D2) такая возможность открывается. Вместе с тем такие, например, выводимости, как q из $\neg pp \vee q$, и обратная: $\neg pp \vee q$ из q, не позволяют считать формулы $\neg pp \vee q$ и q эквивалентными, так как не являются эквивалентными их отрицания. Из отрицания q (т.е. из $\neg q$) не выводимо отрицание $\neg pp \vee q$, эквивалентное формуле $(p \vee \neg p) \neg q$.

Следствие 2 дает возможность сравнить дедуктивные возможности релевантной логики, дополненной определением вывода D2, с аналогичными возможностями логики классической. Речь идет о следствиях только из непротиворечивых гипотез. Для классической логики отношение между A и В, описанное в следствии 2, остается верным и при том условии, что *непротиворечивая* элементарная конъюнкция из A^* не имеет общих литералов с тавтологичной элементарной дизъюнкцией из $B°$. В классической логике из $\neg pp \vee q$ можно будет получить не только q, но и $q(r \vee \neg r)$. В релевантной последнего сделать нельзя.

13. Теорема дедукции

В естественных рассуждениях теореме дедукции соответствует способ обоснования истинности условных высказываний вида “Если A, то B”, при котором такое высказывание считается истинным, когда удается установить выводимость B из A и некоторой совокупности предложений Γ, истинность которых считается установленной. Ясно поэтому, что логическая теория, описывающая тот или иной вид импликации (следования, условной связи), должна в том или ином смысле удовлетворять теореме дедукции.

В общем случае теорема дедукции это метатеоретическое утверждение о формальной логической теории T, в соответствии с которым существование в исчислении T *логического вывода* формулы B из называемых гипотезами формул $A_1, A_2, \ldots, A_n$ (символически: $A_1, A_2, \ldots, A_n \vdash B$) означает, что в T существует (возможно при некоторых ограничениях) также вывод из гипотез $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$ импликации $A_n \rightarrow B$ (символически: $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1} \vdash A_n \rightarrow B$). Обычно теорема дедукции формулируется как утверждение о возможности перехода от верного в теории вывода вида $\Gamma, A \vdash B$ к $\Gamma \vdash A \rightarrow B$.

Эта теорема без всяких ограничений имеет силу для исчислений классической логики и вообще для любых исчислений и формализованных теорий, в которых доказуемы два логических принципа: закон утверждения консеквента

$$A \rightarrow .B \rightarrow A$$

и так называемый закон самодистрибутивности импликации

$$(A \rightarrow .B \rightarrow C) \rightarrow .A \rightarrow B \rightarrow .A \rightarrow C.$$

Причем в таких исчислениях теорема дедукции может применяться к $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1} \vdash A_n \to B$ снова и снова вплоть до получения утверждения

$$\vdash A_1 \to .A_2 \to \ldots \to .A_{n-1} \to . \to .A_n \to B.$$

Для релевантных исчислений, в которых закон утверждения консеквента не принимается, нахождение подходящей формулировки теоремы дедукции является уже определенной проблемой.

Еще в начале 60-х годов А.А. Зиновьев и В.А. Смирнов, исследуя некоторые проблемы силлогистики, обратили внимание на то, что многие правила вывода из посылок для исчисления высказываний могут быть сформулированы (и доказаны) без ссылок на конкретную аксиоматику исчислений. Для этого достаточно опираться лишь на само определение вывода. Вместе с тем последнее может быть различным. От этого, естественно, будут различными и классы приемлемых утверждений о выводимости вида $\vdash B$, а также правил, позволяющих переход от одних утверждений такого типа к другим. К последним относится и так называемая теорема дедукции, позволяющая переход от $\Gamma, A \vdash B$ к $\Gamma \vdash A \to B$.

Если, скажем, определение вывода запрещает фиктивное использование посылок, делая неправомерным переход от $\Gamma \vdash B$ к $\Gamma, A \vdash B$, то в число приемлемых утверждений о выводимости, получаемых с помощью теоремы дедукции, не попадут (при еще некоторых очевидных ограничениях) такие парадоксальные утверждения, как

$$\vdash A \to .B \to A \quad \text{и} \quad \vdash A \to .\neg A \to A \ [2].$$

Определение вывода и принимаемая формулировка теоремы дедукции (а такие формулировки могут быть различными при одинаковом определении вывода) задают различные классы утверждений о выводимости[71]. Возникает вопрос, какие логические исчисления соответствуют тому или иному из этих классов? Эта проблема была детально исследована Смирновым в 70-е годы[72]. При этом были естественным образом построены и исследованы те свободные от парадоксов импликации исчисления, которые впоследствии стали именоваться релевантными. Речь идет о таких исчислениях, как *R*, *E*, их так называемых мингловых аналогах и кванторных расширениях. Для всех рассмотренных исчислений предложены их секвенциальные аналоги, изучена проблема устранимости сечения. Занимались этими проблемами и ученики В.А. Смирнова, в частности В.М. Попов [7, 8].

Мои исследования в этом направлении отличались от смирновских в ряде отношений. И прежде всего в том, что предлагаемые мной определения вывода и теоремы дедукции (принципа дедукции) были изначально релятивизированы относительно исчислений. В том смысле, что при одинаковых по форме формулировках они приобретали различный смысл в зависимости от того, каким в реальности оказывалось исчисление, фигурирующее в определениях как некая абстрактная теория *T*.

---

71 В этой ситуации теорема дедукции, сохраняя название, выступает в качестве не обычной метатеоремы исчисления, фиксирующей, что при существовании вывода $\Gamma, A \vdash B$ в исчислении может быть построен вывод $\Gamma \vdash A \to B$, но правила построения вывода, разрешающего переходить от первого из указанных выводов ко второму. Поэтому правильнее было бы в этих случаях говорить не о теореме, а о принципе дедукции. С другой стороны, употребляемое название, сразу делает ясным, о чем идет речь, а контекст показывает, имеем ли мы дело с теоремой или же с правилом.

72 Обобщение результатов содержится в [44].

Я решаю здесь проблему поиска подходящих формулировок теорем дедукции для релевантных логик путем нахождения обобщенной единой формулировки теоремы дедукции для всех логических исчислений, замкнутых относительно правил MP и подстановки, и содержащих следующие принципы:

(1) $A \to A$ (*закон рефлексивности*)

(2) $A \to B \to .C \to A \to .C \to B$ (*закон слабой транзитивности*)

(3) $(A \to B) \to B$, где A - теорема T (*принцип утверждения следствия теоремы*).

Логические теории, содержащие в качестве аксиомных схем (1)-(3) и замкнутую относительно *MP*, будут в дальнейшем называться *D-теориями*. Пропозициональное исчисление, в котором имеют силу только обозначенные выше принципы и правила вывода, обозначим как D_{min}, имея в виду, что данная теория является минимальной из числа всех тех, которые здесь являются *D*-теориями[73].

Выбор составляющих D_{min} принципов обусловлен тем, что первая предлагаемая нами формулировка теоремы дедукции, если использовать ее как правило вывода, позволяет получить эти принципы уже в рамках пустой теории. Далее мы переформулируем теорему дедукции таким образом, чтобы она стала универсальной в том смысле, что была бы адекватна любой замкнутой относительно MP логической теории, начиная с пустой и заканчивая тривиальной (содер-

[73] Заметим, что D_{min} не нашлось места в интересной классификации импликативных логик, которую осуществил А.С. Карпенко [47]. Дело в том, что вместо (3) в его классификации фигурирует более слабый аналог $(A \to A \to B) \to B$.

жащей в качестве своих теорем все возможные утверждения соответствующего языка).

13.1. Стандартные и нормализованные выводы

Стандартным определением (логического) вывода из посылок (гипотез) будем называть:

D1. Логическим выводом высказывания (формулы) B из гипотез $\Gamma = \{A_1, ..., A_n\}$ ($n \geq 0$) в теории (исчислении) T называется конечная последовательность высказываний (формул) $B_1, ..., B_m$, ($m \geq 1$) такая, что последний член последовательности B_m совпадает с B, и для всякого B_i ($1 \leq i \leq m$) выполняется одно из следующих условий: (а) B_i есть одна из посылок из Γ ; или (б) B_i есть теорема[74] теории (исчисления) T ; или (в) B_i получается из двух предшествующих членов последовательности по правилу *MP (modus ponens)*; или (г) B_i представляет собой конъюнкцию двух предшествующих членов последовательности (по правилу адъюнкции: *RA*). ***Примечания***: (I) Если в теории T не имеет силы правило адъюнкции, то пункт (*г*) должен быть опущен. (II) B_i рассматривается в последовательности $B_1, ..., B_m$ как посылка или как теорема соответственно только тогда, когда B_i включено в последовательность именно в этом качестве.

Из D1 видно, что многие утверждения о выводимости могут быть получены при том, что в качестве T берется пустая теория. Ясно также, что при верности $\Gamma \vdash B$ всегда верным будет также и $\Gamma, A \vdash B$, где A берется совершенно про-

---

[74] Ссылка на теоремы позволяет ограничиться только двумя правилами вывода MP и правилом адъюнкции, не используя, в частности, правила подстановки и вообще никаких правил вывода от Γ к B, для которых в теории не имеет силы $\Gamma^{\&} \rightarrow B$.

извольно. Если, поэтому, вместе с $D1$ принять как правило вывода теорему дедукции (будем обозначать ее в этом случае как RDT)[75], то из $\Gamma, A \vdash B$, а значит, и из верного $\Gamma \vdash B$, мы всегда можем получить в качестве обоснованного $\Gamma \vdash A \rightarrow B$ для любого произвольно взятого A.

Такое положение вполне приемлемо, когда в качестве интерпретации для связки "$\rightarrow$" берется классическая материальная импликация. Пусть, однако, теория описывает импликацию (условную связку), предполагающую в отличие от материальной импликации некоторую содержательную связь между антецедентом и консеквентом условного высказывания, и в силу этого отвергает классический принцип $A \rightarrow. B \rightarrow A$. Тогда теорема дедукции, в приведенной выше форме, в качестве правила вывода оказывается совершенно несостоятельной.

При всем том нахождение какого-то подходящего аналога теоремы дедукции для теорий с неклассическими импликациями представляется чрезвычайно важным. Во-первых, эвристическая значимость этой теоремы очень высока, так как она позволяет, в частности, сводить проблему вывода формулы вида

$$\Gamma \vdash A_1 \rightarrow. A_2 \rightarrow. \ldots \rightarrow. A_n \rightarrow B$$

к зачастую куда более простой задаче нахождения вывода

$$\Gamma, A_1, A_2, \ldots, A_n \vdash B$$ [76].

---

75 При пустоте T определение $D1$ вместе с RDT позволяет получить все утверждения $\otimes B$, где B есть теорема позитивной импликативной интуиционистской логики.

76 Так как проблема разрешимости для неклассических теорий импликации часто оказывается нерешенной, важность возможности такого сведения вывода только возрастает.

Во-вторых, и это, пожалуй, главное, при отсутствии теоремы дедукции в некоторой теории трудно (я думаю, просто невозможно) обосновать содержательную оправданность предлагаемого этой теорией описания (формализации) условной связки. Хотя бы уже потому, что в естественных рассуждениях обоснование истинности условных высказываний осуществляется с помощью приема, равносильного применению теоремы дедукции.

Даже не знающий логики человек, когда от него требуется доказать истинность условного предложения вида "*Если A, то B*", считает достаточным продемонстрировать, что из некоторой совокупности предложений, которые по каким-то основаниям считаются истинными, и из *A* можно вывести *B*. Иными словами, мы имеем дело с тем самым косвенным выводом, который будучи воспроизведен в символической форме позволяет считать верным $\Gamma \vdash A \to B$ на основании верности $\Gamma, A \vdash B$.

И вот что важно отметить. В естественных рассуждениях за счет простого здравого смысла при использовании принципа дедукции избегают тех неуместных последствий, к которым могло бы привести применение *RDT* при его чисто формальном применении. Никому при обычном рассуждении не придет в голову обосновывать истинность $A \to B$ тем, что имеет силу $B, A \vdash B$, где *B* является верным[77].

[77] Вы не встретите в учебниках логики даже попыток экспликации тех условий, при которых в содержательных рассуждениях выводимость высказывания *B* из Γ и *A* позволяет считать верным условное высказывание "Если *A*, то *B*". Такую экспликацию чрезвычайно трудно осуществить без предложенного нами в предыдущем разделе различения сильных и слабых следствий из гипотез. При таком разли-

Строгая же экспликация условий корректного применения *RDT* в случае принятия *D1*, как показано в [7], является весьма нетривиальной проблемой, решение которой хотя и возможно, но малопригодно при работе с исчислениями.

Попытки адаптации и поиска подходящей формулировки теоремы дедукции для исчислений с неэкстенсиональной импликацией неизбежно связаны с использованием двух взаимосвязанных и взаимодополняющих возможностей. Одна состоит в поиске подходящей переформулировки стандартного определения вывода *D1*, а другая - в нахождении адекватных ограничительных условий, при которых от $\Gamma, A \vdash B$ можно переходить к $\Gamma \vdash A \to B$ с соответствующей импликацией.

В чем состоят недостатки такого подхода при поисках адекватной исчислению или хотя бы уместной для него теоремы дедукции? Они достаточно очевидны. К их числу относится, в первую очередь, тот, что определение логического вывода приходится менять в зависимости от свойств описываемой в исчислении импликации. И значит, принимать всякий раз новое понимание вывода не только в смысле логических принципов, на которые в выводе можно опираться (что в исчислениях, различных по классу описываемых в них принципов, вполне оправдано), но и в смысле самих норм построения вывода. Подобная релятивизация в понимании вывода выходит за рамки тех детерминаций, которые связаны со смыслом терминов объектного языка, и поэтому никак не может считаться достоинством. И дело даже не в том, что мы в таком случае будем иметь дело с *ad*

чении такая экспликация сводится к требованию, что никакое сильное следствие из B не должно выводиться из одного только Γ.

hoc определениями, но с тем, что последние могут оказаться весьма далекими от содержательного и используемого в естественных рассуждениях понимания вывода.

В рамках пустой теории, например, а значит, и любой теории вообще, в соответствии с *D1* имеет силу всякое утверждение вида

$$A \to .A \to B, A \vdash B \ (1).$$

Представим теперь, что имеются исчисления T_1 и T_2, для первого из которых утверждение

$$A \to A \to B \vdash A \to B \ (2)$$

является верным, а для второго - нет. Каким образом обосновать правомерность перехода от (1) к (2) в одном случае и неправомерность - в другом?

В принципе, конечно, можно для каждого исчисления рекурсивно описать весь класс верных для него утверждений вида $\Gamma, A \vdash B$, к которым применима теорема дедукции (см., например, [7, 44]). Но это мало что дает в практическом смысле, являясь по существу некоторой (секвенциального типа) переформулировкой исчисления, что никак не связано с реальными процедурами вывода.

Есть и иной путь, когда шаги стандартного вывода сопровождаются определенного типа анализом, позволяющим судить, может ли к соответствующей посылке быть применен принцип дедукции (см., например, [8]). Подобного рода анализ, однако, детерминирован некоторой предварительной идеологией и весьма трудно адаптируется к изменению класса доказуемых в исчислении теорем. Не случайно, по-видимому, авторы, использующие указанный подход, нередко признают из всех многочисленных теорий импликации правильной только одну, отказывая в законном существовании всем остальным.

Наша задача, как я уже говорил, состоит в том, чтобы дать такое определение логического вывода (мы будем называть его *нормализованным*) из данных посылок, которое обеспечило бы справедливость некоторой универсальной формулировки теоремы дедукции для большого множества логических исчислений. Причем это определение вывода должно быть таким, чтобы класс следствий из данных посылок Γ в силу принимаемого определения нормализованного вывода во всяком исчислении T был в точности тем же, что и в силу стандартного определения *D1*. Иначе говоря, классы утверждений вида $\Gamma \vdash B$, верных в T, должны совпадать независимо от того, к какому определению мы обратимся: стандартному или же нормализованному.

Нам потребуются некоторые предварительные соглашения.

Будем говорить, что *член B_i последовательности вывода $B_1, \ldots, B_m$ зависит от члена последовательности B_k* исключительно в случаях: (1) B_i совпадает с B_k, т.е. каждый член последовательности зависит от себя самого, или (2) B_k является одним из членов последовательности, из которых B_i получено по одному из правил вывода, или (3) B_i зависит от B_j, и B_j зависит от B_k (отношение зависимости *транзитивно*).

Установить, от каких членов последовательности $B_1, \ldots, B_m$ зависит тот или иной ее член B_i, очевидно можно в результате следующей простой процедуры. Сначала отмечаются те шаги вывода, на основании которых B_i получено непосредственно. Если таковые имеются (а они могут отсутствовать, когда B_i включено в последовательность как теорема или посылка и зависит только от себя самого), то отмечаются последовательно, пока процедура не закончится, шаги, на основании которых получены уже отмеченные члены последовательности. B_i зависит только от тех членов последовательности, которые окажутся отмеченными.

Сейчас мы введем понятие, центральное для всех дальнейших рассуждений о нормализованном выводе и основанной на нем теореме дедукции. Речь идет о нормализованном использовании правила модус поненс.

Использование правила MP *в последовательности вывода $B_1, \ldots, B_m$ формулы B из гипотез Γ в теории T* ***является нормализованным***, если и только если для каждого члена последовательности B_i ($i \leq m$), полученного из двух предшествующих членов последовательности B_k и B_l по правилу *MP*, выполнены следующие условия:

(а) если B_k - большая посылка *MP*, т.е. имеет вид $B_l \to B_i$, то она предшествует в последовательности меньшей посылке B_l;

(b) между членами последовательности вывода B_l и B_i (т.е., между меньшей посылкой и заключением *MP*) не находится никакой другой член последовательности B_k ($l \geq k \geq i$), если только B_k не получается по *MP* с той же малой посылкой B_l;

(с) меньшая посылка B_l не зависит ни от какой из гипотез, которая предшествует большей посылке $B_l \to B_i$.

Вся суть ограничений заключается, конечно, в условии (а), требующем упорядоченности посылок *MP*. Нарушение требования (а) без нарушения (с) возможно только в случае, когда предшествующая большей меньшая посылка является теоремой. Условие (b) вводится, чтобы блокировать возможность обойти некоторым образом смысл требования (а), выполнив его чисто формально.

Как это может быть сделано, мы можем увидеть из следующих примеров:

№1	№2
1. $A \to A$ (*теор.*)	1. $A \to C$ (*гипот.*)
2. A (*гипот.*)	2. A (*гипот.*)
3. $A \to B$ (*гипот.*)	3.
4. A (1, 2, MP)	$C \to C \vee B$ (*теор.*)
5. B (3, 4, MP)	4. C (1, 2, MP)
	5. $C \vee B$ (3, 4, MP)

Использование *MP* в обоих приведенных выводах, хотя оно и удовлетворяет условию (a), не является нормализованным. И в том, и в другом случаях шаг (4) после шага (3) приводит к нарушению (b). Оба этих вывода нарушают, очевидно, и (c). На (5) шагу *MP* применено к посылкам, только меньшая из которых зависит от гипотез, предшествующих большей посылке. Условие (b) может быть нарушено и без нарушения (c). Таким нарушением будет, в частности, запись сначала одной пары посылок *MP*, потом другой независимой от них, а затем запись результатов применения *MP* к той и другой. Не является нарушением (b) включение между меньшей посылкой и заключением результата MP при той же меньшей посылке. Большие посылки могут быть различными, но возможна и одна и та же большая посылка, так что повторение одного следствия применения *MP* возможно. Другое дело, что оба повторяющихся члена должны быть в дальнейшем использованы в выводе. Таким образом, не нарушающим требование (b) будут, например, следующие выводы:

№3

1. $A \to A$ (*теор.*)
2. $A \to B$ (*гипот.*)
3. A (*гипот.*)
4. A (1, 2, *MP*)
5. B (3, 4, *MP*)
6. AВ (4, 5, *RA*)

№4

1. $CC \to B$ (*гипот.*)
2. $A \to C$ (*гипот.*)
3. A (*гипот.*)
4.

C (1, 2, *MP*)

5. C (1, 2, *MP*)
6. CC (3, 4, *RA*)
7. B (1, 6, *MP*)

Теперь примеры выводов, которые удовлетворяют условию (b), но не (c).

№5

1. $C \to . A \to B$ (*гипот.*)
2. $C \to A$ (*гипот.*)
3. C (*гипот.*)
4. $A \to B$ (1, 3, *MP*)
5. A (2, 3, *MP*)
6. B (4, 5, *MP*)

№6

1. $A \to B \to A$ (*гипот.*)
2. $A \to B$ (*гипот.*)
3. A (1, 2, *MP*)
4. B (2, 3, *MP*)

Вывод №5 нарушает требование (c), так как шаг (6) делается при том, что малая посылка A (5) зависит от гипотез, предшествующих большей посылке $A \to B$ (4).

Вывод №6 также не удовлетворяет условию (c), так как малая посылка *MP* (шаг (3)) зависит от шага (1), предшествующего большей посылке.

D2. Нормализованным логическим выводом высказывания (формулы) B из посылок (гипотез) $\Gamma = \{A_1, ..., A_n\}$ ($n \geq$

0) в теории (исчислении) T называется конечная последовательность высказываний (формул) $B_1, ..., B_m$, ($m \geq 1$), которая является ***стандартным*** выводом $\Gamma \vdash B$ в силу **D1** и удовлетворяет следующим двум условиям:

(1) Правило *MP* (*modus ponens*) используется только в ***нормализованном*** виде.

(2) Формула B_m зависит от каждого члена последовательности $B_1, ..., B_m$.

Убедимся, что D2 несмотря на его серьезные отличия от определения D1 не изменяет класса следствий, получаемых из тех же посылок. Начнем с отсутствующего в D1 пункта (2). Он никак не может ограничить числа следствий, которые можно получать в соответствии с D1, так как запрещает лишь явное включение в последовательность тех формул, которые не играют никакой роли при получении следствий.

Теперь надо показать, что ограничение на *MP* также не сказывается на классе следствий из данных посылок. Пусть мы имеем вывод $B_1, ..., B_m$. Допустим, что в выводе имеет место ненормализованное использование *MP*. Посылки, к которым было применено правило, обозначим как $B_l \rightarrow B_i$ и B_l. Соответственно заключением будет B_i.

Начнем с проверки выполнения условия (b). При нарушении (b) между B_l и заключением B_i стоят одна или несколько формул последовательности $B_{k1}, ..., B_{km}$. Нормализованность применения *MP* относительно (b) достигается за счет перестановки всех перечисленных формул $B_{k1}, ..., B_{km}$ в том же порядке сразу вслед за B_i. После этого осуществляются необходимые изменения в анализе (нумерации шагов вывода, записи оснований для каждого шага).

После устранения в выводе всех нарушений условия (b) переходим к условию (a). Если (a) нарушено без нарушения (c), то меньшая посылка B_l представляет собой в этом случае теорему. Чтобы устранить ненормализованность, надо поставить эту же теорему после большей $B_l \rightarrow B_l$ перед заключением B_l. Шаг B_l, если он теперь не нужен в выводе, устранить. Осуществить необходимые изменения в анализе.

Теперь рассматриваем нарушения, связанные с условием (c). Если такое нарушение есть, то B_l зависит от некоторой гипотезы (или гипотез), которые предшествуют $B_l \rightarrow B_l$.

Выпишем все те члены последовательности, от которых зависит B_l, в порядке их вхождения, кончая самой малой посылкой B_l. Получившуюся в результате такой процедуры список формул включим в старую последовательность на место малой посылки, если она была ниже большей, и включим сразу после большей в противном случае[78]. В преобразованной последовательности удалим те повторяющиеся члены, устранение которых не влечет нарушения нормализации, и осуществим необходимые изменения в анализе. Поступим аналогичным образом со всеми другими нарушающими (c) ненормализованными применениями *MP*. В результате получим нормализованный вывод с теми же посылками и заключением, что и исходный вывод.

Обратимся к примерам. Рассмотренные выше выводы №5 и №6 превратятся соответственно в нормализованные выводы:

---

[78] Сама малая посылка B_l в этом случае остается пока на месте. Можно ли будет ее вычеркнуть, зависит от того, не повлечет ли такое вычеркивание несоответствий с определением нормализованного вывода и вывода вообще.

1. $C \to . A \to B$ (*гипот.*)
2. C (*гипот.*)
3. $A \to B$ (1, 2, *MP*)
4. $C \to A$ (*гипот.*)
5. C (*гипот.*)
6. A (4, 5, *MP*)
7. B (4, 5, *MP*)

1. $A \to B$ (*гипот.*)
2. $A \to B \to A$ (*гипот.*)
3. $A \to B$ (*гипот.*)
4. A (2, 3, *MP*)
5. B (1, 4, *MP*)

Заметим, что нормализацию вывода №5 удается осуществить только за счет вторичного использования гипотезы C. Забегая вперед, скажем, что это говорит о невозможности получить принцип самодистрибутивности импликации в пустой теории, как и в любой другой, где он недоказуем. Также дважды пришлось использовать одну и ту же гипотезу $A \to B$ (сначала как большую посылку *MP*, а затем как меньшую) для нормализации вывода №6.

Приведем еще один пример вывода и соответствующей его нормализации:

№7

1. $(A \to B)A \to (A \to B)$ (*теор.*)
2. $(A \to B)A \to A$ (*теор.*)
3. $(A \to B)A$ (*гипот.*)
4. $A \to B$ (1, 3, *MP*)
5. A (1, 3, *MP*)
6. B (3, 4, *MP*)

№8

1. $(A \to B)A \to (A \to B)$ (*теор.*)
2. $(A \to B)A$ (*гипот.*)
3. $A \to B$ (1, 3, *MP*)
4. $(A \to B)A \to A$ (*теор.*)
5. $(A \to B)A$ (*гипот.*)
6. A (2, 5, *MP*)
7. B (4, 6, *MP*)

Шаг 6 сделан в №7 с нарушением требования (с), так как зависит от шага 3, предшествующего большей посылке *MP*. Нормализация достигается за счет вторичного использования гипотезы. Это означает, что в теории, в которой нет принципа $(A \to B)A \to B$, даже при наличии правила MP, нельзя получить аналитической записи *MP* на основании теоремы дедукции.

Указав процедуру нормализации выводов, мы фактически доказали следующую универсальную для любого исчисления метатеорему:

MT1. Классы следствий из данных посылок, получаемые в любой теории *T* в силу D1 и D2, в точности совпадают.

Требование, которое мы выдвигали при построении определения нормализованного логического вывода, выполнено. Различие между D1 и D2 состоит только в том, что не всякая конечная последовательность $B_1, \ldots, B_m$, которая является выводом *B* из *Г* в смысле D1, является нормализованным выводом *B* из *Г* в смысле D2. При этом всякий нормализованный вывод является выводом в соответствии с D1, и всякий вывод *B* из *Г* в смысле D1 может быть нормализован.

13.2. Обобщенная теорема дедукции

Пусть последовательность $B_1, \ldots, B_m$ есть нормализованный вывод формулы *B* из гипотез *Г* в некоторой теории *T*. Выделим в этой последовательности такой ее член B_k с наименьшим индексом, после которого в выводе к членам последовательности, которые зависят от посылок, не использовалось правило адъюнкции RA. Пусть теперь A_1, ..., A_n есть все те члены последовательности, не обязательно различающиеся, которые в указанном порядке входят в нее в качестве посылок, начиная с шага B_k.

Пусть далее Γ_a - список всех тех посылок из Γ, которые были использованы в выводе до шага B_k. И, наконец, пусть Γ_o - список тех посылок из Γ, которые не использовались в выводе вообще.

Мы имеем, таким образом, три списка посылок Γ_a, Γ_o и A_1,..., A_n, которые в своей совокупности исчерпывают весь список Γ и каждый из которых в конкретном случае может быть пустым.

Выражение $\{\Gamma_o\}$, Γ_a, $\downarrow A_1,..., A_n \vdash B$ будем называть *нормализованной записью* утверждения $\Gamma \vdash B$ для нормализованного вывода B из Γ, имеющего вид B_1, ..., B_m. Записи $\Gamma_a,\downarrow A_1,..., A_n \vdash B$ и $\{\Gamma_o\},\downarrow A_1,..., A_n \vdash B$ говорят о пустоте соответствующего списка посылок. Запись вида C_1,..., $C_k,\downarrow A_1,..., A_n \vdash B$ показывает, что после посылок $C_1,...,C_k$ в выводе использовалось RA. При пустоте обоих списков Γ_o и Γ_a будем начинать нормализованную запись с вертикальной стрелки $\downarrow A_1,..., A_n \vdash B$, показывая тем самым, что ни после одной из гипотез в выводе не применялось правило RA. Запись $C_1,..., C_k,\downarrow \vdash B$ означает, что гипотез, после которых в выводе бы ни применялось правило RA, нет. Наконец, обычная запись (без стрелки) $A_1,..., A_n \vdash B$ говорит только о том, что из указанных посылок можно вывести B, но она не утверждает, что запись вывода нормализована.

Заметим, что число различных нормализованных выводов B из гипотез Γ в теории T может быть достаточно большим. Вместе с тем каждому нормализованному выводу соответствует всегда только одна (с точностью до порядка посылок в Γ_a и Γ_o) нормализованная запись.

МТ2 (*Теорема дедукции для D-теорий*). Если последовательность B_1, ..., B_m есть нормализованный вывод формулы B из гипотез Γ в некоторой D-теории T, и $\{\Gamma_o\}, \Gamma_a, \downarrow A_1,..., A_n \vdash B$ есть соответствующая этому выводу нормализованная запись утверждения $\Gamma \vdash B$, то в T имеет силу всякое утверждение:

$$\{\Gamma_o\}, \Gamma_a, \downarrow A_1,..., A_{i-1} \vdash A_i \rightarrow ... \rightarrow A_n \rightarrow B \ (1 \leq i \leq n)^{79}.$$

Напоминаем, что под D-теориями в МТ2 имеются в виду такие теории, которые не слабее, чем теория D_{min}, а значит, обязательно содержат следующие принципы: (1) $A \rightarrow A$; (2) $A \rightarrow B \rightarrow .C \rightarrow A \rightarrow .C \rightarrow B$; (3) $(A \rightarrow B) \rightarrow B$ (где A - некоторая теорема T) и правило вывода *MP*.

Прежде чем осуществить строгое доказательство МТ2, сначала дадим некоторые содержательные объяснения.

Сейчас, когда мы имеем формулировку теоремы дедукции, видно, что ограничение ее применимости рамками только таких D-теорий связано с возможностью построить для всех указанных принципов в любой теории (для принципа (3) она, конечно, не должна быть *пустой*) выводы, нормализованной записью которых будут соответственно: (1) $\downarrow A \vdash A$; (2) $\downarrow A \rightarrow B, C \rightarrow A, C \vdash B$; (3) $\downarrow (A \rightarrow B) \vdash B$ (где A - теорема теории) и которые поэтому всегда можно было бы получить с помощью принципа дедукции.

Рассмотрим несколько примеров, раскрывающих характерные особенности сформулированной теоремы дедук-

---

79 Ниже мы дадим строгое доказательство универсальной теоремы дедукции МТ3, из которой МТ2 может быть получена как следствие.

ции. Начнем с ограничения на применение правила адъюнкции. Рассмотрим утверждение

$$AB \to .C \to D, A, B, C \vdash D.$$

Соответствующим ему нормализованным выводом будет:

1. $AB \to .C \to D$ (*пос.*)
2. A (*пос.*)
3. B (*пос.*)
4. AB (2, 3, *RA*)
5. $C \to D$ (1, 4, *MP*)
6. C (*пос.*)
7. D (5, 6, *MP*)

Нормализованной записью этого вывода будет:

$$AB \to .C \to D, A, B, \downarrow C \vdash D.$$

Из этого следует возможность получить по теореме дедукции только

$$AB \to .C \to D, A, B\downarrow \vdash C \to D,$$

но не

$$AB \to .C \to D \vdash A \to .B \to .C \to D.$$

Обобщенно говоря, ограничения, связанные с использованием *RA*, не позволяют в нормализованных утверждениях о выводимости заменять в общем случае входящую в список посылок конъюнкцию списком ее составляющих. Такая замена возможна лишь при том, что в процессе вывода можно обойтись без конъюнктивного объединения посылок или зависящих от них формул по правилу *RA*, например при наличии в теории принципа экспортации. Видимо, уместно обратить внимание на то весьма неожиданное обстоятельство, что ограничения, связанные с *RA*, могут блокировать применение теоремы дедукции даже при том, что утверждение о выводимости содержит всего одну посылку. Так, скажем, в релевантных теориях теорема дедукции не может быть применена к утверждению $(A(C \to C) \to B)A \vdash B$, так как в них нельзя получить конъюнкцию $A(C \to C)$ без помощи RA.

Выше мы задавались вопросом, как при наличии теоремы дедукции получить возможность принимать принцип сокращения в одной системе и отвергать в другой при том, что уже в пустой теории справедливо всякое утверждение $A \to .A \to B, A \vdash B$. Посмотрим, каким образом блокируется применение к такому утверждению теоремы дедукции, когда в теории нет принципа сокращения. В соответствии с $D2$ вывод этого утверждения выглядит так:

1. $A \to .A \to B$ (*пос.*)
2. A (*пос.*)
3. $A \to B$ (1, 2, MP)
4. A (*пос.*)
5. B (3, 4, MP)

Определение $D2$, очевидно, не позволит нам избавиться от вторичного использования посылки A, так как требует, чтобы большая посылка предшествовала меньшей. В связи с этим нормализованной записью данного вывода будет:

$$\downarrow A \to .A \to B, A, A \vdash B,$$

а это значит, что теорема дедукции не позволяет осуществить сокращение повторяющегося члена импликации. Вместе с тем в теориях, где принцип сокращения $(A \to .A \to B) \to .A \to B$ верен, имеется возможность, используя его в выводе, обойтись однократным использованием посылок $A \to .A \to B$ и A, получив требуемое утверждение:

$$\downarrow A \to .A \to B, A \vdash B.$$

Нетрудно убедиться, что верное в релевантных исчислениях R и E утверждение:

$$A \to .C \to .A \to B, A, C \vdash B$$

является нормализованным для R, но не для E. Аналогично,

$$\downarrow A \to .B \to C, B, A \vdash B \quad \text{и} \quad \downarrow A, A \to B \vdash B$$

являются верными для R, но не для E. Причем блокирование от принятия неприемлемых для E утверждений достигается исключительно за счет упорядоченного использования посылок MP. В исчислении R это ограничение легко обходится за счет имеющегося здесь принципа $A \rightarrow .A \rightarrow B \rightarrow B$, который позволяет использовать посылки модуса в ином порядке.

Очевидно, что, имея дело с конкретными исчислениями, для каждого из них можно определить свое специальное понимание нормализованного вывода. Наибольший практический смысл при этом может иметь анализ и описание допустимых для тех или иных исчислений преобразований, которые применимы к нормализованным утверждениям о выводимости в различных исчислениях. Так, например, в случае исчисления E в утверждениях Γ_a, $\downarrow A_1, \ldots, A_n \vdash B$ можно менять местами посылки A_i и A_{i+1}, когда последняя имеет вид импликации. Этого нельзя делать в D_{min}, а в R порядок посылок $A_1, \ldots, A_n$ вообще не имеет значения. Для классических исчислений любое верное утверждение $A_1, \ldots, A_n \vdash B$ является нормализованным. Иными словами, $A_1, \ldots, A_n \vdash B$ и $\downarrow A_1, \ldots, A_n \vdash B$ здесь совпадают. Причина понятна. Во-первых, классический принцип $A \rightarrow .B \rightarrow A$ позволяет включить в последовательность вывода любую посылку. Во-вторых, так называемый закон экспортации

$$AB \rightarrow C \rightarrow .A \rightarrow .B \rightarrow C$$

дает возможность обойтись без правила адъюнкции. И в-третьих, в классической логике нет никаких ограничений на перестановку членов импликации: $A \rightarrow .B \rightarrow C$ и $B \rightarrow .A \rightarrow C$ здесь эквивалентны.

Рассматривая те возможности, которые дают разные исчисления при преобразованиях $\downarrow A_1, \ldots, A_n \vdash B$, можно получать сравнительные важные характеристики как самих исчислений, так и описываемых в них импликаций. Возможен также обратный путь. Идти от принятия некоторых правил преобразований нормализованных утверждений $\downarrow A_1, \ldots, A_n \vdash B$ к построению соответствующих им исчислений. Именно на этом пути я в свое время обнаружил, что между E и R лежит бесконечное множество промежуточных исчислений. Скажем, класс преобразований, допускаемый системой E, можно было бы дополнить уместным с содержательной точки зрения и не противоречащим идеологии этой системы разрешением сокращать повторяющиеся посылки в $A_1, \ldots, A_n$ не только, когда они стоят непосредственно рядом. Хотите получить бесконечное множество промежуточных между E и R систем, разрешите вычеркивать одинаковые посылки, когда они стоят через одну, через две, через три, и так далее. Такого типа преобразований E имеется множество. Можно, например, сближать одинаковые посылки влево, вправо, навстречу друг другу.

Перейдем к доказательству теоремы дедукции МТ2. Пусть в некоторой D-теории T существует нормализованный вывод $B_1, \ldots, B_m$ формулы B из гипотез Γ, которому соответствует утверждение $\Gamma_a \downarrow A_1, \ldots, A_n \vdash B$. Надо показать, что в этом случае верно всякое утверждение:

$$\Gamma_a, \downarrow A_1, \ldots, A_{i-1} \vdash A_i \rightarrow \ldots \rightarrow A_n \rightarrow B \ (1 \leq i \leq n).$$

Согласно принятым требованиям к нормализованным утверждениям в последовательности $B_1, \ldots, B_m$ после появления гипотезы A_1 правило RA не применяется. Исследуем все возможные случаи вида той части последовательности (назовем ее подпоследовательностью G_{km}), которая начинается с шага B_k, на котором в последовательность включена гипотеза A_n, и кончая последним шагом B_m, на котором мы имеем формулу B.

Чтобы избежать громоздкости доказательства, пойдем на некоторые упрощения, которые, однако, не снижают степени общности доказательства.

Исключим из рассмотрения те случаи, когда среди членов G_{km} встречаются формулы, являющиеся теоремами T и применяющиеся как малые посылки MP к членам G_{km}. Мы имеем возможность сделать это на следующем основании. В качестве большей посылки MP теорема T войти в G_{km} без нарушений нормализованности вывода не может. Положение, при котором теорема входит в G_{km} и является меньшей посылкой MP, возможно. Нас заботит здесь только тот случай, когда большая посылка MP также входит в G_{km}. Пусть дело обстоит таким образом, и в G_{km} входит пара членов последовательности $A_T \to C$ и A_T, где A_T - теорема. Тогда выше формулы B_k, где это не влечет нарушения нормализации вывода (таким местом в частности во всех случаях является первый шаг вывода), запишем шаг $A_T \to C \to C$ (теорема всякой D-теории), а шаг A_T вычеркнем. Вывод сохранит свою силу и никаких нарушений нормализованности вывода при этом не произойдет. Просто шаг, на котором получалось C, будет получаться теперь не из $A_T \to C$ и A_T, а из $A_T \to C \to C$ и $A_T \to C$. Одна теорема теории T будет заменена другой и не более того. Естественно, что надо будет осуществить необходимые изменения в анализе.

Можно утверждать теперь (и именно с этой целью вводилось рассмотренное упрощение), что никакой член подпоследовательности G_{km} не может быть большей посылкой MP. В противном случае было бы нарушено требование (c) нормализованного использования MP, согласно которому малая его посылка, которая неизбежно должна бы была последовать за большей, не должна зависеть от гипотез, предшествующих большей посылке.

Нам надо рассмотреть несколько следующих исчерпывающих случаев, касающихся возможной структуры G_{km}.

Случай 1. B_m совпадает с A_n. Тогда нормализованное утверждение имеет вид $\downarrow B \vdash B$. Теорема дедукции верна в силу того, что в каждой *D-теории* имеет силу $\vdash B \to B$.

Случай 2. A_n находится на шаге B_{m-1}. Тогда, в силу наших ограничений на *MP*, формула A_n может быть только *малой* посылкой этого правила, в результате применения которого получено B_m. Это значит, что в качестве большей посылки мог быть только член последовательности, имеющий вид $A_n \to B$. Но если формула $A_n \to B$ входит в последовательность вывода до гипотезы A_n, то эта формула является выводимой из Γ_a, $A_1,\dots, A_{n-1}$. Заметим, что $A_n \to B$ либо должна быть теоремой теории *T*, либо должна зависеть от всех остальных входяших в вывод гипотез Γ_a, $A_1,\dots,A_{n-1}$, так как в противном случае не выполнено было бы требование о зависимости заключения *B* от всех входящих в вывод формул. Таким образом, возможность, по крайней мере, однократного применения теоремы дедукции в случае 2 доказана.

Случай 3. Гипотеза A_n (шаг B_k) является меньшей посылкой *MP*, но не совпадает с B_{m-1}.

Рассмотрим сначала тот упрощенный вариант, когда между B_k и B_{m-1} имеется только одна промежуточная формула последовательности B_{k+1}, совпадающая с B_{m-1}.

Как мы знаем, большими посылками MP ни B_k, ни B_{k+1} быть не могут, потому что после них нельзя включать формул, зависимых от гипотез, а другие в подпоследовательность G_{km}, как было условлено, не входят. Для того, чтобы B_k и B_{k+1} можно было использовать в качестве малых посылок МР, в последовательности вывода G должны быть предшествующие шагу B_k члены последовательности $B_{k-1} \to B$ и $A_n \to B_{k+1}$. Причем именно в указанной порядке (не обязательно рядом). И так как в любой D-теории справедлива теорема транзитивности

$$B_{k+1} \to B \to . A_n \to B_{k+1} \to . A_n \to B,$$

из посылок Γ_a, $A_1, \dots, A_{n-1}$ может быть получен вывод формулы $A_n \to B$, что и требуется теоремой дедукции.

Случай 4. Этот случай является обобщением предыдущего случая 3 и предполагает, что между B_k и B_m лежит конечное число n промежуточных шагов.

Приведем пример такого вывода:

1. $D \to B$ (гипот.)
2. $A \to D$ (гипот.)
3. $A \to A \to . C \to A$ (гипот.)
4. $A \to A$ (*теор.*)
5. $C \to A$ (МР, 3, 4)
6. C (гипот.)
7. A (МР, 5, 6)
8. D (МР, 2, 7)
9. B (МР, 1, 8)

В приведенном примере число шагов между B_k (здесь это шаг 6) и B_m (шаг 9) равно 2.

Очевидно, как и в предыдущем случае, все члены последовательности от B_k до $B_{k\cdot n}$, где первый совпадает с гипотезой A_n, а последний с B_{m-1}, могут быть только малыми посылками МР. Без нарушений нормализованного использования МР это возможно, только если в последовательности G вывода имеются все формулы вида $B_i \to B_{i-1}$, где ($k \leq$ i $\leq m$), которые входят в последовательность (появляются в ней) в порядке убывания индекса i. Последними из их числа войдут в последовательность $B_{m-2} \to B_{m-1}$ и $B_{m-1} \to B_m$.

Так как для любой D-теории справедлив принцип транзитивности, мы имеем

$$B_{m-1} \to B_m \to . B_{m-2} \to B_{m-1} \to . B_{m-2} \to B_m.$$

Это обеспечивает нам выводимость $B_{m-2} \to B_m$ из гипотез, предшествующих $B_{m-2} \to B_{m-1}$ и $B_{m-1} \to B_m$. Применение принципа транзитивности позволяет далее получить из $B_{m-2} \to B_m$ и $B_{m-3} \to B_{m-2}$ утверждение $B_{m-3} \to B_m$ и так далее пока индекс i в формуле $B_i \to B_m$ не совпадет с k. Вывод формулы $B_k \to B_m$, совпадающей с $A_n \to B$, может быть осуществлен из формул, предшествующих гипотезе A_n, и поэтому имеет силу утверждение о выводимости $A_n \to B$ из гипотез $\Gamma_a, A_1, \ldots, A_{n-1}$.

Никаких иных случаев, связанных со структурой G_m, кроме четырех рассмотренных быть не может. Так что если бы формулировка МТ2 гласила, что верность

$$\Gamma_a, \downarrow A_1, \ldots, A_n \vdash B$$

влечет верность

$$\Gamma_a, A_1, \ldots, A_{n-1} \vdash A_n \to B,$$

то теорему уже можно было бы считать доказанной. Мы же должны доказать верность более сильного утверждения:

$$\Gamma_a, \downarrow A_1, \ldots, A_{i-1} \vdash A_i \to \ldots \to . A_n \to B \ (1 \le i \le n).$$

Собственно, надо показать, что нормализованная последовательность вывода $B_1, \ldots, B_m$ формулы B из $\Gamma_a, A_1, \ldots, A_n$ может быть преобразована в нормализованную последовательность $C_1, \ldots, C_r$, которой будет соответствовать

$$\Gamma_a, \downarrow A_1, \ldots, A_{n-1} \vdash A_n \to B.$$

При доказательстве того, что принцип дедукции применим к последней посылке A_n, мы видели, что $A_n \to B$ или непосредственно предшествовала посылке A_n или могло быть получено из предшествующих посылке формул с помощью имеющихся в теории D_{mm} теорем. В первом случае требуемый нормализованный вывод $C_1, \ldots, C_r$, обеспечивающий вывод $A_{n-1} \to A_n \to B$ из Γ_a, $A_1, \ldots, A_{n-2}$, мы получим, ограничив последовательность шагом, на котором получено $A_n \to B$. Во втором - поставив на место формулы A_n заключительную формулу $A_n \to B$ и включив в вывод соответствующие теоремы.

Так мы можем поступать после каждого применения принципа дедукции, заканчивая той использованной гипотезой, после которой не было использовано правило адъюнкции. И именно то, что и требовалось доказать.

Нам теперь остается показать, что МТ2 адекватна любой *D-теории* в смысле следующей метатеоремы:

МТ3. (*Теорема адекватности*). Утверждение $\Gamma \vdash A \to B$ верно во всякой *D-теории*, если и только если существует нормализованная последовательность G вывода B из посылок Γ и A, которой соответствует нормализованное утверждение $\Gamma, \downarrow A \vdash B$.

Действительно, раз существует вывод $A \to B$ из Γ, этот вывод всегда можно нормализовать (МТ1). Конечной формулой последовательности нормализованного вывода будет $A \to B$. Добавив к этой последовательности A (как посылку) и B (как результат *MP*), мы получим нормализованный вывод B из Γ и A, а значит требуемое $\Gamma, \downarrow A \vdash B$. Обратное утверждение получается на основании МТ2.

МТ3 показывает, что в определении нормализованного вывода и в условиях применения теоремы дедукции МТ2 не содержится каких-либо ограничений, по причине которых при верности $\Gamma \vdash A_1 \to \ldots \to A_n \to B$ не имело бы тем не менее силы утверждение $\Gamma_a, \downarrow A_1, \ldots, A_n \vdash B$.

Подозрение, что такое возможно, связано с требованием зависимости заключения от всех входящих в вывод гипотез, тогда как многие импликативного вида теоремы исчислений таковы, что их консеквенты сами являются теоремами и могут быть получены без участия антецедентов.

Возьмем, например, верное во всех D-теориях утверждение:

$$\vdash A \to B \to .B \to A \to .B \to B.$$

Можно убедиться, что соответствующее утверждение

$$\downarrow A \to B, B \to A, B \vdash B$$

является верным. Об этом говорит следующая последовательность формул:

1. $A \to B$ (пос.)
2. $B \to A$ (пос.)
3. B (пос.)
4. A (2, 3, MP)
5. B (1, 4, MP)

Верным будет также получающееся после применения принципа дедукции к $\downarrow A \to B, B \to A, B \vdash B$ утверждение

$$\downarrow A \to B, B \to A \vdash B \to B.$$

Соответствующий последнему нормализованный вывод получается из вывода, приведенного выше, включением в последовательность вывода теоремы $A \to B \to .B \to A \to .B \to B$ и вместо шагов (3)-(5) на последнем шаге формулы $B \to B$.

Конечно, на практике строить выводы, в которых следствие входит в число посылок или число теорем, не имеет никакого смысла. Однако подобные выводы могут оказаться полезными для внутренних целей теории. И главное, они вполне законны, так как являются подстановочными случаями нормальных выводов. Так в нашем случае - это подстановочный случай вывода B из $A \to B$, $C \to A$ и C, где вместо C, которое может быть произвольным, стоит B.

Нам важно было показать, и мы это сделали, что сформулированная нами теорема дедукции принципиально не допускает случая, при котором могло бы быть верным $\Gamma \vdash A \to B$, но не было бы таковым $\Gamma, \downarrow A \vdash B$.

13.3. Универсальная теорема дедукции

Формулировка *универсальной теоремы дедукции*, которую нам предстоит дать теперь, потребует дополнительных терминологических соглашений.

Пусть последовательность $B_1, \ldots, B_m$ есть нормализованный вывод формулы B из гипотез Γ в некоторой теории T. Будем говорить, что формула последовательности, находящаяся на шаге B_i и являющаяся гипотезой, *блокирована для дедукции*, если и только если имеет место по крайней мере одно из следующих *блокирующих условий*:

(b1) если B_i является первой по счету гипотезой, входящей в последовательность, и не использована в выводе в качестве большей посылки;

(b2) после шага B_i в выводе к зависящим от гипотез формулам было применено правило адъюнкции *RA*;

(b3) после шага B_i имеет место заключение по *MP* при том, что в качестве малой посылки выступает теорема теории, а в качестве большей зависящая от гипотез формула;

(b4) после шага B_i имеет место заключение по *MP*, в качестве малой посылки которого выступает зависящая от гипотез формула A, а большей посылкой служит член последовательности, предшествующий всем тем гипотезам, от которых зависит A.

Пусть последовательность B_1, ..., B_m есть нормализованный вывод формулы B из гипотез Γ в некоторой теории T. Выделим в этой последовательности шаг B_k, на котором находится гипотеза с наименьшим индексом, которая не блокирована для дедукции. Пусть теперь A_1, ..., A_n есть все те члены последовательности, не обязательно различающиеся, которые в указанном порядке входят в нее в качестве гипотез, начиная с шага B_k включительно.

Пусть далее Γ_b - список всех тех (блокированных) гипотез из Γ, которые были использованы в выводе до шага B_k. И, наконец, пусть Γ_o - список тех посылок из Γ, которые не использовались в выводе вообще.

Мы имеем, таким образом, три списка гипотез Γ_b, Γ_o и A_1,..., A_n, которые в своей совокупности исчерпывают весь список Γ и каждый из которых в конкретном случае может быть пустым.

Выражение $\{\Gamma_o\}, \Gamma_b, \uparrow A_1,..., A_n \vdash B$ будем называть нормализованной *записью* утверждения $\Gamma \vdash B$ для нормализованного вывода B из Γ, имеющего вид B_1, ..., B_m. Список Γ_o будем опускать. Запись $\uparrow A_1, ..., A_n \vdash B$ в отличие от записи $\Gamma_b, \uparrow A_1, ..., A_n \vdash B$ говорит о пустоте Γ_b и, значит, о том, что ни одна из посылок не блокирована для вывода. В свою очередь, запись $\Gamma_b, \uparrow \vdash B$ говорит, что все использованные в выводе гипотезы (при данном построении вывода) блокированы для дедукции. Наконец, обычные записи $\Gamma_b, A_1, ..., A_n \vdash B$ и $A_1, ..., A_n \vdash B$ говорят о том, что из указанных гипотез можно вывести B, но не утверждается, что запись вывода нормализована.

Заметим еще раз, что число различных нормализованных выводов B из гипотез Γ в теории T может быть достаточно большим. Иными словами, одно и то же заключение из данных гипотез может быть получено различными путями. Вместе с тем каждому нормализованному выводу соответствует всегда только одна (с точностью до порядка посылок в Γ_b и Γ_a) нормализованная запись.

Теорема дедукции выглядит следующим образом:

МТ4 (*Универсальная теорема дедукции*[80]). *Если* последовательность $B_1, \ldots, B_m$ есть нормализованный вывод формулы B из гипотез Γ в некоторой теории T, и $\Gamma_b, \uparrow A_1, \ldots, A_n \vdash B$ ($n \geq 1$) есть соответствующая этому выводу нормализованная запись утверждения $\Gamma \vdash B$, то в T имеет силу утверждение:

$$\Gamma_b, \uparrow A_1, \ldots, A_{i-1} \vdash A_i \to \ldots \to A_n \to B \; (1 \leq i \leq n).$$

Прежде чем дать строгое доказательство теоремы МТ4, рассмотрим некоторые характерные ее особенности. В частности, какова роль принятых нами блокирующих ограничений.

Первое блокирующее ограничение, по существу, имеет смысл только для тех теорий, в которых отсутствует закон

80 Стоит во избежание недоразумений повторить, что речь идет об исчислениях, замкнутых относительно *MP*. Универсальность обеспечивается в определенной мере тем, что в D1 и в D2 фигурируют ссылки на теоремы T, а не на аксиомы, так как в последнем случае, ограничиваясь в выводе указанными правилами, мы утратили бы возможность говорить об исчислениях, в которых исходными правилами вывода являются какие-нибудь отличные от стандартных. Например, правило, разрешающее вывод $C \to A \to .C \to B$ из $A \to B$ при отсутствии самого принципа транзитивности $A \to B \to .C \to A \to .C \to B$. Нам нет необходимости включать такого рода правила в определение вывода, так как мы можем использовать сразу нужную теорему.

рефлексивности. В этом случае вывод, состоящий из одного шага

$$1.\ B\ (\textit{гипот.})$$

не дает возможности воспользоваться теоремой дедукции. Если же в T верно $\vdash B \to B$, то такую возможность открывает вывод:

$$1.\ B \to B\ (\textit{теорема})\ 2.\ B\ (\textit{гипот.})\ 3.\ B\ (1, 2, MP).$$

Ясно поэтому, что в случае пустоты теории утверждение вида $\uparrow A_1 \vdash A_2 \to \ldots \to A_n \to B$ является заведомо неверным. В пустой теории могут быть верными исключительно выражения вида:

$$A_1 \to \ldots \to A_n \to B,\ \uparrow A_1, \ldots, A_n \vdash B$$

и те, которые получаются из них по теореме дедукции вплоть до утверждения

$$A_1 \to \ldots \to A_n \to B \vdash A_1 \to \ldots \to A_n \to B.$$

Так что можно было бы сказать, что в пустой теории первая в выводе посылка всегда блокирована для вывода. Отказ от блокирующего условия (b1) делает теорему дедукции верной только для тех теорий, которые содержат принцип рефлексивности. Наличие последнего, естественно, не исключает, что первая в последовательности вывода гипотеза может быть блокирована по иным основаниям.

Блокирующее ограничение (b2), связанное с правилом адъюнкции *RA*, уже было рассмотрено в предыдущем параграфе, когда была сформулирована теорема дедукции для *D*-теорий. Там оно не называлось блокирующим ограничением, но теорему дедукции применять к гипотезам нормализованного вывода, если после их появления в последовательности вывода использовалось *RA*, по причинам, которые были объяснены, запрещалось.

Надо сказать, что именно такое запрещение, связанное, как это ясно, с ориентацией на релевантную логику, где не имеет силы закон экспортации, позволяющий переходить от $AB \to C$ к $A \to .B \to C$, привело к идее блокирующих дедукцию ограничений вообще.

Обратимся к блокирующему ограничению (b3). Оно исключает применение принципа дедукции к гипотезе вида $A \to C$, где A теорема теории, в которой осуществляется вывод, если C появляется в выводе на основании этой гипотезы в качестве большей посылки MP. Таким образом в теории, в которой для теоремы A не имеет силы принцип $(A \to C) \to C$, не будет верным утверждение:

$$\uparrow(A \to C) \vdash C.$$

В теории, в которой $(A \to C) \to C$ есть теорема, ограничение (3) силы не имеет, так как его можно обойти, получая C за счет использования этой теоремы и посылки $(A \to C)$. Таким образом, при отказе от ограничения (b3) теорема дедукции верна для всех тех теорий, где верна указанная теорема.

Блокирующее ограничение (b4) имеет смысл для теорий, в которых нет слабого принципа транзитивности $A \to B \to .C \to A \to .C \to B$. Обратимся к выводу:

1. $A \to B$ (*гипот.*)	4. A (2, 3, MP)
2. $C \to A$ (*гипот.*)	5. B (1, 4, MP)
3. C (*гипот.*)	

Нормализованной записью этого вывода будет:

$$A \to B,\ C \to A,\ C\uparrow \vdash B.$$

Мы не можем поставить вертикальную стрелку "$\uparrow$" ни перед одной из гипотез, так как уже последняя из них C в силу (b4) блокирована для дедукции, поскольку в выводе после нее стоит формула A, являющаяся малой посылкой MP, а большей его посылкой является формула $A \to B$, которая предшествует гипотезам $C \to A$ и C, от которых только и зависит малая посылка. То же самое происходит и в том случае, когда на месте шага (1) стоит некоторая теорема теории. Пусть, например, B имеет вид $A \vee B$ и $A \to A \vee B$ есть теорема. Тогда нормализованной записью вывода будет: $C \to A, C \vdash A \vee B$, и утверждение $\uparrow C \to A, C \vdash A \vee B$ по-прежнему будет неверным.

Ограничение (b4), возможно, выглядит достаточно искусственным и непонятным по своим основаниям. На самом деле оно блокирует возможность преобразовать утверждение вида $\Gamma, \uparrow A \vdash B$ в утверждение $\Gamma, \uparrow C \to A, C \vdash B$, если в теории нет указанного закона транзитивности. В более общем смысле (b4) делает невозможным переход от $\Gamma, A \vdash B$ и $\Delta \vdash A$ к $\Gamma, \Delta \vdash B$. Иначе говоря, это ограничение не позволяет включать в последовательность вывода вместо гипотезы некоторый самостоятельный ее вывод.

Совокупность ограничений, блокирующих применение принципа дедукции, приводит к тому, что МТ4, в отличие от МТ2, сформулированной для D-теорий, становится универсальной теоремой дедукции, так как позволяет в результате применения теоремы (принципа) дедукции получать только те утверждения вида $\vdash B$, которым соответствуют теоремы той теории, в которой осуществляется вывод. В пустой теории список таких утверждений будет пуст. Напомним, что в пустой теории всегда будет верным всякое утверждение вида (и только такого вида):

$$A_1 \to A_2 \to \ldots \to A_n \to B, \uparrow A_1, A_2, \ldots, A_n \vdash B \ (n \geq 0).$$

Доказательство МТ4.

Пусть в некоторой теории T (возможно, пустой) существует нормализованный вывод $B_1, \ldots, B_m$ формулы B из гипотез Γ, которому соответствует нормализованное утверждение $\Gamma_b \uparrow A_1, \ldots, A_n \vdash B$. Надо показать, что в этом случае верно всякое утверждение:

$$\Gamma_b, \uparrow A_1, \ldots, A_{i-1} \vdash A_i \to \ldots \to A_n \to B \; (1 \leq i \leq n)$$ [81].

Доказательство будем вести по исчерпывающим случаям. Согласно принятым требованиям к нормализованным утверждениям в последовательности $B_1, \ldots, B_m$ после появления гипотезы A_1 никакие ограничения, блокирующие гипотезы, силы не имеют. Рассмотрим ту часть последовательности (назовем ее подпоследовательностью G_{lm}), которая начинается с шага B_l, на котором в последовательность включена гипотеза A_n, и кончается последним шагом B_m, на котором мы имеем формулу B. Покажем, что эта подпоследовательность всегда состоит только из двух членов B_{m-1} и B_m, совпадающих с A_n и B соответственно.

Убедимся сначала, что подпоследовательность G_{lm} не может состоять всего из одного члена, т.е. что B_m не может совпасть с гипотезой A_n. Это ясно из того, что A_n в таком случае была бы единственной гипотезой, совпадая с A_1 при пустом списке неблокированных гипотез, от которых зависит совпадающее с этой гипотезой заключение B_m. Весь вывод состоит из единственного шага B_m, где $m = 1$. Но тогда B_m в силу блокирующего ограничения b1 не может входить в последовательность как гипотеза, поскольку указанное

[81] Коррективы, которые надо внести в доказательство МТ3 при пустоте Γ_b, видны из формулировки самой теоремы.

ограничение требует, чтобы первая гипотеза последовательности была использована как меньшая посылка.

Гипотеза A_n во всех случаях может быть только меньшей посылкой. Если бы она была большей посылкой, то после нее должна была бы находиться меньшая. Если бы при этом меньшая была теоремой, то было бы нарушено блокирующее ограничение b3. А если бы меньшая зависела от гипотез, то было бы нарушено условие (с) нормализованного использования *MP*.

Чтобы доказать, что между формулами B_l (она же A_n) и B_m не может находиться ни одна промежуточная формула последовательности B_{l+1}, убедимся, что после B_l невозможно включить в последовательность никакую формулу B_{l+1}, отличную от последней формулы B_m. Исследуем все возможные случаи.

Случай 1. Допустим, что B_{l+1} является теоремой и используется как меньшая посылка *MP*. Большая посылка при этом от гипотез зависеть не может, так как это нарушило бы b3. Если же большая посылка от гипотез не зависит, являясь теоремой, то результатом МР будет опять-таки теорема. При этом в нарушение требований нормализованного вывода формула B_m не будет зависеть от B_{l+1}. Таким образом, теоремой и меньшей посылкой B_{l+1} быть не может. Не может B_{l+1} быть также теоремой и большей посылкой. Действительно, если меньшей посылкой является теорема, то от B_{l+1} не будет зависеть B_m, а если меньшей посылкой будет зависящая от гипотез формула, то это нарушит требование (с) нормализованного использования *MP*.

Случай 2. B_{l+1} зависит от гипотез. Включить B_{l+1} в последовательность вывода можно было бы в этом случае исключительно за счет применения *MP*. При этом малой посылкой могла бы быть только гипотеза A_n, так как в противном случае было бы нарушено условие (b) нормализованного использования MP, согласно которому не должно быть никаких членов последовательности между меньшей посылкой и заключением. Чтобы B_m зависело от B_{l+1}, последнее должно быть использовано как одна из посылок MP. Большей посылкой B_{l+1} быть не может, потому что после нее нельзя включать ни формул, зависимых от гипотез (условие (c)), ни теорем (b3).

Остается рассмотреть последнюю возможность, при которой B_{l+1} является меньшей посылкой. Это означает, что в последовательности вывода имеются предшествующие B_l формулы $A_n \to B_{l+1}$ и $B_{l+1} \to B_{l+2}$, где B_{l+2} формула, от которой зависит B_m (возможно совпадая с ней) и которая получается по MP из $B_{l+1} \to B_{l+2}$ и B_{l+1}. Теперь если две указанные импликации $A_n \to B_{l+1}$ и $B_{l+1} \to B_{l+2}$ входят в вывод в указанной последовательности, то оказывается нарушенным условие (c), так как B_{l+1} зависит от $A_n \to B_{l+1}$. Если порядок иной, то нарушенным оказывается блокирующее ограничение b4. Таким образом, случай 2, как и случай 1, оказывается невозможным.

Следовательно, A_n всегда находится на шаге B_{m-1}. В силу наших ограничений на MP формула A_n может быть только малой посылкой этого правила, в результате применения которого получено B_m. Это значит, что в качестве большей посылки мог быть только член последовательности имеющий вид $A_n \to B$. Но если формула $A_n \to B$ входит в последовательность вывода до гипотезы A_n, то, значит, она является выводимой из Γ_a, $A_1, \ldots, A_{n-1}$. Заметим сразу, что $A_n \to B$ не может не зависеть ото всех остальных гипотез Γ_a, $A_1, \ldots, A_{n-1}$, так как в противном случае не выполнено было бы требование о зависимости заключения B (которое получается из $A_n \to B$ и A_n в один шаг) от всех гипотез. Таким образом, возможность по крайней мере однократного применения теоремы дедукции доказана.

Мы же должны доказать теперь верность более сильного утверждения:

$$\Gamma_b, \uparrow A_1, \ldots, A_{i-1} \vdash A_i \to \ldots \to A_n \to B \ (1 \le i \le n).$$

Нам надо показать, что нормализованная последовательность вывода $B_1, \ldots, B_m$ формулы B из $\Gamma_b, A_1, \ldots, A_n$ может быть преобразована в нормализованную последовательность $C_1, \ldots, C_r$, которой будет соответствовать:

$$\Gamma_b, \uparrow A_1, \ldots, A_{n-1} \vdash A_n \to B.$$

При доказательстве того, что принцип дедукции применим к последней посылке A_n, мы видели, что формула $A_n \to B$ или сама предшествовала посылке A_n, или ее можно было получить из предшествующих посылке формул с помощью имеющихся в теории T теорем. В первом случае требуемый нормализованный вывод $C_1, \ldots, C_r$, обеспечивающий вывод $A_{n-1} \to A_n \to B$ из $\Gamma_b, A_1, \ldots, A_{n-2}$, мы получим, ограничив последовательность шагом, на котором получено $A_n \to B$. Во втором - поставив на место A_n заключительную формулу $A_n \to B$ и включив в вывод соответствующие теоремы.

Так мы можем поступать после каждого применения принципа дедукции.

Нам остается показать, что МТ4 адекватна любой теории T в смысле следующей метатеоремы:

МТ5. (*Теорема адекватности*). Утверждение $\Gamma \vdash A \to B$ верно во всякой теории T, если и только если существует нормализованная последовательность G вывода B из посылок Γ и A, которой соответствует нормализованное утверждение $\Gamma,\uparrow A \vdash B$.

Действительно, раз существует вывод $A \to B$ из Γ, его всегда можно нормализовать (МТ1). Конечной формулой последовательности нормализованного вывода будет $A \to B$. Добавив к этой последовательности две формулы: A (как посылку) и B (как результат *MP*), мы получим нормализованный вывод B из Γ и A, а значит, требуемое $\Gamma,\uparrow A \vdash B$. Обратное утверждение получается на основании МТ4. Таким образом, МТ5 доказана.

МТ5, как и аналогичная доказанная ранее МТ3, показывает, что в определении нормализованного вывода и в условиях применения теоремы дедукции МТ4 не содержится каких-либо ограничений, по причине которых при верности $\Gamma \vdash A_1 \to \ldots \to A_n \to B$ не имело бы тем не менее силы утверждение $\Gamma,\uparrow A_1, \ldots, A_n \vdash B$.

13.4. Общие замечания

Теперь, когда у нас есть универсальная формулировка теоремы дедукции фактически для любых логических исчислений, имеет смысл вернуться к одному сделанному выше замечанию. В нем речь шла о том, что теория импликации, для которой не удается найти подходящей формулировки теоремы дедукции, не может претендовать на содержательную оправданность предлагаемого этой теорией описания (формализации) следования или условной связки. Становится ли сейчас это замечание излишним. Я думаю оно приобретает теперь иной смысл. Да, мы можем сформулировать теорему дедукции для любой теории, но по характеру ограничений, блокирующих применение теоремы дедукции, от которых (ограничений) исследуемая теория принципиально не позволяет отказаться, можно составить представление о том, насколько адекватно описывает эта теория ту содержательно или формально трактуемую импликацию, условную связку, следование, на формализацию свойств которых претендует.

В заключение настоящего раздела одно замечание, на которое заставил меня обратить внимание Попов В.М. Речь идет о двух возможных подходах в определении вывода при формулировке теоремы дедукции для конкретных логических систем. Подход, который я провозгласил в самом начале, исходил из следующих предпосылок.

Во-первых, существует некоторое независимое от логической системы и используемое в практике повседневных рассуждений понимание вывода из гипотез, которое разрешает использовать гипотезы, их конъюнкции и правило MP для получения выводов, опираясь или даже не опираясь на какие-либо дополнительные логические средства. Это понимание вывода эксплицируется стандартным определением вывода.

И во-вторых, изменения в понятии вывода, связанные с потребностью сформулировать теорему дедукции для той или иной системы, не должны сужать класса тех следствий из гипотез, которые могут быть получены в соответствии со стандартным выводом.

Аргументировать такую позицию довольно просто. Было бы странно, вооружившись некоторой логической теорией получать следствий меньше, чем это можно в отсутствии оной.

Именно основанный на этих двух предпосылках подход и был здесь реализован. В результате теорема дедукции имеет формулировку такую, что верность в некоторой логической системе утверждения $\Gamma, A \vdash B$, как мы видели, совсем не обязательно гарантирует нам верность в ней $\Gamma \vdash A \to B$ для описываемой в системе импликации. Иначе говоря, применение теоремы дедукции требует у нас не просто выводимости B из Γ и A, но выводимости при определенных требованиях. Так как в общем случае может оказаться, например, что A вообще не требуется для вывода B.

Возможен, однако, и является более часто встречающимся другой подход, при котором ставится задача такого определения вывода для конкретной теории T, при котором никакое утверждение $\Gamma, A \vdash B$ не будет являться в T верным, если при этом в T не имеет силы $\Gamma \vdash A \to B$.

Лично мне тот подход, который я здесь использовал, по ряду причин, на которые я уже обращал внимание, кажется более предпочтительным. Во всяком случае тогда, когда стоит задача нахождения подходящей теоремы дедукции для уже имеющихся систем. Вместе с тем мы всегда можем преобразовать такой подход во второй. Дело в том, что для каждой логической системы T мы всегда можем сформулировать такое определение вывода, при котором утверждение $\Gamma, A \vdash B$ будет считаться верным, лишь когда оно удовлетворяет тем условиям, при которых к нему применима теорема дедукции.

Так, например, можно запретить применение теоремы дедукции к гипотезе, после появления которой в выводе использовалось правило адъюнкции, а можно запретить использовать в выводе правило адъюнкции к формулам, зависимым от гипотез. Тогда в формулировке теоремы дедукции введение соответствующего ограничения лишается смысла, ибо выводов, под него подпадающих, просто не окажется. Таким образом, первый, т.е. принятый здесь подход, легко трансформировать для каждой логической системы во второй. Трудно представить вместе с тем, как этот второй подход, с его индивидуальным приспособлением к каждой конкретной системе, мог бы привести даже к идее формулировки обобщенной, не говоря уже об универсальной. теоремы дедукции.

В рамках конкретных примеров сказанное можно проиллюстрировать следующим образом. При первом подходе в любой релевантной системе мы имеем утверждение $A,B\vdash AB$, а при нормализованной его записи $A,B\uparrow\vdash AB$. Иначе говоря, можем вывести из гипотез их конъюнкцию но не можем воспользоваться теоремой дедукции, так как указанную конъюнкцию нельзя получить без использования правила адъюнкции и, значит, обе гипотезы блокированы для дедукции. При втором подходе мы вынуждены будем признать неверным уже сам вывод $A,B\vdash AB$. Если же мы не принимаем вообще никакой фиксированной логики, имея, так сказать, пустую теорию или теорию, в которой есть правило MP, то в ней при этом втором подходе, будучи последовательным, нельзя было бы считать верным ни $A\rightarrow B,A\vdash B$, ни даже $A\vdash A$. Что выглядело бы довольно-таки странным. Таким образом, уверенность в преимуществе первого подхода не кажется безосновательной. Неприменимость теоремы (принципа) дедукции к утверждению $\Gamma,A\vdash B$ не должна быть аргументом против принятия этого утверждения как верного, так как такая неприменимость может быть следствием определенной трактовки импликации. Вполне возможно, что $\Gamma,A\vdash B$ не позволяет считать верным $\Gamma \vdash A \rightarrow B$ для необходимой релевантной импликации, но позволяет считать таковым как $\Gamma \vdash A \supset B$, так даже и $\Gamma \vdash A \Rightarrow B$ для обычной условной связки. Ясно, что все три эти импликации могут фигурировать в языке одной теории, так что $\Gamma, A \vdash B$ во всех случаях пришлось бы считать верным несмотря на то, что теорема дедукции имеет силу только для одной из этих импликаций.

Вместе с тем второй подход, по-видимому, может оказаться плодотворным [см., например, 56], когда на базе теоремы дедукции и определении вывода задаются смысл и взаимоотношения логических связок, кванторов, модальностей некоторого нового языка и формализующей его теории.

Заключение

Хотя в настоящей книге практически все время говорится о релевантной логике, на самом деле, главным ее предметом является двухуровневая реляционная семантика S^{ea}. Тот факт, что эта семантика адаптирована и применена здесь к релевантной логике, нисколько не отменяет самостоятельной ее ценности. Именно применимость предложенной семантики к релевантным рассуждениям, подтверждающая ее возможности описания неэкстенсиональных, содержательных связей, говорит о серьезном ее эвристическом потенциале.

Мы предложим здесь некоторый вариант философского применения двухуровневой семантики и рассмотрим схематично попытку представить возможные миры как модели познания реального, онтологического мира. Кстати сказать, философское использование двухуровневой семантики не требует тех скрупулезных технических решений, которые были вызваны в основном попытками сделать эту семантику адекватной тому или иному логическому исчислению. Адаптация семантики к исчислениям не более чем свидетельство ее логической квалификации. По сути достаточно того, что эта семантика позволяет разделять в эпистемически толкуемых возможных мирах (универсумах рассуждений) эмпирическую и теоретическую составляющие.

Примем несколько соглашений. Мы полагаем, что существует некоторый единственный *онтологический мир* (с его уникальной историей и с нереализовавшемся пока его будущим), в котором осуществляет свою познавательную деятельность *субъект познания*.

В качестве последнего может выступать кто и что угодно. Это может быть отдельный индивид, коллектив исследователей, научное сообщество, человечество и даже некоторое техническое устройство. Единственное требование, которое мы предъявляем к субъекту познания, состоит в том, что он умеет строить (или от его имени могут строиться) высказывания об онтологическом мире и может оценивать последние хотя бы в некоторых случаях как *истинные* или *ложные*. Не уточняя, какой смысл вкладывался в эти понятия, будем считать, что субъект познания считает *истинными те* утверждения, которые он по каким-то причинам относит к числу тех, которые правильно описывают свойства и отношения, присущие объектам онтологического мира, и соответственно считает *ложными* те утверждения, отрицания которых он считает истинными.

Субъект познания будем именовать *познавателем*. Нам при этом не важно, считает ли себя познавателем сам субъект познания. Достаточно, чтобы он высказывал какие-то утверждения о мире, в котором живет, принимал или отвергал их. И если он это делает, то является для нас *познавателем*.

Познавателей может быть сколько угодно много. Но все они живут в одном и том же онтологическом мире и познают один и тот же онтологический мир, но, возможно, в разное время и в разных местах. Единство онтологического мира позволяет одним познавателям оценивать утверждения других познавателей, хотя бы и живших в разные исторические эпохи, относя при этом сами эти утверждения к реалиям онтологического мира.

Под возможными мирами имеются в виду чисто лингвистические образования. *Возможный мир* - это не более чем некоторое множество предложений (высказываний). Уже из этого ясно, что *онтологический мир* в число тех миров, которые здесь будут называться возможными, не входит.

Возможные миры у нас являются, так сказать, *двухэтажными*. И первый и второй этажи представляют собой некоторые множества высказываний. Первый - фактуальный, эмпирический. Второй - теоретический. Первые этажи у каждого возможного мира представляют собой некоторое не пустое множество литералов, то есть атомарных высказываний или их отрицаний. Вторые этажи могут содержать предложения любого вида.

Возможные миры соответствуют знанию каждого познавателя. Пусть S есть множество атомарных предложений, которые некоторый познаватель **a** считает осмысленными. Если хотя бы некоторые из них или же из их отрицаний он считает на данный момент истинными, то его знаниям на этот момент соответствует мир (назовем его *действительным, или актуальным*), первый этаж которого образуют литералы, выбранные познавателем **a** в качестве *истинных*.

Если познаватель **a** считает какие-то из истинных высказываний не просто истинными, но *необходимо истинными*, то такому его знанию соответствует множество возможных миров, которые отличаются друг от друга тем, что в одном из них предложения, которые не относятся к числу необходимых, входят в одни миры со знаком отрицания, а в другой без него. Такие миры рассматриваются как миры, достижимые из действительного, возможные относительно действительного, который сам оказывается одним из возможных. Миры, в которые входят отрицания предложений, признаваемых необходимыми, считаются недопустимыми, невозможными, недостижимыми. (Это, однако, не исключает того, что познаватель пожелает из каких-либо предположений (теоретических, например) посчитать и такой мир "возможным", с вытекающими из такого признания последствиями.)

Если, далее, познаватель считает, что некоторые предложения *А* и *В* (события, о которых они говорят) реально связаны таким образом, что в случае истинности первого всегда истинно также и второе, то его знанию соответствует множество возможных миров, такое, что в число достижимых из действительного попадают только те миры, в которых при верности *А* (все высказывания верифицируются только на первых этажах) на втором (теоретическом) этаже имеется *В*.

В результате всякое высказывание о связи отображается в возможных мирах как свидетельство о том, что познаватель принимает некоторую теорию, так как ни одно такое высказывание не может быть чисто эмпирически обосновано, и предполагает для своей верификации выход за пределы чисто эмпирического знания.

Таким образом, знанию, присущему каждому познавателю, соответствует свое собственное, различным образом структурированное (что определяется тем, какие миры оказываются достижимыми друг из друга) множество возможных миров. К этому неизбежно приводят и различно понимаемая познавателями эмпирическая основа знания, и отличия в присущем им теоретическом осмыслении эмпирических данных. Такие различия трактуются в широко понимаемом смысле, как выход за пределы познания, предоставляемого наблюдением. Сюда могут относиться как те оценки и выводы, которые предлагаются наукой, так и трактовки, связанные с верованиями, традициями, политическими и иными пристрастиями и тому подобными вещами.

Познаватели, живущие объективно в одном и том же онтологическом мире, субъективно живут в различных мирах, так как каждый познаватель живет в том мире, который он себе представляет, если даже он ясно понимает, что мир как таковой, мир в себе, и мир представляемый, воспринимаемый это не одно и то же[82].

Возможные миры как модели познания позволяют осуществлять сравнение субъективных миров. Познаватели, которые на самом деле постоянно изменяют соответствующие их знаниям миры, могут лучше осознать, что и в каком отношении подверглось изменению.

Принимая обсуждаемые модели познания, мы вынуждены будем подобрать соответствующее им понимание истины, ибо трактовка ее как соответствия онтологическому миру утрачивает объективный характер. На такое соответствие претендует любой познаватель. Верификация высказываний становится возможной только в возможных мирах, отображающих то, что считает истинным сам познаватель.

---

82 Эту мысль, почти тем же образом выраженную, я нашел в очерке посвященном Крылову И.А., у известного российского литературного критика, поэта, издателя, ректора Петербургского университета Плетнева П.А. (1792 - 1865): "Мир внешний, окружающий человека, вмещается в его душу, где мы называем его внутренним миром. Первый существует в одном неизменном образе. Другой , по различию восприемлющих, до бесконечности разновиден. Поэтому слово, будучи полным образом духовности в человеке, всегда показывает внешний мир согласно не с подлинником. а с принятыми им в душе особенностями."(И.А. Крылов в воспоминаниях современников // М., Худож. лит., 1982.

Предложенная нами двухуровневая семантика, конечно, не даст решения предложенных философских вопросов, но может сделать саму их постановку строгой и однозначной, а ответы достаточно точно сформулированными.

Кроме того, с помощью данной семантики оказывается возможным моделировать не только уже сформулированное вербально выраженное знание, но и исследовать сами познавательные процессы и методы получения знания. Мы показывали выше, что одно и тоже утверждение в зависимости от способа, каким оно было получено, может трактоваться и как эмпирическое, и как теоретическое. Абстрактное различение знания на эмпирическое и теоретическое без анализа того, каким путем оно было получено, на каком основании включено в систему принятых положений, каким проверочным процедурам подвергалось, - без этого сама постановка задачи такого различения не является правомерной и, уж точно, не имеет позитивного решения.

Приложение
(*Аксиоматика некоторых релевантных систем*)

Аксиомные схемы:

A1. $(A \to A)$

A2. $(A \to B) \to .(B \to C) \to (A \to C)$

A3. $(A \to B) \to .(C \to A) \to (C \to B)$

A4. $(A \to .B \to C) \to .A \to B \to .A \to C$

A5. $AB \to A$

A6. $AB \to B$

A7. $(A \to B)(A \to C) \to (A \to BC)$

A8. $A \to A \vee B$

A9. $B \to A \vee B$

A10. $(A \to C)(B \to C) \to (A \vee B \to C)$

A11. $A(B \vee C) \to (AB \vee C)$

A12. $(A \to \neg A) \to \neg A$

A13. $A \to \neg B \to .\ B \to \neg A$

A14. $\neg\neg A \to A$

A15. $A \to B \to .\ A \to B \to C \to C$

A16. $NANB \to N(AB)$

A17. $A \to A \to A \to A$

A18. $(A \to B) \to .(A \to B) \to (A \to B)$

Правила вывода (для всех релевантных систем): modus ponens *MP* (Из $A \to B$ и A следует B) и правило адъюнкции RA (Из A и B следует AB).

NA есть сокращение для $(A \rightarrow A) \rightarrow A$.

$\boldsymbol{T}$ = A1 - A14, $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{T}$ + A15 + A16 = A1 - A16,

$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{E}$ + A17, $\boldsymbol{EM} = \boldsymbol{E}$ + A17, $\boldsymbol{RM} = \boldsymbol{R}$ + A18.

В исчислении $\boldsymbol{RM}$ имеет силу теоремы $(A \rightarrow A) \rightarrow (B \rightarrow B)$ и $(A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A)$.

Кванторные расширения исчислений: $\boldsymbol{EQ} = \boldsymbol{E}$ + Q1-Q7, $\boldsymbol{RQ} = \boldsymbol{R}$ + Q1-Q6.

Q1. $\forall x A(x) \rightarrow A(y)$.

Q2. $\forall x\ (A \supset B) \supset A \supset \forall x A$, где x не входит в A свободно.

Q3. $\forall x(A \vee B) \rightarrow (A \vee \forall x B)$, где x не входит в A свободно.

Q5. $\forall x A x \forall x B x \rightarrow \forall x(AB)$.

Q6. $\forall x A \rightarrow N \forall x A$.

Q4. $\forall x(A \rightarrow B) \rightarrow . \forall x A \rightarrow \forall x B$.

Q7. Если A - аксиома, то $\forall x A$ - аксиома.

Квантор существования вводится по определению: $\exists x A =_{Df} \neg \forall x \neg A$.

Литература

1. *Sidorenko E.A.* Relational semantics of entailment // XIX World Congress of Philosophy, Moscow, P. 22-28 August 1993, Book of Abstracts, v.1.
2. *Сидоренко Е.А.* Релевантная реляционная семантика с двумирными точками соотнесения // Труды научно-исследовательского семинара логического центра Института философии РАН,1993. М., 1994.
3. *Сидоренко Е.А.* Реляционная семантика релевантных исчислений // Логические исследования. Вып. 3. М.: Наука, 1995.С. 53-71.
4. *Сидоренко Е.А.* Семантика возможных миров: от лейбницевской к юмовской // Логические исследования. Вып. 3. М.: Наука, 1995. С. 24-37.
5. *Anderson A.R., Belnap N.D.* Entailment, v.1, Princeton, 1972.
6. *Routly R., Meyer R.* The Semantics of Entailment // Truth, Syntax and Modality. Amsterdam, 1973. P.199–243.
7. *Сидоренко Е.А.* Логическое следование и условные высказывания. М., 1983.
8. *Войшвилло Е.К.* Философско-методологические аспекты релевантной логики. М., 1988.
9. *Vasyukov V.L.* From ternary to tetrary // Bulletin of the Section of Logic. 1994. N 23. P.163-167.
10. *Смирнова Е.Д.* Логика и философия. М., 1996.
11. *Lewis C. I.* A survey of symbolic logic. Berkeley, 1918.
12. *Prior A.N.* Formal logic. Oxford, 1955
13. *Зиновьев А.А.* Логика высказываний и теория вывода. М., 1962.
14. *Сидоренко Е.А.* Е-системы и их непротиворечивые расширения за счет классически неприемлемых принципов // Релевантные логики и теория следования. М.: Наука, 1979.
15. *Maksimowa L.* A semantics for the calculus E of entailment // Bulletin of the section of logic. 1973, v.2, N.1, Wroclaw.

16. *Смирнов В.А.* Формальный вывод и логические исчисления. М.: Наука, 1972.
17. *Карпенко А.С.* Фатализм и случайность будущего. Логический анализ. М.: Наука, 1990.
18. *Быстров П.И.* Релевантные системы с глобальными правилами вывода // Логические исследования. Вып. 2. М.: Наука, 1993.
19. *Герасимова И.А.* Дилемма экстенсиональности-интенсиональности и контексты с пропозициональными установками // Логические исследования. Вып. 2. М.: Наука, 1993.
20. *Сидоренко Е.А.* Семантика следования (для системы Е) // Труды научно-исследовательского семинара логического центра Института философии РАН, 1996. М.,1997.
21. *Ледников Е.Е.* Пропозициональные установки и эпистемические модальности // Мышление, когнитивные науки, искусственный интеллект. М., 1988.
22. *Sidorenko E.A.* Relevant semantics with binary relation of accessibility // Bulletin of Section of Logic. 1997. V.26. N 4, Univ. of Lódz, Lódz, Poland. P.168-178
23. *Sidorenko E.A.* Entailment as Necessary Relevant Implication // Abstracts of VIII Intern. Congress. of Logic, Methodology and Philosophy of Science. V.5, part 1, Moscow, 1987.
24. *Сидоренко Е.А.* Семантическое построение релевантных логик. - Логические исследования. М., ИФ АН СССР, М., 1983. С. 81-85.
25. *Сидоренко Е.А.* Семантики релевантного следования без невозможных возможных миров // Неклассические логики. М.: ИФ АН СССР, 1984.
26. *Sidorenko E.A.* On extensions of E. // Acta philosophica fennica, 1982. N 35.
27. *Сидоренко Е.А.* Принцип непротиворечия и парадоксальность формализованных теорий // Вопросы философии, 1983. № 6. С. 91-97.
28. *Кэрролл Л.* История с узелками. М.: Мир,1973.С. 368–372.

29. *Sidorenko E.A.* Normalised Inference and Deduction Theorem // Bulletin of Section of Logic. V.27, N1/2, 1998, University of Lódz, Lódz, Poland.
30. *Sidorenko E.A.* The law of contradictory and paradoxies of implication. Bull. of section of logic, 1989. N 1. Wroclaw.
31. *Sanches J.S.* Intuitive semantics // Abstracts of VI International Congress of Logic, Methodology and Philosophy of Science. Sections 5 and 7. Hannover, 1979.
32. *Сидоренко Е.А.* Семантическое построение пропозициональной релевантной логики // Синтаксические и семантические исследования неэкстенсиональных логик. М.: Наука, 1989.
33. *Lewis C.I.* The calculus of strict implication // Mind,1914, v. 23.
34. *Routley R.* A semantical analysis of implicational system I and the first degree of entailment // Mathematishe Annalen, 1972. V. 196. P. 58-84.
35. *Pollck J.L.* The paradoxes of strict implication // Logique et Analyse, 1966, an. 9. N 34.
36. *Quine W.V.* Reply to Professor Marqus // The ways of paradox and other essays. N.-Y., 1966.
37. *Scot T.*D. On engendering an illusion of understanding // J. of Philos., 1971, v. 68, N 21.
38. *Lemmon E.J.* New foundations for Lewis's modal systems // JSL, 1957, v. 22.
39. *Фейс Р.* Модальная логика. М., 1974.
40. *Ackermann W.* Begründung einer strengen Implikation // JSL, v. 21, n. 2, 1956.
41. *Зайцев Д.В.* Теория релевантного следования I: Аксиоматика // Логические исследования. Вып. 5. М.: Наука, 1998. С. 119-128.
42. *Ивлев Ю.В.* Модальная логика. М., 1991.
43. *Павлов С.А.* Логика ложности FL4 // Труды научно-исследовательского семинара логического центра Института философии РАН. 1993. М.,1994. С. 14-35.

44. *Смирнов В.А.* Формальный вывод и логические исчисления // М.: Наука, 1972, 272 с.
45. *Meyer R., Routley R., Plumwood V.* A farewell to entailment // Abstracts of VII Intern. Congress of Logic, Methodology and Philosophy of Science. Section 5. Salzburg, 1983.
46. *Sidorenko E.A.* Entailment as Necessary Relevant Implication // Abstracts of VIII Intern. Congress. of Logic, Methodology and Philosophy of Science. V.5, part 1, Moscow, 1987.
47. *Карпенко А.С.* Импликативные логики: решетки и конструкции // Логич. исследов., вып. 2. М., Наука, 1993.
48. *Долгова Т.П., Попов В.М.* Проблемы релевантной логики в работе В.А. Смирнова "Формальный вывод и логические исчисления" // Логич. исследов. Вып. 4. М. : Наука, 1997.
49. *Сидоренко Е.А.* Теорема дедукции для всех систем // Смирновские чтения. Вторая международная конференция. М., 1999. С. 66-71.
50. *Войшвилло Е.К.* Теория логической релевантности // Смирновские чтения. Вторая международная конференция. М., 1999. С. 103-105.
51. *Стяжкин Н.И.* Формирование математической логики. М., 1967.
52. *Сидоренко Е,А.* Метод различения сильных и слабых следствий из данных посылок // Исследования по неклассическим логикам. М., 1989.
53. *Сидоренко Е.А.* Слабые следствия и парадоксы следования // Логические исследования. Вып.1. М.: Наука, 1993. С. 133-142.
54. *Смирнов В.А.* Логические методы научного знания. М., 1987.
55. *Шалак В.И.* Теория пропозициональных программ // Логические исследования. Вып. 5. М.: Наука, 1998.
56. *Buchsbaum A., Pequeno T.* A general treatment for the deduction theorem in open calculi // Logique et Analyse, 157, 1997.
57. *Щипкова А.В.* Об источниках парадоксов следования // Проблемы логики, методологии и истории науки. Вып. 2., М., 1978.

Научное издание

СИДОРЕНКО Евгений Александрович

РЕЛЕВАНТНАЯ ЛОГИКА
(Предпосылки, исчисления, семантика)

Утверждено к печати Ученым советом
Института философии РАН

В авторской редакции
Художник: *В.К.Кузнецов*
Технический редактор: *Н.Б.Ларионова*
Корректор: *Т.М.Романова*

Лицензия ЛР № 020831 от 12.10.98 г.

Подписано в печать с оригинал-макета 20.01.2000.
Формат 70x100 1/32. Печать офсетная. Гарнитура Таймс.
Усл. печ. л. 7,63. Уч.-изд. л. 8,84. Тираж 500 экз. Заказ № 003

Оригинал-макет изготовлен в Институте философии РАН
Компьютерный набор и верстка автора

Отпечатано в ЦОП Института философии РАН
119842, Москва, Волхонка, 14