Рэймонд Смаллиан

САТАНА, КАНТОР И БЕСКОНЕЧНОСТЬ,

а также другие головоломки

SATAN, CANTOR AND INFINITY

And Other Mind Boggling Puzzles

by

Raimond Smullyan

Alfred A. Knopf · New York

1987

САТАНА, КАНТОР И БЕСКОНЕЧНОСТЬ,

а также другие головоломки

Реймонд Смаллиан

Издательство "Лори" · Москва

2014

SATAN, CANTOR AND INFINITY
And Other Mind Boggling Puzzles
Raymond Smullyan

ISBN 0-679-40688-3

САТАНА, КАНТОР И БЕСКОНЕЧНОСТЬ,
а также другие головоломки
Рэймонд Смаллиан

Переводчик *Быстров П. И.*
Верстка *Середа Т. В.*

Изд. №OAI (03)
ЛР №07612 30.09.97
ISBN 978-5-85582-334-9

Подписано в печать 05.01.14 Формат 84x108/32
Бумага офсетная Гарнитура Cambria Печать офсетная
Печ. л. 11,4 Тираж 200 экз.

Содержание

Предисловие

Ничто не будоражит человеческое воображение так сильно, как бесконечность! Ей присущи все странные свойства, которые сначала кажутся парадоксальными, а затем оказываются вовсе не такими. Бесконечность сама по себе — идеальный материал для книги загадок.

Как и прежние мои книги загадок, эта книга начинается новыми загадками о людях, говорящих правду, и лжецах (о «рыцарях» и «плутах»), но в ней появляется важный персонаж, известный как Волшебник. Окружающие считают его чародеем, хотя на самом деле он логик, применяющий логику так умно, что несведущим людям она кажется волшебством. Многократно продемонстрировав свое «логическое волшебство», он сопровождает нас во множестве необычайных приключений, включая посещение острова, на котором разумные роботы создают других роботов, наделяя их интеллектом, достаточным для создания других разумных роботов, которые в свою очередь создают других разумных роботов, и так до бесконечности. После нескольких особых загадок, связанных со знаменитой теоремой Гёделя, и парадоксов о вероятности, времени и изменении, Волшебник сопровождает нас в бесконечность, объясняя пионерские открытия великого математика Георга Кантора, который первым подвел под тему бесконечности логически обоснованный базис. С присущим ему юмором Волшебник завершает дело замечательным рассказом о том, как сам Сатана был побежден в состязании умным учеником Кантора.

Если же говорить серьезно, то удивительно, что столь завораживающая тема как бесконечность так мало известна широкой публике! Почему бы и не преподавать ее в высших школах? Понять ее не труднее, чем алгебру или геометрию, и это понимание принесет так много пользы! Последние главы данной книги содержат увлекательное (и простое) введение в тему бесконечности. Даже новичок сможет понять природу бесконечности, поразительные открытия Кантора и изложение, быть может, величайшей математической проблемы всех времен, остающейся нерешенной по сей день.

Замечание для читателя

Многие части книги не обязательно читать по порядку. Читатель, интересующийся прежде всего бесконечностью, может читать части VI и VII совершенно независимо от остального текста. Части III и IV также образуют отдельное целое, а части I, II и V можно читать отдельно от других.

Тем, кто начинает чтение книги не с самого начала, нужно лишь знать, что главные ее персонажи — Волшебник и его ученики Аннабел и Александр.

Часть I

Логическое волшебство

1
Разоблачение лжи

Охваченный таким сильным чувством тревоги, которого он никогда еще не испытывал, антрополог Эберкромби вступил на Остров Рыцарей и Плутов. Он знал, что остров населен в высшей мере странными людьми — рыцарями, говорящими только правду, и плутами, которые всегда лгут. «Как же, — терзался сомнениями Эберкромби, — я узнаю что-то об острове, не зная, кто из его жителей лжет, а кто говорит правду?»

Эберкромби осознавал, что прежде чем понять что-либо, он должен подружиться с человеком, которому можно доверять, будучи уверенным, что он всегда говорит правду. Поэтому, подходя к первым встречным местным жителям, которых, предположим, звали Артур, Бернард и Чарльз, Эберкромби думал так: «Это мой шанс отыскать среди аборигенов рыцаря». Поразмыслив, он сначала спросил Артура: «Скажите, Бернард и Чарльз — рыцари?» «Да», — ответил Артур. Тогда Эберкромби спросил его: «Бернард рыцарь?» К величайшему своему удивлению, он услышал в ответ: «Нет». Кем же является Чарльз, рыцарем или плутом?

Эберкромби понимал, что сначала ему нужно определить, кем (рыцарями или плутами) являются Артур и Бернард. Очевидно, что Артур плут, поскольку ни один рыцарь не утверждал бы, что Бернард и Чарльз рыцари, одновременно отрицая, что Бернард рыцарь. Значит, оба ответа Артура были ложью. Поскольку он отрицал, что Бернард рыцарь, Бернард действительно был рыцарем. Поскольку Артур утверждал, что Бернард и Чарльз являются рыцарями, а это неправда, по крайней мере, один из них должен быть плутом. Однако Бернард — (как мы уже установили) не плут; следовательно, Чарльз плут.

Затем один из троих местных жителей, который, как уже знал Эберкромби, действительно был рыцарем, сказал, что на острове есть Волшебник.

— Прекрасно! — воскликнул Эберкромби. — Нам, антропологам, особенно интересны знахари, целители, шаманы и тому подобное. Где я могу найти его?

— Об этом вы должны спросить Царя, — последовал ответ.

Ну что же, антрополог добился аудиенции у Царя и сказал, что он хочет встретиться с Волшебником.

— О, вы не можете с ним встретиться, — сказал Царь, — пока не встретитесь с его учеником. Если вы понравитесь ученику, он позволит вам встретиться с учителем; если не понравитесь, не позволит.

— У Волшебника есть ученик? — удивился антрополог.

— Конечно есть, — ответил Царь. — Есть даже знаменитый музыкальный этюд о нем. Я полагаю, этот этюд сочинил композитор Дюк. Как бы то ни было, если вы хотите встретиться с учеником Волшебника, он сейчас дома, а его дом стоит третьим по Пальмовой Аллее. Сейчас он экзаменует двух гостей. Если вы сможете логически определить, кто из присутствующих в доме является учеником Волшебника, я полагаю, этого будет достаточно, чтобы он позволил вам встретиться с самим Волшебником. Желаю удачи.

В скором времени антрополог уже был у названного дома. Войдя, он действительно увидел троих людей.

— Кто из вас ученик Волшебника? — спросил он.

— Я, — ответил один из присутствующих.

— Нет, я ученик Волшебника! — воскликнул второй.

Третий молчал.

— А вы можете сказать мне что-нибудь? — спросил его Эберкромби.

— Забавно то, — с легкой усмешкой ответил третий, — что не более чем один из нас говорит правду.

Можно ли установить, кто из этих троих является учеником Волшебника?

Вот как рассуждал антрополог. Если третий, который сначала молчал, плут, его утверждение ложно, а это значит, что, по крайней мере, двое из присутствующих рыцари. Однако первый и второй не могут оба быть рыцарями, поскольку они высказали противоречивые утверждения. Поэтому третий из присутствующих не может быть плутом, а должен быть рыцарем. Следовательно, его высказывание истинно, и только он один из троих может быть рыцарем. Тогда двое других плуты, и их высказывания ложны, а, значит, ни один из них не является учеником Волшебника. Следовательно, учеником должен быть третий из присутствующих.

Ученику понравилось рассуждение Эберкромби, и он позволил антропологу встретиться с Волшебником.

— Сейчас учитель наверху, в башне. Он беседует с Астрологом нашего острова, — сказал ученик. — Вы можете подняться и спросить его о чем-нибудь, но, пожалуйста, постучите, прежде чем входить.

Антрополог поднялся в башню и постучал в дверь. Когда его пригласили войти, он увидел двоих очень странных людей, на одном из которых была зеленая шляпа в виде конуса, а на другом такая же, но голубая. По их внешнему виду невозможно было определить, кто из них Волшебник. Представившись, антрополог спросил: «Волшебник — рыцарь?» Человек в голубой шляпе ответил на его вопрос (либо «да», либо «нет»), и после этого антрополог смог логически установить, кто из двоих присутствующих в башне является Волшебником. Так кто из них Волшебник?

Эта загадка существенно отличается от двух предыдущих. Это метазагадка, поскольку разгадывающему ее сообщаются не все условия загадки, а информация о том, как эту загадку разгадать. Иными словами, вам не сообщают, какой ответ дал человек в голубой шляпе, но говорят, что антрополог смог решить проблему, получив этот ответ. Именно эта информация имеет здесь решающее значение.

Давайте разберемся в сути загадки. Допустим, что человек в голубой шляпе сказал «да».

Смог бы антрополог в этом случае определить, кто является Волшебником? Конечно, нет. Ведь тот, кто ему ответил, мог быть рыцарем. Из этого следует, что Волшебник — рыцарь. Значит, оба присутствующих могли быть рыцарями, и любой из них мог быть Волшебником. Если же отвечавший был плутом, то Волшебник тоже плут, и (по соображению антрополога) он мог быть любым из обоих присутствующих людей в шляпах. Итак, если бы антрополог услышал ответ «да», он не смог бы определить, кто является Волшебником. Однако сказано, что антрополог смог это сделать. Следовательно, он услышал ответ «нет».

Итак, мы знаем, что отвечавший антропологу (человек в голубой шляпе) сказал «нет». Если он рыцарь, то его ответ истинен, и Волшебник не является рыцарем. Значит сам отвечавший не Волшебник. Если же отвечавший — плут, то его ответ ложен, и, значит, Волшебник должен быть рыцарем. Следовательно, отвечавший не может быть Волшебником. Итак, из ответа «нет» следует, что отвечавший не является волшебником независимо от того, солгал он или сказал правду. Значит человек в голубой шляпе — Астролог, а тот, на ком зеленая шляпа, — Волшебник.

Итог состоит в том, что ответ «нет» позволяет доказать, что человек в зеленой шля-

пе — Волшебник, а ответ «да» вообще бесполезен. Поскольку антрополог смог точно определить, кто является Волшебником, он, без сомнения, услышал ответ «нет», из коего и заключил, что человек в зеленой шляпе — Волшебник.

Хотя антрополог определил, кто является Волшебником, он все же не знал, рыцарь этот Волшебник или плут. Задав ему еще один вопрос, антрополог установил, что Волшебник рыцарь, а Астролог плут. После этого Астролог смутился и ушел, сказав при этом: «Согласно расположению планет, сейчас я должен быть дома».

— Эти астрологи, — усмехнулся Волшебник, — все обманщики. Однако я не таков — мое волшебство реально.

— По правде говоря, — сказал Эберкромби, — я весьма скептически отношусь к магии.

— О, вы не понимаете сути дела. В моем волшебстве нет никакой магии, хотя окружающим кажется, что в нем используется магия. Мое волшебство заключается в умном применении логики. С помощью своей логики я постоянно дурачу этих простаков.

— Не могли бы вы привести мне какой-нибудь пример? — попросил Эберкромби.

— Разумеется, могу. Вы любите биться об заклад?

— Иногда, — осторожно ответил Эберкромби.

— О, я не предлагаю вам крупное пари, ставка в нем — одна медная монета. Я задам вам вопрос, на который вы должны ответить либо «да», либо «нет». Несмотря на то что на этот вопрос можно дать определенный правильный ответ, я спорю, что вы не сможете дать такой ответ. Любой человек, кроме вас, смог бы правильно ответить, а вы не сможете. Фактически для вас *логически невозможно* дать правильный ответ, даже если таковой существует. Разве это не похоже на волшебство?

— Действительно, это похоже на волшебство,— ответил крайне заинтригованный Эберкромби. — Я принимаю пари главным образом потому, что я очень любознателен. Какой вопрос вы имели в виду?

Волшебник задал Эберкромби вопрос, на который можно правильно ответить либо «да», либо «нет». К полному своему удивлению и смущению, Эберкромби понял, что Волшебник выиграл пари. Для Эберкромби было логически невозможно дать правильный ответ, хотя он понимал, что такой ответ есть.

Какой же вопрос задал Волшебник?

Волшебник спросил Эберкромби: «Вы ответите на этот вопрос словом «нет»?» Если бы Эберкромби ответил «нет», он отрицал бы, что его ответ «нет». Если бы он ответил «да», то он *утверждал бы, что его ответ «нет», то есть ответил бы неправильно. Следовательно, для него было логически невозможно дать правильный ответ на заданный вопрос.*

До чего же умны эти волшебники!

Инспектор Крейг наносит визит

Через несколько недель после того, как антрополог отплыл домой, остров посетил мой друг инспектор Крейг из Скотланд-Ярда. В первый же вечер своего частного визита Крейг был приглашен на обед Верховным Судьей, который был рыцарем.

— Кстати, — с гордостью сказал судья, — вчера на суде я выявил плута и приговорил его к трем месяцам тюремного заключения за лжесвидетельство. Никому не позволено лгать под присягой.

— Не подразумеваете ли вы тем самым, что *не* под присягой лгать разрешено? — спросил Крейг.

— Нет, нет! — воскликнул судья. — Лгать нельзя вообще никогда, но особенно под присягой!

— Расскажите мне, что произошло, — попросил Крейг, питавший большой интерес к подобным делам.

— Всего было двое подозреваемых: Барб и Зорк. Я знал, что Барб испытывает личную неприязнь к Зорку, но это никак не оправдывает его ложь о Зорке.

— Что же он сказал? — спросил инспектор.

— Он утверждал, что за несколько минут до суда слышал, как Зорк говорил своему другу: «Вчера я лгал».

— И что же из этого? — спросил Крейг.

— Из этого ясно, что я осудил Барба за ложь.

— Откуда вы знаете, что он лгал?

— Полноте, — сказал судья с некоторым раздражением, — я ведь считал вас хорошим логиком. Очевидно, что Зорк никогда не мог сказать, что он лгал вчера. Ведь рыцарь не может солгать, утверждая, что он вчера лгал, а плут не может сказать правду, признаваясь, что он вчера лгал. Следовательно, Барб явно лгал, говоря, что Зорк утверждал такое.

— Вовсе не обязательно, что дело обстоит именно так, — ответил Крейг. — Вам следует освежить собственные знания по логике, но прежде всего, вам следует отпустить Барба на свободу, поскольку вы приговорили его к заключению несправедливо.

Дальнейшее расследование показало, что Крейг был прав. В своем рассуждении судья допустил вполне естественную ошибку, и поэтому он ошибся. В чем заключается ошибка?

В ходе дальнейшего расследования было установлено, что Барб на самом деле был рыцарем *и говорил правду: Зорк действительно высказывал упомянутое странное утверждение. Как же он мог сказать, что он лгал вчера? Оказалось, что днем раньше Зорк страдал от острого ларингита и весь день вообще ничего не говорил. Итак, Зорк — плут, который лгал, говоря, что он лгал днем раньше; на самом же деле он в тот день молчал.*

На следующий день Крейга попросили председательствовать на заседании суда, на котором рассматривалось дело о краже часов. Подозреваемого звали Гэри. Инспектора не интересовало, рыцарь Гэри или плут, ему нужно было узнать, украл ли Гэри часы. Вот запись судебного процесса:

Крейг: Правда ли то, что однажды после кражи вы заявили, что не вы украли часы?

Гэри: Да.

Крейг: Говорили ли вы когда-нибудь, что *именно вы* украли часы?

Гэри ответил (либо «да», либо «нет»), и Крейг узнал, виновен ли он в краже. Украл ли Гэри часы?

Это еще один пример метазагадки. Допустим, что на второй вопрос Крейга Гэри ответил «да». Тогда было бы очевидно, что Гэри плут, так как рыцарь никогда не высказал бы два противоречивых утверждения. Поскольку Гэри плут *(по-прежнему предполагается, что на второй вопрос он ответил «да»), оба его ответа лживы. Значит, он никогда не говорил, что он вор и никогда не говорил, что он не вор; и поэтому у Крейга не было оснований для того, чтобы установить, виновен он или нет. Однако сказано, что Крэйг это установил. Следовательно, на второй вопрос Гэри не мог ответить «да», а должен был ответить «нет».*

Теперь, зная, что второй ответ был «нет», можно определить, виновен Гэри или нет. Он либо рыцарь, либо плут. Допустим, что он рыцарь. Тогда оба его ответа правдивы, откуда следует, что он действительно говорил, что он не вор, и никогда не говорил, что он украл. Если, будучи рыцарем, он сказал, что он не вор, значит, он невиновен. Теперь предположим, что он плут. Тогда оба его ответа лживы, откуда следует, что на самом деле он никогда не говорил, что он не вор, но говорил, что он вор. Если плут говорит, что он вор, значит, на самом деле он не крал и, следовательно, невиновен. Тем самым доказано, что Гэри невиновен, независимо от того, рыцарь он или плут.

2
Когда я был мальчишкой

Вернувшись с Острова Рыцарей и Плутов, антрополог Эберкромби позвонил журналистам, чтобы рассказать о своих приключениях с учеником Волшебника и об аудиенции у самого Волшебника. Репортер Билл Райан был настолько заинтригован услышанным, что решил сам посетить остров и взять интервью у Волшебника. В один из ветреных дней он поднял паруса в Балтиморе, прибыл на остров и разыскал загадочного Волшебника в его горном убежище.

— Скажите мне, — обратился Райан к Волшебнику, держа наготове блокнот и карандаш, — когда вы впервые заинтересовались логикой? (Ведь Эберкромби обнаружил, что «магия» Волшебника была ничем иным, как умелым применением логики).

— Я начал занятия логикой, когда еще был мальчишкой, — последовал ответ. — Мой дядя рассказал мне о мифическом Острове Рыцарей и Плутов. (Сейчас у меня есть основания полагать, что он знал о реальном существовании такого острова, но хотел испытать меня, прежде чем возбудить во мне желание посетить этот остров.) Как бы то ни было, дядя сначала рассказал мне о потерпевшем кораблекрушение путешественнике, который встретился с тремя островитянами: Энтони, Бертраном и Кливом. «Вы рыцарь или плут?» — спросил он одного из них. Энтони ответил на неизвестном путешественнику языке. Тогда путешественник спросил Бертрана, что сказал Энтони. Бертран ответил: «Энтони сказал, что он плут». «Не верьте Бертрану, — вступил в разговор Клив, — он лжет».

Путешественник (которым, как я сейчас считаю, был сам мой дядя) сначала был совершенно сбит с толку. Затем неожиданно его осенила догадка, кем был Клив (рыцарем или плутом), однако мне он ничего не сказал. Я сам должен был узнать это. А вы можете определить, рыцарем или плутом был Клив?

Райан не знал, что ответить. Тогда Волшебник дал следующее разъяснение.

«Я посмотрел на своего дядю, — вспоминал Волшебник, — и сказал, что ни один житель острова Рыцарей и Плутов не мог бы сказать, что он плут, так как рыцарь никогда не может солгать, что он плут, а плут никогда не может правдиво признаться, что он плут. Значит, Бернард явно лгал, утверждая будто бы Энтони сказал, что он плут. Поэтому Клив сказал правду, утверждая, что Бернард лжет. Следовательно, Клив был рыцарем».

— Теперь, живя на этом острове, я часто вспоминаю рассказы своего дяди, когда пытаюсь выяснить, кто рыцарь, а кто плут.

— Вы столько лет провели на острове и неужели до сих пор не знаете, кто из местных обитателей рыцарь, а кто плут? — спросил Райан.

— Разумеется, нет,— ответил Волшебник. — Недели две тому назад, гуляя по берегу залива, я встретил незнакомца. Мне было известно, что в то время остров никто не посещал, поэтому я знал, что встречный был местным жителем. Однако я не имел никакого понятия о том, рыцарь он или плут. Когда мы встретились, он пробормотал несколько слов. Подумав мгновение, я крикнул ему вслед: «Если бы вы не высказывали этого утверждения, я бы счел его истинным! До того, как вы заговорили, я не знал, рыцарь вы или плут, и не имел ни малейшего понятия, истинно или ложно то, что вы сказали. Теперь же я знаю, что ваше утверждение ложно, и вы должны быть плутом».

— Какие же его слова могли вызвать у вас такую реакцию? — спросил Райан.

— А как вы думаете, что он сказал? — ответил вопросом на вопрос Волшебник.

— Ну, он мог сказать: «Два плюс два равно пять»,— предположил Райан.— Разве этого не достаточно, чтобы вы убедились в том, что он был плутом?

— Конечно, этого было бы достаточно,— согласился Волшебник.— Однако вы не поняли суть проблемы. Если бы он сказал *именно это*, я бы понял, что он плут только потому, что до любых произнесенных им слов я уже знал, что «Два плюс два равно пять» — ложное высказывание. Но я же сказал вам, что я смог определить, кто он такой, только *после* того, как он произнес утверждение, которое, как я смог установить, было ложным лишь потому, что именно он его произнес. Так что же он сказал?

Репортер опять оказался в тупике.

«Когда я встретился с этим местным жителем, — объяснил Волшебник, — я понятия не имел, кто он такой и женат ли он. Однако тот пробормотал: «Я женатый плут». Очевидно, что рыцарь не может сказать, что он женатый плут (или вообще плут, независимо от семейного положения). Следовательно, абориген был лжецом, и его высказывание было ложным. Значит, на самом деле он был не женатым, а холостым плутом. После его высказывания я узнал о нем два факта, неизвестных мне ранее: что он плут и к тому же холост».

— Подождите-ка, — воскликнул Райан, — я не могу согласиться с тем, что ваше решение правильно, и весьма обеспокоен тем, что вы, называя себя рыцарем, могли рассказать неправдивую историю! Возможно, вы плут, и все, что вы говорили мне сегодня, — ложь.

— Почему вы говорите, что моя история неправдива? — удивленно спросил Волшебник.

— Потому что *ни один* островитянин не может сказать, что он плут. Утверждая, что он женатый плут, он тем самым утверждает, что он плут, что невозможно, как говорил ваш дядя (если он вообще существовал). Ваша история не выдерживает критики.

— Не спешите, молодой человек, — сказал Волшебник. — Вы только что допустили довольно распространенную ошибку. Позвольте задать вам вопрос. Допустим, некто утверждает, что он знает французский и немецкий. Обязательно ли он утверждает при этом, что знает французский?

— Ну, конечно, — ответил Райан. — Что за глупый вопрос!

— Вопрос не так уж и глуп, если над ним поразмыслить. Позвольте мне сформулировать его следующим образом. Некто сказал вам, что он знает французский и немецкий. Затем вы спрашиваете его: «Знаете ли вы французский?» Должен ли он обязательно ответить, что он знает французский?

— Разумеется, — ответил Райан, — а как же иначе!

— О, именно здесь вы и ошибаетесь. Он может так ответить, а может и не отвечать. Он может вообще *отрицать*, что он знает французский.

В полном недоумении Райан почесывал затылок, пока Волшебник объяснял, в чем дело.

Когда правдивый человек говорит, что он знает французский и немецкий, разумеется, он утверждает, что знает и французский. С лже-

цом дело обстоит иначе. Если он знает французский, не зная немецкого, то он лжет, утверждая, что знает и французский и немецкий. Тогда, если его спросили, знает ли он французский, он опять может солгать и т.д. Аналогичным образом, островитянин может сказать, что он женатый плут, одновременно отрицая, что он плут. К таким курьезам логики лжи и правдивости следует привыкнуть.

Райану не потребовалось много времени, чтобы понять, что Волшебник прав.

— В другой раз, — продолжал Волшебник, — я встретил жителя острова, высказавшего утверждение, из которого я логически вывел, что оно должно быть истинным. Однако до того как оно было произнесено, я не знал ничего ни об его истинности, ни о том, что оно высказано рыцарем. Если вы, Райан, действительно понимаете, чему я сейчас вас учу, вы должны знать, что мог сказать островитянин.

Немного подумав, Райан решительно ответил:

— Местный житель мог сказать: «Я не являюсь женатым рыцарем». Ясно, что плут не мог бы этого сказать, так как плут никак не может быть женатым рыцарем. Поскольку он рыцарь, его высказывание истинно, и он должен быть холостым рыцарем.

— Допустим, — сказал затем Волшебник, — что вместо этого островитянин сказал: «Я холостой рыцарь». Смогли бы вы тогда узнать, рыцарь он или плут, и женат ли он?

Райан уже был готов сказать «да», но в последнее мгновение передумал.

— Нет, я не мог бы определить, кто передо мной. Ведь любой плут может сказать, что он холостой рыцарь (поскольку он не является холостым рыцарем), и любой холостой рыцарь тоже может так сказать. Из данного высказывания можно логически вывести только то, что если островитянин рыцарь, то он холост.

— Вот это да! — удивился Райан. — Я чуть было не перепутал два высказывания: «Я не являюсь женатым рыцарем» и «Я холостой рыцарь». В них действительно говорится о разных вещах.

— Вы делаете успехи намного быстрее, чем я мог подумать, когда вы вошли. Однако боюсь, что мне уже пора идти на судебный процесс, — сказал Волшебник, посмотрев на большие древние часы. — Он обещает быть очень интересным. На этом суде председательствует бывший студент крупного логика, инспектора Крейга. Не хотите ли пойти со мной?

— С удовольствием, — ответил Райан.

Собеседники покинули башню Волшебника и направились к зданию суда. По дороге Волшебник рассказал Райану о предстоящем деле:

— Дело связано с кражей лошади. В ней подозреваются четверо: Эндрю, Брюс, Клейтон и Эдвард. Судьям точно известно, что один и только один из этих четверых вор. Трое уже найдены и доставлены в тюрьму, Эдварда же нигде не нашли, и суд состоится без него.

Райан и Волшебник пришли в здание суда как раз вовремя: процесс начался, едва они уселись. Поскольку этим делом интересовались почти все жители острова, зал был забит до отказа.

Судья стукнул своим молотком и задал в высшей степени уместный вопрос: «Кто украл лошадь?», — на который получил следующие ответы:

Эндрю: Лошадь украл Брюс.

Брюс: Лошадь украл Клейтон.

Клейтон: Лошадь украл Эдвард.

Затем один из подозреваемых совершенно неожиданно заявил: «Двое других лгут».

Судья подумал немного, а затем, указав на одного из подозреваемых, произнес: «Очевидно, что *ты* не крал лошадь, поэтому можешь покинуть зал суда».

Оправданный с удовольствием воспользовался разрешением. Подозреваемых осталось двое.

Судья спросил одного из них, является ли другой рыцарем, и, получив ответ (либо «да» либо «нет»), определил, кто из них украл лошадь. Какое же решение принял судья?

Сначала нужно определить, кого же судья оправдал сразу. Допустим, что это был Эндрю. Если Эндрю рыцарь, то Брюс должен быть виновен, а Клейтон невиновен. Если Эндрю плут, то не верно, что Брюс и Клейтон оба лгали; по крайней мере. один из них сказал правду. Значит, либо Клейтон виновен (если Брюс сказал правду), либо Эдвард виновен (если Клейтон сказал правду); в любом случае Эндрю оказывается невиновным. Итак, если неожиданное утверждение высказал именно Эндрю, он невиновен независимо от того, рыцарь он или плут. Разумеется, судья это понял и сразу освободил его.

В то же время, если бы это утверждение высказал Брюс или Клейтон, у судьи не было бы оснований оправдывать кого-то. Если говорил Брюс, судья мог бы установить только следующее: если Брюс рыцарь, то виновен Клейтон, а если Брюс плут, то виновен либо Брюс, либо Эдвард. Если же говорил Клейтон, тогда получается, что если Клейтон рыцарь, то виновен Эдвард, а если Клейтон плут, то виновен либо Брюс, либо Клейтон. Однако судья принял оправдательное решение, значит, говорил Эндрю, и именно он был оправдан.

Итак, под подозрением остались Брюс и Клейтон. Отвечая на последний вопрос судьи, один *из них либо сказал, что другой обвиняемый рыцарь, либо сказал, что другой обвиняемый плут. В первом случае оба подозреваемых принадлежат к одному типу островитян (оба они либо рыцари, либо плуты), во втором случае они принадлежат к различным типам. Рассмотрим второй вариант. В этом случае Клейтон мог быть рыцарем, а Брюс плутом, и тогда виновен Эдвард (поскольку именно это утверждал Клейтон); или рыцарем мог быть Брюс, а плутом Клейтон, и тогда виновен Клейтон. Однако судья не мог бы точно определить виновного. Следовательно, отвечавший утверждал, что другой обвиняемый рыцарь (ответив «да» на вопрос судьи). Судья понял, что они принадлежат к одному типу. Кроме того, они не могут быть рыцарями (поскольку произнесенные ими обвинения несовместимы), значит, оба они плуты и их обвинения ложны: ни Клейтон, ни Эдвард не крали лошадь. Эдвард, как нам известно, уже был оправдан. Следовательно, лошадь украл Брюс.*

— Что касается лошадей, — обратился Волшебник к Райану, когда они покидали здание суда, — я должен рассказать вам об одном весьма забавном происшествии, случившемся много лет назад, когда я жил в маленьком городке другой страны. Человек по имени Арчибальд продал лошадь человеку по имени Бенджамен.

Я знал их обоих, и мне было интересно, кто из них выиграл в этой сделке. Сначала я спросил Бенджамена, сколько он заплатил за лошадь. Он назвал на удивление маленькую сумму. Тогда я спросил Арчибальда: «Почему вы продали такое прекрасное животное за такую маленькую сумму?» «Я не прогадал, — ответил он, — ведь лошадь была хромая». Тогда я спросил Бенджамена: «Почему вы заплатили столько денег за хромую лошадь?» «На самом деле она не хромая, — ответил Бенджамен. — У нее в ноге заноза, которая мешает ей при ходьбе, и поэтому лошадь *кажется* хромой. Арчибальд, конечно, думал, что она *действительно* хромая, и поэтому так дешево ее продал. Заполучив лошадь, я выну занозу, и лошадь будет как новенькая».

Тогда я сказал Арчибальду: «Эге, да ты же проиграл в сделке: лошадь на самом деле не хромая». На что тот ответил: «Нет, лошадь действительно хромая. Просто я специально воткнул ей в ногу занозу, чтобы Бенджамен подумал, что она хромает только из-за этой занозы. Вынув занозу, он убедится, что лошадь по-прежнему хромает».

После этого я сказал Бенджамену: «Тебя же обманули. Арчибальд нарочно воткнул занозу в ногу лошади, чтобы ввести тебя в заблуждение». На это Бенджамен ответил: «Я предусмотрел такую возможность и поэтому заплатил Арчибальду фальшивыми деньгами».

3
Похищение Аннабел

Однажды ноябрьской ночью на одном из не отмеченных на картах коралловых островов, расположенном в нескольких сотнях миль от Острова Рыцарей и Плутов, была похищена младшая дочь Царя, принцесса Аннабел. Ходили слухи, что ее увезли на Остров Рыцарей и Плутов, но никто не знал, так ли это на самом деле. Возлюбленный Аннабел, храбрый юноша Александр, немедленно отправился на остров в надежде выяснить, не спрятана ли там принцесса. Он предполагал (и совершенно справедливо), что если ее когда-либо привозили на остров, то она еще должна быть там. Он также правильно рассудил, что если принцесса находится в плену на острове, местный Волшебник знает об этом. Единственная проблема была в том, что Александр не знал, является Волшебник рыцарем или плутом.

Александр добрался до острова живым и невредимым, нашел Волшебника и спросил его: «Принцесса Аннабел на этом острове?» Волшебник ответил ему либо «да» либо «нет». Затем поклонник спросил: «Вы *видели* принцессу Аннабел на этом острове?» Волшебник снова ответил либо «да» либо «нет», и после этого Александр точно определил, находится ли принцесса на острове. Была ли она там?

Предположим, что на оба вопроса Волшебник ответил «да». Тогда возможно, что он рыцарь и Аннабел находится на острове, или что он плут и Аннабел нет на острове; значит, Александр ничего не узнал бы. Если бы на оба вопроса Волшебник ответил «нет», тогда возможно, что он плут и Аннабел находится на острове, или что он рыцарь и Аннабел нет на острове; в этом случае Александр тоже не смог бы ничего узнать точно. Поскольку он действительно определил, находится ли принцесса на острове, один из полученных им ответов был «да», а другой «нет».

Посмотрим, что получится, если ответ на первый вопрос был «да», а на второй — «нет». Если Волшебник плут, оба эти ответа ложны, то есть Аннабел никогда не было на острове, но Волшебник видел ее на острове, что невозможно. Следовательно, Волшебник должен быть рыцарем, и принцесса должна быть на острове (хотя Волшебник ее и не видел там).

Теперь предположим, что ответ на первый вопрос был «нет», а на второй — «да». Если при этом Волшебник рыцарь, опять возникает невозможная ситуация: Аннабел никогда *не было на острове, но Волшебник ее там видел. Следовательно, Волшебник должен быть плутом, и принцесса должна быть на острове.*

Конечно, мы не можем узнать, как именно ответил Волшебник на каждый из вопросов (хотя понятно, что один его ответ был «да», а другой — «нет») и был ли он рыцарем или плутом (хотя Александр об этом узнал). Однако в любом случае Аннабел должна быть на острове!

Излишне описывать, как обрадовался Александр, узнав, что Аннабел на острове. Теперь оставалось ее освободить. С этой целью Александр добился аудиенции у Царя по имени Цорн, который, как известно, был рыцарем.

— Какой выкуп вы хотите за освобождение принцессы Аннабел? — смело спросил он Царя.

— О, небо, — засмеялся Царь, — я никогда не стал бы привозить ее сюда ради *выкупа*!

— Вы хотите сказать, что сделали это из более плохих побуждений? — в тревоге спросил Александр.

— О, нет, мой мальчик, — ответил Царь успокаивающе. — Принцесса Аннабел действительно так мила, как только может быть юная леди, и она будет тебе идеальной женой, если ты достаточно умен, чтобы освободить ее.

— Тогда почему же вы ее похитили? — спросил Александр.

— Причина похищения удивит тебя, — ответил Цорн. — У тебя репутация человека, умеющего отгадывать загадки. Я умышленно доставил принцессу сюда, чтобы проверить твои способности. Ты действовал правильно, определяя, находится ли принцесса на острове, но самое трудное у тебя еще впереди.

— Что вы имеете в виду? — спросил Александр.

— Теперь, — сказал Царь, — ты должен определить, рыцарь или плут мой Великий Визирь. Если это тебе удастся, Аннабел будет освобождена. Ты можешь задавать Визирю сколько угодно вопросов, на каждый из которых можно ответить либо «да» либо «нет».

— Ведь это до смешного просто! — воскликнул Александр. — Мне нужно задать единственный вопрос, на который я знаю ответ, например: «Два плюс два равно четыре?» Получив от Визиря ответ, я наверняка узнаю, рыцарь он или плут.

— Не надо меня перебивать! — сказал Царь. — Разумеется, можно решить эту задачу, задав лишь один вопрос, ответ на который тебе уже известен. Однако я как раз собирался сказать, что тебе запрещено задавать вопросы, ответы на которые ты уже знаешь.

Александр стоял в глубоком раздумье.

— Давай уточним ситуацию, — сказал Царь. — Тебе не нужно заранее готовить последовательность вопросов. На любом шаге ты волен задать вопрос, зависящий от ответа, полученного на предыдущий вопрос, но *ни на каком* шаге тебе не разрешается задавать вопрос, правильный ответ на который тебе заранее известен.

Александр подумал о сказанном еще немного и спросил:

— Вы уверены, что эта задача имеет решение?

— Я никогда этого не утверждал, — ответил Царь.

— Ну, знаете, — заволновался Александр, — с вашей стороны нечестно задавать мне неразрешимую задачу!

— Я никогда не говорил, что она *неразрешима*, — ответил Царь. — *Ты* должен определить, имеет ли эта задача решение. Если оно есть, ты должен найти его, чтобы получить свою принцессу. Если решения нет, и ты сможешь *доказать*, что его не существует, я опять-таки обещаю освободить Аннабел. И в том и в другом случае принцесса будет твоей. Таковы мои условия.

Александр размышлял над проблемой много дней, а затем снова попросил аудиенции у Царя Цорна.

— У меня есть стратегия, — сказал Александр. — Мне нужно задать не более двух вопросов.

— Какие это вопросы? — поинтересовался Царь.

— Сначала, — ответил Александр, — я спрошу Визиря, является ли он женатым рыцарем. Сейчас я ничего не знаю о том, женат ли он и рыцарь ли он. Если он ответит «нет», без дальнейших вопросов ясно, что он должен быть рыцарем, поскольку плут заведомо *не является* женатым рыцарем и, значит, не может правдиво ответить на этот вопрос.

— А если он ответит «да»? — спросил Царь.

— В таком случае я узнаю, что он либо женатый рыцарь, либо плут (возможно, женатый, а возможно и холостой). Ведь если он рыцарь, то его ответ правдив, значит, он действительно является женатым рыцарем. Если же он не рыцарь, то он плут, и тогда необходим второй вопрос. Я спрошу его: «Ты *холостой* рыцарь?» Если он снова ответит «да», то он, разумеется, плут (поскольку рыцарь не может высказать два несовместимых утверждения). Если же он ответит «нет», он должен быть женатым рыцарем (поскольку плут не является холостым рыцарем и, значит, не может правдиво ответить «нет» на этот вопрос). Значит, ответ «нет» укажет на то, что он рыцарь. Следовательно, в любом случае я узнаю, рыцарь он или плут.

— Ты уже *опробовал* эту стратегию на Визире? — спросил Царь Цорн.

— Еще нет, — ответил Александр, — но именно это я и собираюсь сделать.

— Хорошо, что ты этого не сделал, — сказал Царь. — Твои вопросы не удовлетворяют поставленным мною условиям.

Царь был прав. Почему предложенная стратегия не удовлетворяет заданным условиям?

Такая стратегия могла бы сработать, если бы Александру повезло, но она вовсе не должна срабатывать в любом случае. Предположим, что Александр проверил свою стратегию на Визире и получил ответ «нет» на свой первый вопрос. Тогда (как правильно объяснил Александр) он узнал бы, что Визирь рыцарь. Однако если бы Визирь ответил «да», Александр узнал бы, рыцарь он или плут только после второго вопроса, но этот вопрос уже не удовлетворяет требованию Царя, согласно которому претендент не должен знать правильный ответ на задаваемый вопрос. Визирь мог бы ответить на первый вопрос «да», только если он был либо женатым рыцарем, либо плутом (женатым либо холостым), иными словами, если он не был холостым рыцарем. Следовательно, правильный ответ («нет») на второй вопрос был бы уже предопределен!

— Значит ли это, что я никогда уже не увижу мою Аннабел? — расстроился Александр, когда Царь объяснил, почему не подходит предложенная им стратегия.

— Я этого не говорил, — ответил Царь Цорн. — Ведь ты еще реально *не применил* свой тест, а просто рассказал мне, что бы ты сделал, если бы его применил. Подумай над проблемой еще раз. Когда будешь готов, попроси официальной аудиенции у нас с Великим Визирем и, при заданных мною условиях, либо определи в моем присутствии, рыцарь Визирь или плут, либо докажи мне, что задача неразрешима.

Александр удалился, поблагодарив Царя, и размышлял над загадкой еще несколько дней. В результате он пришел к заключению, что задача не имеет решения. Однако он не решался представить Царю свое доказательство, поскольку в нем могла оказаться какая-нибудь незначительная ошибка. «Эх, если бы здесь был какой-нибудь мудрый человек, с которым я мог бы обсудить все перед испытанием», — размышлял он.

К счастью для себя и Аннабел, Александр подружился с всемирно известным биологом профессором Бактериусом, посетившим в то время остров. Бактериус был необыкновенно эрудированным человеком не только в своей профессиональной области, он также всерьез интересовался логикой. Ему Александр и объяснил стоящую перед ним дилемму.

— Я считаю свое доказательство правильным, — сказал Александр, — но я был бы бесконечно благодарен, если бы вы высказали о нем свое мнение.

— С удовольствием, — ответил Бактериус.

— Я рассуждаю следующим образом, — начал Александр. — Я задаю Визирю вопросы. Рассмотрим последний из них. Этот вопрос должен быть таким, чтобы ответ «да» означал, что Визирь относится к одному типу островитян, а ответ «нет» означал бы, что он относится к другому типу.

— Пока что все правильно, — одобрил Бактериус.

— Тогда, — продолжал Александр, — об этом факте мне было бы точно известно *до того,* как я задал последний вопрос. Допустим, ответ «да» означает, что Визирь рыцарь, а «нет» указывает на то, что он плут. Поскольку я знаю, что рыцарь ответит «да», плут ответит «нет», я знаю, что «да» — *правильный* ответ. Следовательно, я *знаю* правильный ответ на вопрос до того, как я задаю этот вопрос. Однако именно это мне запрещено! Получается, что задача не может иметь решения.

Прежде чем ответить, Бактериус некоторое время размышлял, сдвинув брови.

— Я сам не знаю, имеет ли эта задача решение, — сказал он наконец, — но, будучи на вашем месте, я бы *не* предлагал Царю такое доказательство. В нем есть трудноуловимое, но вполне определенное слабое место, и я не уверен, что его можно устранить.

Затем он объяснил, где пробел в доказательстве, и Александр понял, что Бактериус прав. Можете ли вы найти этот пробел?

В данном доказательстве две ошибки. Прежде всего, когда претендент готов задать свой последний вопрос, почему он обязательно должен знать, что этот вопрос последний? Ведь вопрос может оказаться таким, что при одном ответе на него Александр сможет определить, рыцарь Визирь или плут, а при другом потребуется еще один вопрос. Но даже если претендент действительно знает, что следующий вопрос должен быть последним, остается более серьезная трудность! Есть способ, позволяющий Александру узнать, что ответ «да» указывает на то, что Визирь принадлежит к одному типу островитян, а ответ «нет» означает, что он принадлежит к другому типу. Однако каким бы странным это ни казалось, Александр может узнать об этом только после того, как получит ответ на заданный вопрос. Вы сами скоро убедитесь, что вопрос, обладающий таким курьезным свойством, существует!

Разумеется, Александр расстроился, поняв, что его доказательство не выдерживает критики. Более того, он не знал, что теперь делать. Ведь он не смог решить задачу и найти убедительное доказательство ее неразрешимости. Даже профессор Бактериус с его непогрешимой логикой не смог с ней справиться!

В это самое время судьба улыбнулась юноше. С помощью хитрости и взяток Александру удалось узнать, где прячут Аннабел, и глубокой ночью он пробрался к ней. Теперь я должен сказать вам, что Аннабел, не имея серьезного формального образования, была очень умна, начитанна и обладала самым прекрасным математическим даром — великолепной интуицией. Когда Александр объяснил, в чем состоит проблема, Аннабел мгновенно ее решила.

— Милый мой, — сказала она, — тебе не о чем беспокоиться. Ты можешь узнать, рыцарь Визирь или плут, с помощью *единственного* вопроса. Следуй моему плану, и ты не будешь заранее знать правильный ответ на этот вопрос в тот момент, когда будешь его задавать.

Аннабел изложила свой план, который очень понравился Александру. На следующий же день он попросил официальной аудиенции у Царя. Суд собрался в полном составе и при всех регалиях, чтобы посмотреть, как погорит претендент.

— Я готов, — сказал Александр. — Я утверждаю, что задача разрешима, и что я решу ее, задав Визирю *единственный* вопрос!

— Ну, это мы еще посмотрим! — посмеиваясь, сказал Царь. (Он ведь считал задачу неразрешимой.) — Продолжай!

Александр (следуя инструкциям Аннабел) взял колоду карт, тщательно перетасовал ее, наугад вынул одну карту и, не глядя на ее лицевую сторону, показал карту Визирю с вопросом: «Эта карта красной масти?» Когда Визирь ответил (либо «да» либо «нет»), Александр впервые взглянул на карту и *тогда* узнал, солгал Визирь или сказал правду.

— Удивительно! — сказал Царь. — Мне и в голову никогда бы не пришло ничего подобного! Однако все это похоже на обман!

— Вовсе нет, — ответил Александр. — Задавая Визирю вопрос, я еще не видел карты и поэтому не знал ее масть. Следовательно, мой вопрос абсолютно соответствовал вашим условиям.

Царь был вынужден признать, что Александр выиграл, и освободил Аннабел.

— Желаю удачи вам обоим, — сказал Царь. — Однако почему бы вам не задержаться на острове еще на денек? Вы ведь никогда не встречались с нашим Волшебником, а это удивительный персонаж! Он знает о вас и хотел бы с вами встретиться. Почему бы вам не навестить его?

Счастливой паре это предложение понравилось, и они решили в тот же вечер навестить Волшебника. Однако речь об этом пойдет в следующей главе.

4
Как Казир выиграл себе жену

Аннабел и Александр еле перевели дух после долгого подъема к убежищу Волшебника. Однако Волшебник, оказавшийся исключительно приятным и гостеприимным человеком, угостил их вкусным напитком, состоящим из равных частей цейлонского чая и вина из китайской корицы, который мгновенно восстановил их силы.

— Скажите, — спросила Аннабел, чьи интересы лежали в довольно практическом русле, — как вам удалось приобрести репутацию Волшебника в здешних краях?

— О, это занимательная история, — потирая руки, ответил Волшебник. — Свою карьеру здесь я начал ровно двадцать лет назад. Но своими первыми успехами я обязан философу Нельсону Гудмену, около сорока лет назад обучившему меня хитроумному логическому трюку.

— Что же это за трюк? — спросил Александр.

— Знаете ли вы, — ответил Волшебник, — что, несмотря на то, что каждый житель этого острова либо рыцарь, всегда говорящий только правду, либо плут, который всегда лжет, можно определить истинный статус любого высказывания местного жителя, задав ему единственный вопрос? При этом странно то, что, получив ответ, вы не знаете, солгали вам или сказали правду.

— Это действительно выглядит умно, — сказал Александр.

— Расскажу, как я приобрел здесь свой нынешний статус, — со смехом сказал Волшебник. — Видите ли, впервые ступив на этот остров, я решил сразу пойти во дворец Царя и попросить должность волшебника. Проблема состояла в том, что я не знал, где этот дворец находится. Отыскивая дворец, я оказался у развилки дорог. Я понимал, что одна из дорог ведет к дворцу, но не догадывался, какая именно. У развилки стоял местный житель, который, несомненно, знал правильный путь, но я понятия не имел, рыцарь этот человек или плут. Тем не менее, применив принцип Гудмена, я нашел правильную дорогу, задав местному жителю единственный вопрос, на который можно ответить только либо «да», либо «нет».

Какой вопрос задал Волшебник?

Если спросить местного жителя, ведет ли к дворцу левая дорога, вопрос будет бесполезным, так как вы не знаете, рыцарь он или плут.

Нужно задать следующий вопрос: «Вы из тех, кто может утверждать, что левая дорога ведет к дворцу?» Получив ответ, вы не поймете, рыцарь или плут тот, кто вам отвечает, но вы действительно узнаете, какую дорогу вам выбрать. Точнее говоря, если он ответит «да», нужно выбрать левую дорогу, если ответит «нет» — правую. Это можно доказать.

Предположим, что вы получили ответ «да». Если отвечающий рыцарь, то он сказал правду и действительно принадлежит к тем, кто может утверждать, что левая дорога ведет к дворцу. Значит, следует выбрать левую дорогу. Если же он плут, то его ответ ложен, поэтому он не из тех, кто может утверждать, что левая дорога ведет к дворцу; значит, только люди другого типа, то есть рыцари, могут утверждать, что левая дорога ведет к дворцу. Но поскольку лишь рыцарь может утверждать, что левая дорога ведет к дворцу, то эта дорога на самом деле ведет к дворцу. Следовательно, независимо от того, правдив или ложен ответ «да», левая дорога ведет к дворцу.

Теперь предположим, что местный житель ответил «нет». Если он сказал правду, то он действительно не из тех, кто может утверждать, что левая дорога ведет к дворцу; значит, только плут может это утверждать. Поскольку это утверждает плут, его утверж-

дение ложно, и на самом деле левая дорога не ведет к дворцу. Если же он солгал, то на самом деле он может утверждать, что левая дорога ведет к дворцу (поскольку он сказал, что не может), однако будучи плутом, он при этом солжет; значит, на самом деле левая дорога не ведет к дворцу. Следовательно, при ответе «нет» нужно выбирать правую дорогу независимо от того, сказал правду или солгал встречный островитянин.

Принцип Гудмена — действительно замечательная вещь. Применяя его, можно добыть любую информацию у того, кто либо всегда лжет, либо всегда говорит правду. Разумеется, этот принцип не применим к тем, кто иногда говорит правду, а иногда лжет.

— Итак, — сказал Волшебник, — я нашел правильную дорогу и пошел по ней. Мой путь к дворцу потребовал довольно много времени, но это даже оказалось кстати. Встреченный мною у развилки местный житель был так поражен моими действиями, что немедленно рассказал о них множеству других островитян, и весть обо мне дошла до Царя раньше меня. Царю понравилось то, что произошло, и он взял меня на службу. С тех пор мои дела идут хорошо.

— Сейчас, — продолжал он, доставая с полки книгу в красивом переплете, — я хочу показать вам исключительно редкую и странную книгу на арабском языке под названием «Теперьскажимнетакэтоилинетак». Я узнал о ней из рассказа американского писателя Эдгара Аллана По «Тысяча вторая сказка Шахразады». По нашел эту странную сказку Шахразады в «Теперьскажимне...», но в этой книге есть и другие замечательные сказки, которые никогда не упоминались и доселе остаются неизвестными. Например, слышали ли вы «Пять историй о Казире»?

Гости отрицательно покачали головами.

— Я так и думал, что не слышали. Эти истории особенно интересны для логиков. Сейчас я их вам переведу.

Жил однажды юноша по имени Казир, главным желанием которого было жениться на дочери Царя. Он добился аудиенции у Царя своей страны и смело изложил свое желание.

— Ты интересный молодой человек, — сказал Царь, — и я уверен, что ты понравишься моей незамужней дочери. Однако сначала ты должен выдержать испытание. У меня две дочери: Амелия и Лейла; одна из них замужем, а другая нет. Если ты выдержишь испытание и понравишься моей незамужней дочери, можешь жениться на ней.

— Кто из них замужем — Амелия или Лейла? — спросил Казир.

— Ты сам должен это узнать, — ответил Царь. — В этом и состоит твое испытание. Дело в том, что мои дочери — близнецы, хотя по характеру совершенно противоположны: Лейла всегда лжет, а Амелия всегда говорит правду.

— Это удивительно! — воскликнул жених.

— В высшей мере удивительно, — ответил Царь. — Такими они были с раннего детства. Когда я ударю в гонг, появятся обе дочери, и ты должен определить, которая из них замужем. Конечно, никто не скажет тебе, кто из них Амелия, а кто Лейла и кто из них замужем. Ты можешь задать только один вопрос только одной из них, и после этого должен узнать, кто из них замужем.

— Я понял, прервал Волшебника Александр. — Казир применил принцип Гудмена, не так ли?

— Нет, — ответил Волшебник. — Жених владел принципом Гудмена, хотя, конечно, не знал, что он так называется. Его учитель, почтенный старый дервиш, обучил его этому принципу. Поэтому Казир с радостью подумал: «Мне достаточно спросить одну из дочерей Царя, относится ли она к тем людям, которые могут утверждать, что Амелия замужем. Если она ответит «да», то Амелия замужем, если же ответит «нет», то замужем Лейла. Это же проще простого!»

Однако это было вовсе не так уж просто. Случилось так, что по торжествующему виду жениха Царь определил, что тот знает принцип Гудмена, и поэтому он сказал: «Я знаю, о чем ты думаешь, и не позволю применить этот логический трюк. Если в твоем вопросе будет больше двух слов, я прогоню тебя с позором!»

— Всего два слова? — воскликнул Казир.

— Не более двух слов, — подтвердил Царь.

Прозвучал удар гонга, и появились обе дочери Царя.

Какой состоящий не более чем из двух слов вопрос должен задать жених, чтобы узнать имя замужней дочери Царя?

Жених должен спросить: «Ты замужем?»

Предположим, что дочь Царя, которой задан вопрос, отвечает «да». Она либо Амелия, либо Лейла, но мы не знаем, кто именно. Предположим, что это Амелия. Тогда ее ответ правдив, и Амелия действительно замужем. Но если это Лейла, ее ответ ложен, и на самом деле она не замужем. Значит, замужем должна быть Амелия. Итак, независимо от того, кто отвечает на вопрос, при ответе «да» замужем должна быть Амелия.

Теперь предположим, что дочь Царя ответила «нет». Если это Амелия, то ее ответ истинен, из чего следует, что она действительно не замужем; значит замужем Лейла. Если же отвечала Лейла, она солгала, и на самом деле она замужем. Независимо от того, истинен или *ложен ответ «нет», замужем должна быть Лейла.*

— Жених выдержал испытание? — спросила Аннабел.

— К сожалению, нет, — ответил Волшебник. — Если бы он не был ограничен таким коротким вопросом, ему вообще не о чем было бы беспокоиться. Однако, столкнувшись с абсолютно новой ситуацией, он вконец разволновался и просто стоял, не в силах произнести ни слова.

— Что же было дальше? — спросил Александр.

— Его прогнали из дворца. Однако затем произошли странные события. Незамужняя дочь Царя полюбила Казира, заступилась за него и уговорила отца вызвать его на следующий день для нового испытания. Царь согласился, хотя и с некоторой неохотой.

На следующий день, войдя в тронный зал, Казир заявил:

— Я придумал правильный вопрос.

— Слишком поздно, — сказал Царь. — Теперь ты должен выдержать новое испытание. Когда прозвучит гонг, снова появятся обе мои дочери (разумеется, в чадрах). Одна из них будет в голубых одеждах, а другая в зеленых. Теперь твоя задача *не* в том, чтобы узнать *имя* моей замужней дочери; ты должен определить, какая из них *не замужем*, та, что в голубых одеждах, или та, что в зеленых. Как и вчера, ты можешь задать только один вопрос, состоящий не более чем из двух слов.

Ударил гонг, и появились обе царские дочери.

Какой же вопрос должен задать жених на этот раз?

В данной ситуации вопрос: «Ты замужем?» бесполезен. Нужно задать вопрос: «Амелия замужем?» Если дочь, которой адресован вопрос, ответит «да», она замужем независимо от того, лжет она или говорит правду; если же она ответит «нет», она не замужем.

Предположим, что получен ответ «да». Если отвечала Амелия, то ее ответ истинен, и она действительно замужем. Если же отвечала Лейла, то она лгала. Тогда Амелия вовсе не замужем, значит, замужем Лейла. Таким образом, ответ «да» означает, что отвечавшая замужем. (Читателю предлагается самостоятельно доказать, что ответ «нет» означает, что отвечавшая не замужем.)

Разумеется, точно так же эффективен вопрос «Лейла замужем?» Ответ «да» означал бы, что ответившая на него не замужем, а ответ «нет» — что ответившая замужем.

Как пояснил Аннабел и Александру Волшебник, между двумя последними загадками существует интересная симметрия. Чтобы выяс-

нить, замужем ли та, к которой ты обращаешься, нужно спросить: «Амелия замужем?», а чтобы узнать, замужем ли Амелия, нужно спрашивать: «Ты замужем?» Эти два вопроса обладают любопытным свойством: задав один из них, можно логически вывести правильный ответ на другой.

— Жених снова потерпел неудачу, — продолжал Волшебник, — однако незамужняя дочь Царя влюбилась в него пуще прежнего. Царь не смог устоять перед ее уговорами и согласился назначить Казиру третье испытание на следующий день.

— Теперь, — сказал Царь жениху, — при звуке гонга появится только одна из моих дочерей. Твоя задача — узнать ее имя. Как и прежде, ты можешь задать только один вопрос, состоящий не более чем из двух слов.

Какой вопрос должен задать жених?

Эта задача легче двух предыдущих. Жениху достаточно задать любой состоящий из двух слов вопрос, ответ на который ему уже известен; например: «Лейла лжет?» Очевидно, что на этот вопрос Амелия ответит «да», а Лейла — «нет».

— Послушай, — сказал Царь своей дочери после того, как жених снова не выдержал испытания, — ты действительно уверена, что хочешь выйти за него замуж? Это же удивительный простак. Последняя задача была очень легкой, и тебе это прекрасно известно.

— Он очень нервничал, — отвечала дочь. — Пожалуйста, испытай его еще раз.

— Итак, — продолжал Волшебник, — на следующем испытании жениху сказали, что при ударе гонга появится незамужняя дочь. Он может задать только один состоящий из двух слов вопрос, на который можно ответить либо «да», либо «нет». Если она ответит «да», он может на ней жениться, если же она ответит «нет», его прогонят.

Какой вопрос должен задать жених?

Достаточно задать вопрос: «Ты Амелия?» Правдивая Амелия ответит на него «да», а лгунья Лейла тоже ответит «да», то есть солжет, утверждая, что она Амелия.

— Мое терпение иссякло, — заявил Царь своей дочери, когда жених в четвертый раз потерпел неудачу. — Больше никаких испытаний!

— Пожалуйста, — взмолилась его дочь, — назначь еще одно испытание. Я обещаю, что оно будет последним.

— Хорошо, но оно будет самым последним. Ты меня поняла?

Дочь обещала не просить больше ни о каких испытаниях для жениха, и Царь согласился.

— Итак, — грозно обратился Царь к жениху (дрожавшему как осиновый лист), — ты не выдержал уже четыре испытания. Похоже, что у тебя трудности с вопросами, состоящими из двух слов, поэтому я упрощу свои требования.

— Какое облегчение! — подумал Казир.

— При звуке гонга появится одна из моих дочерей, которая либо замужем, либо нет. Ты можешь задать ей единственный состоящий из любого количества слов вопрос, на который можно ответить либо «да», либо «нет». Из ее ответа ты должен определить, замужем она или нет *и* как ее зовут.

Какой вопрос нужно задать?

Царь (который, по-видимому, заболел от всего этого) задал жениху неразрешимую задачу. В каждом из четырех предыдущих случаев жених должен был определить, какая из двух возможных ситуаций имеет место в действительности. В данном же случае он должен выбрать одну из четырех возможных ситуаций. (Возможно следующее: 1. Перед ним Амелия, и она замужем. 2. Перед ним Амелия, и она не замужем. 3. Перед ним Лейла, и она замужем. 4. Перед ним Лейла, и она не замужем.) Однако на вопрос жениха существует только два возможных ответа (либо «да», либо «нет»). С помощью только двух ответов невозможно определить, какая из четырех возможностей реализуется на самом деле.

Говоря, что задача неразрешима, я имею в виду, что не существует вопроса, допускающего только ответы «да» или «нет», который должен сработать в любом случае. Однако есть множество такого типа вопросов (по меньшей мере четыре), которые могут сработать, если жениху повезет. Например, рассмотрим вопрос: «Правда ли, что ты замужем и тебя зовут Амелия?» Лейла ответила бы на него «да» (независимо от того, замужем она или нет, так как сложное высказывание, в котором составные части соединены союзом «и» ложно, если ложны обе его части, или ложна одна из них). Амелия ответила бы «да», если она замужем, и ответила бы «нет», если она не замужем. Итак, ответ «да» оставил бы жениха в неведении, а ответ «нет» точно означал бы, что он задавал вопрос незамужней Амелии. Значит, задавая такой вопрос, жених имел бы двадцать пять шансов из ста точно установить, какая из четырех возможностей реализована в действительности. Однако никакой единственный вопрос не гарантирует определенного решения.

— Значит, они так никогда и не поженились? — спросила Аннабел.

— Царь ни за что не соглашался на их брак, — ответил Волшебник, — но дочь была настолько возмущена его последней задачей, что вышла замуж за Казира без разрешения отца. Двое молодых людей соединились и, согласно трактату «Теперьскажимне...», жили счастливо.

— Из всего этого можно извлечь один ценный урок, — продолжал он. — Никогда не полагайся безоговорочно на общие принципы и рутинные механические методы. Они позволяют решить определенный класс проблем, но становятся абсолютно неинтересными, когда открыт общий принцип. Конечно, знать общие принципы очень полезно — наука и математика не могут развиваться без них. Однако зависеть только от принципов, отрицая интуицию — это позор. Царь составил свои задачи очень умно: так, что общий принцип (в данном случае принцип Гудмена) оказался бесполезным. Каждая из его задач требовала немного изобретательности. Жених потерпел неудачу именно из-за отсутствия творческого мышления.

— Я хотела бы узнать еще вот что, — сказала Аннабел. — Записано ли в вашей книге, на какой из двух царских дочерей женился Казир?

— О, да, — ответил Волшебник. — К счастью для Казира, его женой стала правдивая Амелия. Я полагаю, это обстоятельство весьма способствовало их счастливой совместной жизни.

Однако в «Теперьскажимне...» записана история и о замужестве Лейлы. Я нахожу эту историю особенно забавной. Оказывается, Лейла ненавидела своего жениха, но когда он спросил, согласна ли она выйти за него, Лейла, будучи вечной лгуньей, ответила «да», и в результате оказалась замужем.

— Как видите, — заключил Волшебник, — непрерывное вранье тоже бывает опасным!

Собеседники от души посмеялись над этой историей. Затем Аннабел и Александр, поблагодарив Волшебника за самый увлекательный и поучительный вечер, сказали, что им пора возвращаться и готовиться к завтрашнему отъезду.

— А слышали ли вы об эпидемии, поразивший этот остров три года тому назад? — спросил Волшебник.

Молодые люди отрицательно покачали головами.

— О, я хотел бы рассказать вам о ней, но, к сожалению, сегодня не могу. Я жду Астролога острова, который должен появиться с минуты на минуту. Почему бы вам не задержаться здесь еще на несколько дней?

— Мои родители будут беспокоиться обо мне, — пояснила Аннабел.

— Они не будут беспокоиться, — ответил Волшебник. — Я уже сообщил на ваш остров, что вы здесь и с вами все хорошо. Ваш отец знает, что я рыцарь.

Этот довод переубедил молодых людей, и они согласились навестить Волшебника на следующий день.

— А кто этот Астролог? — спросил Александр уходя.

— О, он совершенно слабоумен, а к тому же плут и шарлатан. Я должен мириться с ним в силу политики этого острова, но вам советую не иметь с ним никаких дел.

Как раз в этот момент вошел Астролог, кивнул головой юноше и девушке, которых он никогда раньше не видел, и сказал Волшебнику: «Знаешь ли, она Царица Савская, а он Царь Соломон».

— Типичные царь с царицей, — сказал Волшебник, заговорщицки подмигнув уходящей паре.

5
Эпидемия лживости

— Она налетела как ветер сирокко и поразила около половины обитателей острова. К счастью, я оказался среди тех, кому удалось уберечься от этой эпидемии, — объяснял Волшебник Аннабел и ее избраннику, которые специально поднялись в его башню, чтобы послушать рассказ о странной эпидемии, пронесшейся над Островом Рыцарей и Плутов около трех лет назад.

— Никто не мог верно определить, что это за болезнь, — продолжал Волшебник, — и даже профессор Бактериус со всеми своими знаниями иммунологии оказался в полном тупике.

— Она была вирусной или бактериальной? — спросила Аннабел.

— Даже это было неизвестно! — воскликнул Волшебник. — В теле больного не наблюдалось абсолютно никаких химических изменений. Фактически не было вообще никаких симптомов; заболевание было чисто психологическим. Эпидемия длилась всего неделю, в течение которой на острове происходило вавилонское столпотворение. Затем совершенно внезапно все стало на свои места.

— Вы сказали, что симптомы болезни были чисто психологическими, — сказал Александр. — В чем именно они заключались?

— Видите ли, — ответил Волшебник, — люди, пораженные болезнью, изменяли свой нормальный статус лжеца или говорящего правду на противоположный, и уже нельзя было сказать, что все рыцари говорят правду, а все плуты лгут. Больные рыцари лгали, а больные плуты говорили правду, в то время как здоровые рыцари продолжали говорить правду, а здоровые плуты по-прежнему лгали. Поэтому на протяжении той странной недели на острове было четыре типа жителей: здоровые рыцари, больные рыцари, здоровые плуты и больные плуты. Здоровые рыцари и больные плуты говорили только правду, а больные рыцари и здоровые плуты только лгали. Поэтому, встретив островитянина, который высказывал заведомо ложное утверждение, нельзя было в общем случае узнать, был он больным рыцарем или здоровым плутом.

— Все это, должно быть, вызвало ужасную путаницу — заметила Аннабел.

— Сначала так и было, — ответил Волшебник. — Однако затем я обошел остров, опрашивая незнакомых жителей, чтобы понять, что происходит, и, разумеется, узнал кое-что интересное.

Подумав немного, Александр сказал: «Я понимаю, что *в общем случае* вы не могли отличить больного рыцаря от здорового плута. Например, если человек говорил, что два плюс два равно пяти, вы не могли точно сказать, является он больным рыцарем или здоровым плутом. А были ли исключения? Можно ли было *иногда* узнать по единственному ложному высказыванию, является говорящий больным рыцарем или здоровым плутом?»

— Хороший вопрос, — ответил Волшебник. — Я действительно попадал в такую ситуацию. Однажды я встретил незнакомого островитянина, высказавшего утверждение, по которому я определил не только то, что оно ложно, но и то, кем был говоривший — больным рыцарем или здоровым плутом.

Что сказал островитянин?

Он мог, например, сказать: «Я больной рыцарь». Это высказывание не может быть истинным, *так как больной рыцарь не может правдиво назвать себя больным рыцарем. Значит, он лгал, откуда следует, что он был либо больным рыцарем, либо здоровым лжецом (поскольку только эти типы лгут). Однако уже установлено, что он не мог быть больным рыцарем. Следовательно, он был здоровым плутом.*

Разумеется, островитянин мог также заявить: «Я здоровый плут». Такое мог сказать только больной рыцарь.

— В другой раз,— продолжал Волшебник,— я встретил островитянина, из высказывания которого я смог сделать вывод, что он должен быть плутом, хотя и не смог определить, здоров он или болен.

Что сказал островитянин?

Он сказал: «Я болен». Здоровый рыцарь никогда не солжет и не скажет, что он болен, а больной рыцарь никогда не признается, что он болен. Следовательно, говоривший был плутом. Он мог быть либо здоровым плутом, который лгал, что он болен, либо больным плутом, который правдиво говорил, что он болен.

— Вскоре после этого я встретил другого местного жителя, из высказывания которого я смог сделать вывод, что он болен, но не смог узнать, рыцарь он или плут.

Что сказал островитянин?

Он сказал: «Я плут». (Читателю предлагается самостоятельно вывести следствия из этого высказывания.)

— Позже я встретил местного жителя, из высказывания которого я смог сделать вывод, что он либо здоровый рыцарь, либо больной рыцарь, либо здоровый плут, но не смог определить, к какому именно из этих трех типов он относится.

Что сказал островитянин?

Он сказал: «Я здоровый рыцарь». Это мог правдиво утверждать здоровый рыцарь; это же могли лживо утверждать больной рыцарь и здоровый плут, но больной плут не мог солгать и говорить, что он здоровый рыцарь. Итак, это мог сказать любой, кроме больного плута.

И наконец, я встретил двух незнакомых островитян, которых звали Астор и Бенедикт. Сначала Астор сказал что-то непонятное, поскольку говорил он на малознакомом мне местном наречии. Я спросил Бенедикта, что сказал Астор, и Бенедикт ответил: «Он сказал, что он либо больной рыцарь, либо здоровый плут». Астор запротестовал: «Я не говорил этого». «Астор плут», — заявил Бенедикт. «Это Бенедикт болен», — сказал Астор.

Этого мне было достаточно для того, чтобы точно сказать, кто такие Астор и Бенедикт на самом деле.

Кем же они были?

На протяжении этой странной недели ни один из жителей острова не мог назвать себя больным рыцарем или здоровым плутом. Ведь если он больной рыцарь или здоровый плут, он лжет; значит, он никогда не признается, что он больной рыцарь или здоровый плут. Если же он не является больным рыцарем или здоровым плутом, то он правдив и никогда не солжет, назвав себя больным рыцарем или здоровым плутом. Выходит, Бенедикт лгал, утверждая, что Астор назвал себя больным рыцарем или здоровым плутом. Следовательно, Астор был правдив, отрицая, что он это сказал. Итак, совравший Бенедикт сказал, что Астор плут. Значит, на самом деле Астор рыцарь. Поскольку он рыцарь и говорит правду, то он должен быть здоровым рыцарем. Кроме того, правдивый Астор сказал, что Бенедикт болен. Следовательно, Бенедикт действительно болен. Поскольку он болен и при этом лжет, он больной рыцарь. Итак, Астор — здоровый рыцарь, Бенедикт — больной рыцарь.

— Случилось так, — продолжал Волшебник, — что Астролог острова тоже заболел. Как вы знаете, он плут. Однако болезнь оказала на него поразительное действие. Целую неделю он не только говорил правду, но и был на удивление благоразумен. Очень жаль, что он выздоровел! Как бы там ни было, за это время мы провели множество совместных научных исследований. Однажды, прогуливаясь по берегу моря, мы увидели шедшего нам навстречу местного жителя. «О, я знаю его, — сказал Астролог. — Я могу сказать, рыцарь он или плут, но не знаю, болен он сейчас или здоров». Проходя мимо нас, островитянин сказал: «Я здоровый рыцарь». «Отлично, — сказал мне тогда Астролог, — теперь я знаю, болен ли он».

— Этот островитянин был рыцарем или лжецом, и был ли он болен? — спросил Волшебник Аннабел и Александра.

— Минуточку, — вмешалась Аннабел, — вы уверены, что дали нам достаточно информации для ответа на вопрос.

— Разумеется, я уверен, — ответил Волшебник.

А вы знаете ответ?

Из высказывания островитянина следует только то, что он не является больным плутом. (Из предыдущей загадки нам известно, что здоровый рыцарь, больной рыцарь и здоровый плут могли произнести такое высказывание, а больной плут не мог.) До того, как Астролог услышал слова островитянина, он знал, рыцарь *островитянин или плут, но мы этого не знали. Допустим, мы знали, что он рыцарь. Тогда после слов островитянина Астролог не смог бы определить, болен этот рыцарь или здоров, то есть он не узнал бы больше того, что знал прежде. Однако сказано, что Астролог действительно узнал, болен ли островитянин. Значит, остается единственная возможность: Астролог сначала знал, что островитянин рыцарь, а после его слов узнал, что он здоров.*

— Еще интереснее то, — продолжал Волшебник, — что во время нашей прогулки мы встретили разговаривавшего с самим собой местного жителя, о котором мы оба кое-что знали. «Я знаю, рыцарь он или плут, — сказал я Астрологу, но я не знаю, болен ли он». «Забавно то, — ответил Астролог, — что я знаю, болен ли он, но не знаю, рыцарь он или плут. Не говори мне, что знаешь ты, а я не скажу тебе, что знаю я. Давай, послушаем, что скажет наш встречный». Когда мы встретились, островитянин бормотал: «Я не являюсь здоровым плутом. Я не являюсь здоровым плутом...» Мы с Астрологом задумались, но я не смог сказать, здоров ли островитян, а Астролог не смог определить, рыцарь островитянин или плут. Кто был наш встречный, рыцарь или плут, и был ли он болен?

— Подождите, — сказала Аннабел, — если вы этого не знаете, то как мы это можем знать?

— Я не говорил, что я не знаю сейчас, — ответил Астролог. — Я сказал, что я *не знал* этого тогда, когда Астролог говорил мне, что *он* не знает того, что известно мне.

Так кем же был этот странный островитянин, и был ли он болен?

Здоровый плут может солгать и сказать, что он не является здоровым плутом; больной плут может правдиво сказать, что он не является здоровым плутом. Здоровый рыцарь тоже может правдиво сказать, что он не является здоровым плутом; но больной рыцарь никогда не может правдиво сказать, что он не является здоровым плутом. Таким образом из высказывания островитянина следует, что он не является больным рыцарем. Волшебник и Астролог узнали об этом, услышав его слова.

Волшебник прежде знал, рыцарь этот островитянин или плут. Если он раньше знал, что островитянин рыцарь, то узнав, что островитянин не является больным рыцарем, он узнал бы, что островитянин — здоровый рыцарь. Однако в задаче сказано, что по высказыванию островитянина Волшебник не смог определить, здоров тот или болен. Следовательно, раньше Волшебник должен был знать, что островитянин плут.

Астролог же раньше знал, здоров островитянин или болен. Если бы он знал, что остро-

витянин болен, то после высказывания островитянина он узнал бы, что островитянин — больной плут (поскольку стало известно, что он не может быть больным рыцарем). Однако если бы он раньше знал, что островитянин здоров, он и после высказывания островитянина не узнал бы, рыцарь тот или плут. Поскольку Астролог действительно этого не узнал, раньше он должен был знать, что островитянин здоров. Следовательно, островитянин был здоровым плутом.

— Во время этой эпидемии, — продолжил Волшебник, — у меня украли ценное кольцо. Немедленно были арестованы трое подозреваемых, Джекоб, Карл и Луи, и в тот же день состоялся судебный процесс. Каждый знал, что один из этих троих действительно украл кольцо, но до суда не было известно, кто именно. Далее следует выдержка из протокола судебного заседания. (Следует заметить, что трое подозреваемых были близкими друзьями, и поэтому вполне правильно предполагать, что двое невиновных знали, кто вор.)

Судья (Джекобу): Что ты знаешь о воре?
Джекоб: Вор плут.
Судья: Он здоров или болен?
Джекоб: Он здоров.
Судья (Карлу): Что ты знаешь о Джекобе?
Карл: Джекоб плут.

Судья: Он здоров или болен?

Карл: Джекоб болен.

Судья немного подумал и спросил Луи: «Ты вор?» Луи ответил (либо «да», либо «нет»), после чего судья определил, кто был вором. Так кто же украл кольцо?

— Минуточку,— остановил его Александр, — вы не сказали, что ответил Луи.

— Задачу можно решить, не зная его ответа, — сказал Волшебник.

Так кто же украл кольцо?

Оба ответа Карла либо одновременно истинны, либо одновременно ложны. В первом случае Джекоб — больной плут, во втором он — здоровый рыцарь. Значит, Джекоб либо больной плут, либо здоровый рыцарь, и в каждом из этих состояний он говорит правду. Тогда оба ответа Джекоба правдивы, поэтому вор действительно является здоровым плутом и, следовательно, лжецом. Поскольку Джекоб говорит правду, а вор лжет, Джекоб не может быть вором.

Судья знал об этом еще до того, как он задал вопрос Луи. Он спросил Луи, является ли тот вором, но ответ Луи нам неизвестен. Если Луи ответил «да», он должен быть невиновен, так как уже известно, что настоящий вор солгал бы по поводу своей виновности. Если же Луи ответил «нет», то невозможно определить, виновен он или невиновен. Если он сказал *при этом правду, он невиновен, что прекрасно совмещается с фактом лживости реального вора. Но если Луи солгал, то он вор, что опять же не противоречит тому, что реальный вор должен был лгать. Значит, если бы Луи ответил «нет», судья не смог бы вынести решение. Однако известно, что судья смог это сделать. Значит, Луи ответил «да», что позволило судье установить его невиновность. Следовательно, кольцо украл Карл.*

По иронии судьбы Луи оправдал себя, заявив, что он виновен!

6
С другой стороны...

Бракосочетание принцессы Аннабел и Александра на Острове Рыцарей и Плутов протекало без сучка и задоринки до того момента, когда паре нужно было дать брачный обет. Тогда мировой судья провозгласил: «Я *не* объявляю вас мужем и женой». Все пришли в ужас. Даже Аннабел и Александр, привыкшие к странным обычаям Острова Рыцарей и Плутов, на котором каждый местный житель был либо рыцарем, всегда говорившим правду, либо всегда лгавшим плутом, затаили дыхание. Наконец, среди падающих в обморок гостей нашелся рыцарь, который объяснил всем, что судья фактически является *официально уполномоченным* плутом, и, следовательно, его утверждение является юридическим подтверждением того, что пара является мужем и женой. Пронесся общий вздох облегчения, а за ним последовал хор поздравлений.

Царь Цорн, который успел полюбить молодых, устроил для них во дворце великолепный банкет, на который были приглашены все важные персоны, включая Волшебника и даже престарелого сварливого Астролога. После пира выступали танцовщики, жонглеры, пожиратели огня и фокусники. Но главное началось тогда, когда Волшебник пригласил всех послушать рассказ о его путешествиях.

— Несколько месяцев назад, — начал он, — я посетил необычную страну, где каждый из местных жителей был либо левшой, либо правшой.

— А что в этом такого странного? — перебил его Астролог.

— Ничего, — ответил Волшебник, — за исключением того, что любой правша писал своей правой рукой только истину, а левой рукой только ложь. Левша же, наоборот, писал левой рукой только истину, а правой только ложь.

— В этом нет ничего удивительного, — заявил Астролог. (Вы, конечно, помните, что Астролог был плутом.)

— Это *действительно* странно, — жестко сказал Царь, — и я хочу, чтобы ты прекратил перебивать рассказчика.

Повисла напряженная тишина.

— Продолжай свою историю, — сказал Царь. — Астролог больше не станет перебивать тебя, в противном случае я велю бросить его в темницу.

— Эта страна, — продолжал Волшебник, — открывала прекрасные возможности для логических изысканий. Возникавшие в ней проблемы особенно заинтересуют вас, Ваше Величество.

— Какие именно? — спросил Царь.

— В первый же день я нашел клочок бумаги, на котором местный житель написал единственное предложение, из которого я сделал вывод, что писавший был левшой.

— Что это было за предложение? — спросил Царь.

— О, именно на этот вопрос я и предлагаю всем вам найти ответ, — улыбнулся Волшебник.

На клочке бумаги было написано: «Я записал это левой рукой». Это предложение либо истинно, либо ложно. Если оно истинно, то автор действительно писал его левой рукой. А поскольку только левша пишет правду левой рукой, написавший это предложение должен быть левшой. Если же предложение ложно, тогда на самом деле оно было написано правой рукой. Поскольку лишь левша может написать ложь правой ру-

кой, предложение должен был написать именно левша.

— На следующий день, — продолжал Волшебник, — мне попал в руки листок бумаги, на котором снова было написано единственное предложение. Я легко определил, что его написал правша своей левой рукой. Какое это было предложение?

— Я знаю! — воскликнул один из гостей. — Там было предложение типа «Два плюс два равно пяти». Такое мог написать только правша левой рукой.

— Разумеется, такое *могло* быть. Однако это же предложение мог написать и левша своей правой рукой. Но предложение, о котором я говорю, мог написать *только* правша своей левой рукой.

Какое это предложение?

Самое простое решение — это предложение: «Я левша и написал это предложение правой рукой». Предложение должно быть ложным. Ведь если бы оно было истинным, это значило бы, что левша написал правду правой рукой, что невозможно. Поскольку предложение ложно и его не писал левша правой рукой, его должен был написать правша левой рукой.

— Проведя в этой стране неделю, — с гордостью сказал Волшебник, — я приобрел репутацию эксперта по рукописям. Однажды местный шеф полиции обратился ко мне за консультацией. Были найдены два клочка бумаги. На одном из них было написано: «Я всегда пишу правой рукой», а на втором: «Я иногда пишу левой рукой». Полиции было известно, кто автор этих предложений, но по каким-то причинам, которыми у меня не было никакого повода интересоваться, очень важно было определить, какое из этих предложений истинно. Можно ли определить, всегда ли автор писал правой рукой или он иногда писал левой рукой?

Предложения противоречат друг другу, значит одно из них истинно, другое ложно. Из этого вытекает, что автор предложений иногда пишет одной рукой, а иногда другой. Следовательно, второе предложение истинно: он действительно иногда пишет левой рукой.

— В другой раз, — продолжал Волшебник, — полиция консультировалась со мной по поводу кражи. Было известно, что вор — левша. Подозреваемый в краже был арестован, и прежде всего нужно было определить, правша он или левша. Обыскав его дом, полиция обнаружила блокнот. Подозреваемый признался, что записи в блокноте делал он. У меня есть копии первых двух страниц этого блокнота.

Волшебник показал всем две страницы. На первой было написано: «Предложение, написанное на второй странице, ложно»; на второй странице было написано: «На первой странице я писал левой рукой».

— Полицию интересовало, может ли вообще найденный блокнот внести какую-то ясность в дело, — сказал Волшебник, передавая страницы блокнота гостям. — Так может или нет?

Невозможно определить, какое из этих двух предложений ложно, но можно определить, правша подозреваемый или левша. Предположим, что написанное на первой странице предложение истинно. Тогда предложение, написанное на второй странице, ложно, откуда следует, что предложение на первой странице было написано правой рукой. Значит, писавший должен быть правшой, так как он написал на первой странице истинное предложение правой рукой. Теперь предположим, что написанное на первой странице предложение ложно. Тогда предложение, написанное на второй странице, истинно (так как в предложении на первой странице ложно утверждается, что предложение на второй странице ложно), откуда следует, что предложение на первой странице было написано левой рукой. Значит, и в этом случае подозреваемый должен быть правшой, так как он написал на первой странице ложное предложение левой рукой. Итак, подозреваемый правша, и, следовательно, он не виновен в краже.

— Вечер подходит к концу, — сказал Волшебник, — поэтому я расскажу вам еще только одну историю. Однажды, сидя в кафе со своим другом Робертом Смитом, я спросил его, левша он или правша. Вместо ответа он с улыбкой вырвал лист из блокнота и написал на нем: «Я левша и написал это левой рукой». Конечно, я видел, какой рукой он писал, но все же не смог определить, левша он или правша. Как раз в это время к нам присоединилась его жена. Роберт показал ей листок и спросил, может ли она определить, какой рукой он писал. Она знала, левша ее муж или правша, и была хорошим логиком, но, тем не менее, так и не смогла определить, какой рукой он писал на листке. Так левша Роберт или правша?

— Минуточку, — сказал Царь, — ты же сказал, что видел, какой рукой писал мистер Смит. Не забыл ли ты сказать нам, какой рукой он писал?

— Я не забыл, — ответил Волшебник. — Исходя из информации, которую я вам сообщил, уже можно определить, какой рукой он писал.

Какой рукой писал мистер Смит, и кем он был — левшой или правшой?

Если бы мистер Смит был правшой, он не мог бы написать это предложение правой рукой. Значит, остается три возможности: он правша и написал ложное предложение левой рукой;

он левша и написал ложное предложение правой рукой; он левша и написал истинное предложение левой рукой.

Волшебник видел, какой рукой писал мистер Смит. Если бы он писал правой рукой, Волшебник узнал бы, что реальна только вторая из трех возможных ситуаций, и мистер Смит левша. Однако Волшебник этого не узнал. Следовательно, мистер Смит писал левой рукой (и Волшебник не мог определить, какая из возможностей реализуется, первая или третья).

Миссис Смит знала, левша или правша мистер Смит, но не видела, какой рукой он писал. Если бы мистер Смит был правшой, его жена, зная об этом, определила бы, что реальна именно первая возможность, и, значит, муж писал левой рукой. Поскольку она не смогла этого определить, мистер Смит должен быть левшой. Однако даже зная об этом, его жена не могла узнать, какая возможность реализуется, вторая или третья. Тем самым доказано, что мистер Смит левша и писал он левой рукой.

— Тост за молодоженов! — провозгласил Царь Цорн. — Долгих им лет счастливой жизни, и пусть они чаще приезжают на этот остров, привозя с собой новые увлекательные загадки!

Снова зазвучал хор поздравлений.

— А теперь главное событие праздника — возможный свадебный подарок молодым!

— *Возможный* подарок? — пробурчал Астролог.

— Я разрешаю Волшебнику представить подарок всем окружающим, — продолжал Царь. — Полагаю, что вы найдете его забавным.

Волшебник поднялся и подошел к двум великолепным драгоценностям, которыми собравшиеся любовались весь вечер.

— Новобрачный должен встать и произнести единственное высказывание, — сказал Волшебник. — Если оно окажется истинным, Его Величество милостиво обещал подарить молодым одну из этих драгоценностей, а может быть, и обе. Если же высказывание окажется ложным, Его Величество вообще отказывается дарить молодоженам какие-либо подарки.

Затем Волшебник хитро подмигнул Александру, как бы говоря: «Ну, старина, пошевели мозгами и произнеси такое высказывание, что у Царя останется единственная возможность — подарить вам *обе* драгоценности».

Александр поступил умно и произнес именно такое высказывание. Что он сказал?

Александр сказал: «Неправда, что Его Величество подарит нам одну и только одну из этих драгоценностей».

Допустим, что это высказывание ложно. Тогда верно, что Царь подарит одну и только *одну драгоценность. Однако Царь не может ничего подарить за ложное высказывание. Значит, высказывание не должно быть ложным, оно должно быть истинным. Поскольку высказывание истинно, Царь, чтобы сдержать свое слово, должен подарить молодым. по крайней мере, одну драгоценность. Однако поскольку высказывание Александра истинно, Царь не может подарить только одну драгоценность. (Сделав это, он фальсифицировал бы высказывание!) Следовательно, он должен подарить молодоженам обе драгоценности. Что он и сделал.*

7
Остров Неполного Молчания

Спустя несколько дней после бракосочетания наша счастливая пара, Аннабел и Александр, отплыла домой. Увы, их подстерегала опасность! Через пару часов плавания на шхуну напали пираты. Молодых супругов схватили и продали в рабство царю угрюмого острова, известного под названием Остров Неполного Молчания.

— Я объясню вам особенности нашего острова, — сказал Царь пленникам. — Как и на острове Царя Цорна, здесь каждый житель либо рыцарь, либо плут. Однако здесь люди не всегда отвечают на заданные им вопросы. Если вы зададите вопрос рыцарю, и он что-нибудь ответит, его ответ будет правдив, но он может вообще ничего не ответить . Если вы зададите вопрос плуту, и он что-нибудь ответит, его ответ будет ложью, но он тоже может ничего не ответить. Если вы придумаете такой вопрос, что местный житель не сможет ответить на него, не погрешив против своего врожденного рыцарства или плутовства, что вполне возможно, он наверняка откажется отвечать. Теперь вам должно быть ясно, почему наш остров так называется.

— Два плюс два равно четыре, — продолжал Царь. — Теперь вы знаете, что я рыцарь. К вашему несчастью, я не так добродушен, как Царь Цорн. Однако я и не так жесток, как обо мне говорят. Поэтому я даю вам хорошие шансы на освобождение. Я назначаю для вас пять исключительно трудных испытаний. Если вы выдержите *все*, я отпущу вас на свободу; если же вы не выдержите хотя бы *одно*, мужчине отрубят голову, а принцесса достанется мне!

— Мы должны пройти *все* пять исключительно трудных испытаний, и это вы называете «хорошими шансами»? — спросил Александр.

— Таковы мои условия, — отрезал Царь, и молодой паре были даны пять следующих заданий:

Задание 1. Сформулируйте вопрос, на который плут может ответить либо «да», либо «нет», а рыцарь вообще не может ответить.

Задание 2. Сформулируйте вопрос, на который рыцарь может ответить либо «да», либо «нет», а плут вообще не может ответить.

Задание 3. Сформулируйте вопрос, на который рыцарь может ответить только «нет», а плут вообще не может ответить.

Задание 4. Сформулируйте вопрос, на который рыцарь может ответить только «да», а плут вообще не может ответить.

Задание 5. Сформулируйте вопрос, на который не могут ответить ни рыцарь, ни плут.

Решение первых пяти заданий

Задание 1. Вопрос: «Вы ответите на этот вопрос “нет”?» (Данный вопрос не означает: «Вашим *правильным* ответом на этот вопрос будет слово “нет”?» Он означает: «Вы действительно ответите “нет” на этот вопрос?»)

Как Волшебник объяснял Эберкромби в главе 1, никто не может ответить на этот вопрос правильно, значит, рыцарь вообще не может на него ответить. Плут может ответить либо «да», либо «нет», поскольку оба эти ответа не верны.

Задание 2. Вопрос: «Вы ответите на этот вопрос “да”?» Оба ответа, «да» и «нет», являются правильными, поэтому на вопрос может ответить только рыцарь, причем любым из этих двух слов.

Задание 3. Я сомневаюсь, что в этом случае подойдет какой-либо *простой* вопрос; вопрос должен быть сложным (как я полагаю). Например: «Вы плут *и* ответите на этот вопрос "да"?»

Если спрашиваемый рыцарь, то, разумеется, *неправда*, что он плут и что он ответит «да», поскольку неправда уже то, что он плут! Поэтому, если он рыцарь, правильный ответ на вопрос — «нет»; значит, будучи рыцарем, он и ответит «нет». Следовательно, рыцарь может ответить «нет», но не может ответить «да».

Теперь предположим, что вопрос адресован плуту. Допустим, что он ответил «да». Тогда правда то, что он плут, и то, что он ответил «да», значит, *правильный* ответ на вопрос — «да», и плут ответил правдиво, что невозможно! Следовательно, плут не может ответить «да» на этот вопрос. Допустим, что он ответил «нет». Значит, неправда, что он плут *и* что он ответил «да» (поскольку неправда то, что он ответил «да»). Следовательно, он правильно ответил на вопрос, что невозможно для плута! Итак, на этот вопрос плут не может ответить ни «да», ни «нет».

Задание 4. Вопрос: «Вы рыцарь или ответите на этот вопрос "да"?»

Примечание. Любое утверждение вида «одно или другое» следует считать истинным и тогда, когда «то» и «это» одновременно истинны. Например, если правила поступления в колледж требуют, чтобы абитуриент имел годичную подготовку по математике или годичную подготовку по иностранному языку, эти правила, конечно же, не запрещают поступать в колледж тем, кто подготовлен и по математике и по иностранному языку. В этой книге выражение «или... или...» везде означает *по крайней мере что-то одно* (а может быть и то и другое вместе).

Теперь рассмотрим приведенный выше вопрос. Предположим, что он задан рыцарю. Тогда, конечно, истинно то, что он рыцарь *или* он ответит на вопрос словом «да». Значит, «да» — правильный ответ, рыцарь может ответить «да» (но не может ответить «нет»). Теперь допустим, что вопрос задан плуту. Если он ответит «да», то снова истинно, что он рыцарь *или* его ответом является слово «да» (поскольку он ответил «да»). Значит, плут ответил на вопрос правильно, что невозможно. Допустим, что он ответил «нет». Тогда неверно, что он рыцарь, и неверно, что он ответил «да». Значит, «нет» — правильный ответ на вопрос, и снова получается, что плут сказал правду! Итак, ясно, что плут не может ответить на этот вопрос ни «да», ни «нет».

Задание 5. Вопрос: «Вы рыцарь, который ответит на этот вопрос "нет", или плут, который ответит на этот вопрос словом "да"?»

Предположим, что вопрос задан рыцарю. Если он ответит «нет», то он рыцарь, ответивший «нет», откуда следует, что правильный ответ на этот вопрос — «да», а рыцарь дал неправильный ответ, что невозможно. Если рыцарь ответит «да», то он не является ни рыцарем, ответившим «нет», ни плутом, ответившим «да» (поскольку он вообще не плут), и значит «нет» — *правильный* ответ на заданный вопрос. Рыцарь не может дать ложный ответ, следовательно, рыцарь вообще не может ответить на этот вопрос.

Теперь допустим, что вопрос задан плуту и он ответил «да». Тогда он плут, ответивший «да», а это значит, что он рыцарь, ответивший «нет», *или* плут, ответивший «нет» (фактически верно второе). Значит, «да» — правильный ответ на вопрос, и плут ответил на него правильно, что невозможно. Предположим, что плут ответил «нет». Тогда он не рыцарь, ответивший «нет», и не плут, ответивший «да», и, значит, правильный ответ — «нет», откуда снова следует, что плут ответил правдиво, чего он сделать заведомо не может. Итак, плут вообще не может ответить на данный вопрос.

Примечание. Подходит также вопрос: «Относитесь ли вы к типу людей, которые могут сказать, что вы ответите на этот вопрос "нет"?»

Читатели, которые помнят принцип Гудмена, объясненный в главе 4, быстро поймут, почему этот вопрос эффективен. (Принцип Гудмена гласит: всегда, когда вы спрашиваете рыцаря или плута, относится ли он к типу людей, которые могут сказать «то-то и то-то», при ответе «да» «то-то и то-то» должно быть истинным, а при ответе «нет» — ложным.) Предположим, что данный принцип применяется к сформулированному только что вопросу (где «то-то и то-то» означает: вы ответите на этот вопрос «нет»). Если спрашиваемый ответит «да», то его ответом на вопрос является «нет», что абсурдно. Если он ответит «нет», то его ответом на вопрос является «да», что опять-таки абсурдно. Следовательно, он должен молчать.

Александру позволили советоваться с Анабел по любым вопросам. Вместе они правильно выполнили все пять заданий, и на следующий день отнесли свои ответы Царю.

— Гм-м... — хмыкнул Царь, проверив правильность решений, — и все-таки я не отпускаю вас на свободу. Завтра я дам вам еще одиннадцать заданий.

Однако ночью Царь внезапно умер. Одни историки утверждали, что Царь скончался от сердечного приступа, другие говорили, что причина его смерти — угрызения совести, а третьи — что он умер от сердечного приступа, *вызванного* угрызениями совести. Этот спор трудно разрешить. Однако как бы там ни было, новый царь оказался справедливым человеком, настоявшим на том, чтобы обещание прежнего царя было выполнено. Поэтому молодоженов отпустили на свободу. Они подняли паруса и счастливо добрались до дома, где их радостно приветствовали все жители родного острова.

Теперь многие историки пытаются выяснить, какие одиннадцать заданий имел в виду покойный Царь. Конечно, эта проблема неразрешима (если только не предполагать, что существует потусторонняя жизнь — ведь я, как логик, должен рассматривать *все* возможности!). Однако у меня есть теория, которой я хочу с вами поделиться.

Читая хроники, в которых записана эта история, я счел очень странным то, что Царь дал молодой паре только пять заданий вместо шестнадцати — ведь было еще одиннадцать аналогичных заданий, которые он почему-то им не предложил. Моя теория состоит в том, что он заранее планировал использовать именно эти задания на следующий день. Видите ли, есть только четыре возможных варианта поведения рыцаря, которому задают вопрос (он может ответить только «да», может ответить только «нет», может ответить «да» или «нет» и вообще не может ничего ответить). Для каждой из этих возможностей существует четыре возможных варианта поведения плута. Значит, существует всего шестнадцать возможностей. Интересно, что любую из них можно реализовать с помощью вопроса! Пять из них мы уже рассмотрели, и я установил, что для каждого из перечисленных далее одиннадцати требований (с 6-го по 16-е), существует вопрос, который этому требованию удовлетворяет.

6. Плут может ответить только «да», а рыцарь вообще не может ответить.

7. Плут может ответить только «нет», а рыцарь вообще не может ответить.

8. Плут может ответить только «да», а рыцарь может дать любой из этих ответов.

9. Плут может ответить только «нет», а рыцарь может дать любой из этих ответов.

10. Рыцарь может ответить только «да», а плут может дать любой из этих ответов.

11. Рыцарь может ответить только «нет», а плут может дать любой из этих ответов.

12. И рыцарь и плут могут дать любой из двух ответов.

13. И рыцарь и плут могут ответить «нет», но ни один из них не может ответить “да”.

14. И рыцарь и плут могут ответить «да», но ни один из них не может ответить “нет”.

15. Рыцарь может ответить только «нет», а плут может ответить только “да”.

16. Рыцарь может ответить только «да», а плут может ответить только «нет».

Читатель может поразвлечься составлением нужных вопросов. Готовые решения приведены в конце данной главы (но я не даю доказательств того, что каждый из вопросов действительно подходит; читатель уже должен сам уметь представить такие доказательства).

Обсуждение

Двенадцать из шестнадцати требуемых вопросов (включая пять первых, уже известных читателю) обладают странным свойством — невозможно определить *правильный* ответ на вопрос до тех пор, пока на него не дан *реальный* ответ. (Я не знаю вопросов, которые не имеют такого свойства и в то же время удовлетворяют заданным условиям.) Всем им присуще и свойство *самореференции* — каждый вопрос является вопросом о самом этом вопросе.

Еще один пример самореференциального вопроса: «В этом вопросе точно шесть слов?» Ответ на него очевиден: «Да». Довольно курьезно то, что «да» *не является* правильным ответом на вопрос: «В этом вопросе шесть слов?» Самореференциален также вопрос: «Этот вопрос глуп?» (Я полагаю, что правильный ответ на него: «Да».)

Существует история, в которой говорится, что греческий философ Эпименид совершил паломничество к Будде и спросил его: «Какой вопрос самый лучший, и какой самый лучший на него ответ?» Будда ответил: «Самый лучший вопрос ты только что задал, а самый лучший ответ я тебе сейчас даю».

Самореференция играет заметную роль в современной логической теории и компьютерной науке. К тому же она сильно зачаровывает! Она занимает центральное место в доказательстве знаменитой теоремы Гёделя о неполноте. (В данной книге Волшебник будет еще много говорить об этом.)

Ответы на задания 6–16

6. Вы рыцарь и ответите на этот вопрос: «Нет»?

7. Вы плут или вы ответите на этот вопрос: «Нет»?

8. Вы рыцарь и ответите на этот вопрос: «Да»?

9. Вы плут или вы ответите на этот вопрос: «Да»?

10. Вы рыцарь или вы ответите на этот вопрос: «Нет»?

11. Вы плут и ответите на этот вопрос: «Нет»?

12. Вы ответите на этот вопрос: «Да»?
13. Вы плут?
14. Вы рыцарь?
15. Два плюс два равно пяти?
16. Два плюс два равно четырем?

Часть II

Загадки и метазагадки

8
Воспоминания дяди Волшебника

Через несколько месяцев после возвращения домой наши молодые почувствовали непреодолимое желание побывать на острове Царя Цорна еще раз, а особенно навестить Волшебника, который их просто очаровал. Они планировали задержаться на острове на неделю-другую, не зная, что события будут развиваться так интересно, что они не смогут заставить себя уехать оттуда в течение нескольких месяцев!

Прибыв на остров, они быстро нашли Волшебника. Тот обрадовался встрече. В то время он пребывал в прекрасном ностальгическом настроении и проводил послеобеденное время, вспоминая своего дядю.

— Как жаль, что вы не встречались с ним, — сказал он Аннабел и Александру. — Он был самым интересным человеком из всех, кого я когда-либо знал. Фактически именно он возбудил во мне интерес к логике.

— Как же ему это удалось? — спросил Александр.

— Вполне естественно, — ответил Волшебник, — он задавал мне увлекательные загадки всех видов во времена моего детства и отрочества. Помню, когда я был еще очень мал — мне было не больше шести — у дяди было четыре собаки, с которыми я любил играть. Однажды он предложил мне загадку об этих собаках, и я по сей день не знаю, правдива была его история или выдумана; как бы то ни было, загадку я запомнил.

1

«Как-то я дал своим собакам миску с печеньем. Сначала к миске подошел старший пес. Он съел половину всего количества печенья и еще одно печенье. Затем пришел второй и съел половину оставшегося в миске печенья плюс еще одно. За ним прибежал третий и тоже съел половину того, что нашел в миске, плюс еще одно печенье. И, наконец, с опозданием появился четвертый, самый младший. Когда он съел половину того, что ему осталось, плюс еще одно печенье, миска была пуста. Сколько печений было в миске, когда начал есть старший пес?»

— Такую загадку загадал мне дядя.

А вы можете найти ответ? (Далее ответы будут приведены, как правило, в конце каждой главы.)

2

— Я помню, — продолжал Волшебник, — как однажды дядя спросил меня: «Что больше, шесть дюжин дюжин или полдюжины дюжин?»

— Это же очевидно, — сказала Аннабел.

— Конечно, очевидно, — подтвердил Александр.

— Вы правы, — сказал Волшебник, но все-таки многие отвечают на этот вопрос неправильно.

Каков правильный ответ?

3

— Мы жили недалеко от фермы, — сказал Волшебник. — Большую часть своей продукции фермер продавал оптом, но кое-что продавал и в розницу с овощного лотка. Дядя сказал мне, что фермер продал 90% процентов продукции оптом и только 10% в розницу, но при этом при розничной продаже он получил за каждую единицу товара вдвое больше денег, чем за каждую единицу товара, проданного оптом. Дядя спросил, могу ли я вычислить, какой процент или какую часть всех вырученных денег фермер получил от розничной торговли.

Какую же часть денег он получил, торгуя в розницу?

4

Другая простая арифметическая задача: допустим, что у вас и у меня равное количество медных монет. Сколько монет я должен вам отдать, чтобы у вас стало на десять монет больше, чем у меня?

5

Один человек принес ювелиру шесть цепочек, каждая из которых состояла из пяти звеньев. Он попросил соединить эти цепочки в одну замкнутую цепь и спросил, сколько стоит такая работа. Ювелир ответил: «За каждое звено, которое я распилю, а затем снова спаяю, я беру доллар. Поскольку вы хотите соединить в замкнутую цепь шесть отдельных цепочек, это обойдется вам в шесть долларов». «Э, нет, — сказал посетитель, — эта работа стоит меньше».

— Посетитель был прав, — сказал Волшебник. — Почему?

6

Однажды дядя дурачил меня, рассказывая, что у некого бедного человека был брат, который умер. Однако когда тот был жив, у него вообще не было брата. Как это объяснить?

7

Мой дядя также рассказывал мне о своем знакомом — крайне рассеянном профессоре, имевшем трех дочерей. Однажды дядя спросил его, сколько лет его дочерям. Профессор ответил:

— Я точно не знаю, но мне известно, что одна из троих — самая младшая.

— Забавно, — сказал дядя. — Какая же из троих самая младшая?

— Я действительно не знаю этого наверняка: то ли Алиса, то ли Мейбл.

— Ну а какая из них самая старшая?

— Я даже этого точно не знаю. Я только помню, что или Алиса самая старшая, или Лилиан самая младшая .

— Какая из дочерей профессора самая старшая, а какая самая

младшая? — спросил Волшебник.

8

Дядя загадывал мне еще одну загадку о родственниках. У одного мальчика было столько же братьев, сколько сестёр. У его сестры Грейс было в два раза больше братьев, чем сестёр. Сколько всего братьев и сестёр было в этой семье?

9

— Вот ещё одна хитрая загадка, — продолжил Волшебник. — Если 5 кошек могут поймать 5 мышек за 5 минут, сколько кошек нужно, чтобы поймать 100 мышек за 100 минут?

10

Еще дядя задал мне простую загадку, на которую многие почему-то дают неправильный ответ. Один мельник брал в качестве платы за свою работу одну десятую часть муки, которую он намолол для того, кто привез к нему свое зерно. Сколько муки он намолол для человека, у которого остался ровно один бушель* муки после того, как мельник взял свою долю?

11

Однажды дядя предложил мне древнюю загадку, которую загадывал человек по имени Митродор в 310 г. до н.э. Эта загадка о Демохе, который одну четвёртую часть свей жизни был мальчиком, одну пятую — юношей, одну треть — взрослым человеком и тринадцать лет — пожилым. Сколько было лет Демоху?

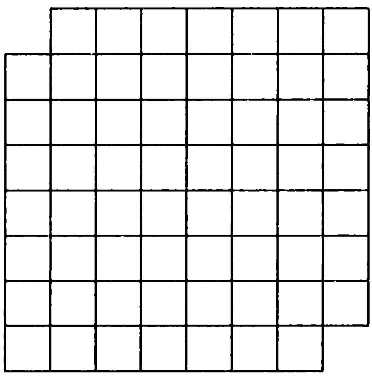
---

* *Бушель* — мера сыпучих тел. 1 британский бушель равен 8 галлонам, или 36, 35 литра. 1 американский бушель равен 35, 2 литра. Но чтобы дать правильный ответ на эту загадку, вовсе не нужно знать, что означает один бушель. Подставьте вместо «бушеля» «пуд» или «тонну» и вы в этом убедитесь. — *Прим. переводчика*

12

Однажды дядя предложил мне решить задачу, над которой я мучился много часов. Если бы я пораскинул мозгами, я бы нашел правильное решение за минуту.

Перед вами доска 8 х 8, разделенная на 64 равных квадрата, причем два крайних квадрата по левой диагонали удалены.



У вас много костяшек домино, каждая из которых может закрыть в точности два квадрата. Задача состоит в том, чтобы закрыть костяшками всю доску, причем должна быть использована *вся* поверхность любой костяшки, то есть каждая костяшка должна лежать на двух квадратах. Как это сделать?

Принцип, лежащий в основе решения, — прекрасный пример того, в чем заключается математическое *доказательство*.

13

Дядя рассказывал мне об американском мастере загадок Сэме Ллойде, который был также и фокусником. Ллойд со своим двенадцатилетним сыном проделывал трюк, вводивший в заблуждение даже иллюзионистов. Мальчик стоял спиной к публике и с завязанными глазами, а отец был рядом с ним лицом к зрителям. Один из зрителей, не бывший сообщником фокусника, брал колоду карт, тасовал ее и показывал отцу карту за картой. При этом мальчик каждый раз безошибочно называл карту, которую показывали отцу. Все это происходило до того, как было изобретено радио, так что радиосигналы здесь ни причем. Как я уже сказал, этот номер одурачивал даже профессиональных фокусников. Из всех известных мне фокусов этот кажется мне самым хитроумным. Как же его проделывали?

14

— Вам знаком логик Рэймонд Смаллиан? — спросил Волшебник.

— Никогда не слышали о таком, — ответила Аннабел. — Кто он?

— Я тоже никогда ничего о нем не слышал, — подтвердил Александр.

— Это не имеет значения, — сказал Волшебник. — Он изобрел множество загадок, которые любил мой дядя. Одна из них — загадка о человеке, у которого было два кувшина по десять галлонов каждый. В одном из них было шесть галлонов вина, а в другом шесть галлонов воды. Человек вылил три галлона вина в кувшин с водой и перемешал жидкость. Затем он вылил три галлона полученной смеси в кувшин с вином и снова перемешал. Потом он вылил три галлона новой смеси обратно в кувшин, где раньше была вода, и так продолжал переливать смеси из одного кувшина в другой до тех пор, пока концентрация вина в обоих кувшинах не стала одинаковой. Сколько переливаний ему потребовалось сделать?

15

— Мой дядя рассказывал мне также предложенный Смаллианом интересный вариант классической задачи о цветных шляпах. Вам известна эта задача?

— Когда-то я слышала о ней или о чем-то подобном, — сказала Аннабел, — но точно не помню, в чем там дело.

— Существует множество версий этой задачи, — сказал Волшебник. — Один из простых вариантов выглядит следующим образом. Троим мужчинам — A, B и C — завязывают глаза и говорят, что каждому из них сейчас будет надета либо красная, либо зеленая шляпа. Затем повязки снимают, и каждый из троих видит, какого цвета шляпы на головах двух других, но не может видеть, какого цвета шляпа на голове у него самого. На самом деле, всем троим надевают зеленые шляпы. Затем просят поднять руку того, кто видит хотя бы одну зеленую шляпу. Естественно, что все трое поднимают руки. Затем просят, чтобы опустил руку тот, кто знает, какого цвета шляпа у него на голове. После некоторой паузы самый умный из троих опускает руку. Как он узнал цвет своей шляпы?

16

Вариант предыдущей задачи, предложенный Смаллианом, выглядит следующим образом. В данном случае все трое — A, B и C — одинаково умны; фактически, они являются *совершенными* логиками, которые могут мгновенно вывести все следствия из любого данного множества посылок. Им всем известно также, что все они — совершенные логики. Теперь предположим, что есть восемь почтовых марок: четыре красных и четыре зеленых. Когда у троих логиков закрыты глаза, каждому из них на лоб наклеивают по две марки, а две оставшихся прячут в ящик стола. Когда логики открывают глаза и каждый из них видит, что наклеено на лбах у двух других, у A спрашивают, знает ли он, какие марки у него на лбу. Он отвечает: «Нет». Затем у B спрашивают, знает ли он, какие марки у него на лбу, и он отвечает: «Нет».

Когда этот же вопрос задают C, он тоже отвечает: «Нет». Затем этот вопрос снова задают A, который отвечает: «Нет». Тогда опять спрашивают B, и он отвечает: «Да». Как B узнал, какие марки у него на лбу?

17

Одной из задач Смаллиана, которые особенно нравились моему дяде, является следующая задача. В 1918 г., в тот день, когда я заключил перемирие в Мировой войне, три молодых пары вместе праздновали свое бракосочетание. Каждый из мужей был братом одной из жен, а каждая жена была сестрой одного из мужей. Другими словами, в группе было три пары, состоящие из брата и сестры. Известны следующие факты:

1. Элен ровно на двадцать шесть недель старше своего мужа, родившегося в августе.

2. Сестра мистера Уайта, которая замужем за шурином брата Элен, вышла замуж за него в свой день рождения, который был в январе.

3. Маргарита Уайт меньше ростом, чем Вильям Блейк.

4. Сестра Артура выше Беатрис.

5. Джону пятьдесят лет.

Как зовут мисс Браун?

Ответы

1. Эту задачу проще всего решить, двигаясь от конца к началу. Сколько печений должен был найти последний пёс, чтобы он мог съесть половину из них плюс ещё одно? Единственно возможный ответ: 2. Пёс, подходивший к миске перед ним, должен был найти 5. Пёс, подходивший к миске вторым, должен был найти 14, а первый пёс — 30.

2. Некоторые думают, что это равные величины. Разумеется, они ошибаются. Шесть дюжин дюжин — это 6 x 144, в то время как полдюжины дюжин равно шести дюжинам (а не шести дюжинам дюжин), то есть 72. На самом деле шесть дюжин дюжин — это то же самое, что полдюжины дюжин, умноженные на дюжину.

3. Пусть товар продавался оптом по доллару за штуку, а в розницу — по два доллара за штуку. Тогда из каждого проданного десятка девять штук проданы по доллару, что дает девять долларов и одна штука — за два доллара. Итак, десяток проданных единиц приносит 11 долларов, два из которых выручены при розничной торговле. Следовательно, розничная торговля принесла фермеру 2/11 общего дохода.

4. Ответ: 5, а не 10!

5. Ювелир имел в виду, что нужно распилить последнее звено каждой из шести цепочек, а затем соединить их в одну замкнутую цепь. Конечно, такая работа стоила бы шесть долларов. Однако каждая цепочка состояла только из пяти звеньев. Поэтому можно распилить все пять звеньев одной цепочки и использовать их для того, чтобы соединить оставшиеся пять цепочек в один круг. Следовательно, работу можно сделать за пять долларов.

6. Бедным человеком была женщина.

7. Поскольку Алиса самая старшая или Лилиан самая младшая, невозможно, чтобы Алиса была самой младшей — ведь в противном случае было бы ложно то, что Алиса самая старшая и что Лилиан самая младшая. Итак, Алиса не является самой младшей из сестер. Поскольку самой младшей является либо Алиса, либо Мейбл, самой младшей может быть только Мейбл. Значит, Лилиан не может быть самой младшей. Однако сказано, что она самая младшая или Алиса самая старшая, а Лилиан не может быть самой младшей, значит верно, что Алиса старше всех. Следовательно, Мейбл — самая младшая из сестер, Лилиан — средняя, а Алиса — самая старшая.

8. Всего было четыре брата и три сестры.

9. Ответ: пять.

10. Обычный неправильный ответ: $1^1/_{10}$. Правильный ответ: $1^1/_9$. Давайте проверим: $^1/_{10}$ от $1^1/_9$ — это $^1/_{10}\times{}^{10}/_9 = {}^1/_9$. Значит, муки было намолото $1^1/_9$ бушеля, мельник взял себе $^1/_{10}$ часть этой муки, то есть $^1/_9$ бушеля, а привезшему зерно человеку осталось $^9/_{10}$ от $^{10}/_9$, что составляет ровно один бушель.

11. Демоху было пятьдесят лет. Это можно определить путем проб и ошибок или решив уравнение $^x/_4 + {}^x/_5 + {}^x/_3 + 13 = x$, где x — возраст Демоха.

12. Представьте себе, что квадраты покрашены в черный и белый цвета, как на шахматной доске, а два удаленных угловых квадрата одного цвета — скажем, белого. Значит, черных квадратов осталось больше, чем белых — 32 черных и только 30 белых. Костяшка домино покрывает один черный квадрат и один белый, поэтому общее число закрытых белых квадратов должно быть равным общему числу закрытых черных квадратов. Поскольку черных квадратов больше, чем белых, поставленная задача не может иметь решения!

Это одно из известных мне простейших и кратчайших доказательств невозможности сделать что-то. Разумеется, если восстановить угловые квадраты, а удалить два любых квадрата одинакового цвета, найти решение по-прежнему невозможно. Было доказано (как я слышал), что решение возможно, если удалить два квадрата *разного* цвета, независимо от того, где они расположены.

13. Ребенок вообще ничего не говорил. Сэм Ллойд был чревовещателем.

Я был фокусником многие годы и знаю искусные секреты фокусников всех видов. Этот трюк был самым умным из всех, которые мне известны. Забавно, что один пожилой джентльмен сказал Сэму Ллойду: «Вам не следует так сильно утомлять мозг мальчика; это вредно для него».

14. Это невозможно сделать *ни за какое* конечное число переливаний! Очевидно, что в самом начале процедуры концентрация вина в кувшине с вином больше, чем в кувшине с водой. После первого переливания жидкость в кувшине с водой слабее (по содержанию вина), чем в кувшине с вином. При втором переливании более слабая жидкость вливается в более крепкую, значит жидкость в кувшине, в котором сначала была вода, по-прежнему слабее, чем в том, в котором было вино. Затем некоторая часть более крепкой жидкости вливается в более слабую, поэтому жидкость в кувшине, в котором сначала была вода, по-прежнему слабее, чем в том, в котором было вино. Такое положение дел сохраняется на любой стадии процесса, поэтому на следующей стадии жидкость в кувшине, в котором сначала была вода, остается слабее, чем в том, в котором было вино, независимо от того, из какого в какой кувшин переливается смесь.

Разумеется, это чисто математический анализ ситуации, при котором предполагается, что вино — абсолютно гомогенная субстанция и не состоит из дискретных частиц различной структуры. Что касается реального физического мира, я не знаю, сколько нужно переливаний для того, чтобы жидкости в двух кувшинах стали *визуально* неразличимыми.

15. Допустим, что А самый умный из них. Он рассуждал следующим образом: «Допустим, что моя шляпа красная. Тогда В знал бы, что если бы шляпа С была красной, он не поднял бы руку, сигнализируя тем самым, что он видит по крайней мере одну зеленую шляпу. Значит, если бы моя шляпа была красной, В знал бы, что его шляпа зеленая. Однако В не знает, что он в зеленой шляпе. Следовательно, моя шляпа не может быть красной; она зеленая».

16. Логика решения этой задачи намного сложнее, чем предыдущей версии. Прежде всего ясно, что С не видит четырех марок одного цвета; в противном случае он знал бы, какого цвета марки у него на лбу. Он не видит также, что у одного из А и Б на лбу две красные марки, а у другого две зеленые. Действительно, предположим, что он увидел на лбу Б красные марки, а на лбу А — зеленые. Тогда С знал бы, что у него на лбу не может быть двух красных марок, поскольку в этом случае А видел бы четыре красных марки и знал бы, какие марки у него. На лбу С не может быть и двух зеленых марок, поскольку тогда В видел бы четыре зеленые марки и знал бы, что у него на лбу две красные.

Тем самым доказано, что невозможно, чтобы на лбу А были марки одного цвета *и* на лбу Б тоже марки одного цвета; на лбу по крайней мере одного из них приклеены красная и зеленая марки. А и Б поняли это, когда С сказал, что он не знает, какие марки у него на лбу, и каждый из них понял, что другой тоже понял это. Следовательно, во втором раунде Б понял, что если бы его марки были одного цвета, А в этом раунде узнал бы, что у него на лбу красная и зеленая марки, а он не знал этого. Итак, В понял, что у него на лбу красная и зеленые марки.

17. *Шаг 1.* Поскольку сестра мистера Уайта замужем за шурином брата Элен, она не может быть женой брата Элен. Кроме того, мисс Уайт зовут Маргарет. Эти факты позволяют установить, что сестрой мистера Уайта должна быть Элен.

Брат Элен женат либо на Маргарет, либо на Беатрис. Если он женат на Маргарет, мистер Уайт — брат Элен (так как он женат на Маргарет), а Элен — его сестра. Если же он женат на Беатрис, на которой женат брат Элен, Беатрис не является сестрой мистера Уайта (так как сестра мистера Уайта *не* замужем за братом Элен). Поскольку Маргарет — не сестра мистера Уайта (а его жена), то опять-таки сестрой мистера Уайта должна быть Элен.

Шаг 2. Элен является либо мисс Браун, либо мисс Блэйк (так как Маргарет — это мисс Уайт). Теперь докажем, что если Элен является мисс Браун, то она должна быть замужем за Джоном, что, как мы увидим позже, невозможно.

Допустим, что Элен — это мисс Браун. Тогда Беатрис — мисс Блэйк (поскольку Маргарет — это мисс Уайт). Значит, Беатрис не является сестрой ни мистеру Блэйку, ни мистеру Уайту (так как Элен — сестра мистера Уайта). Следовательно, Беатрис — сестра мистера Брауна. Сестра Артура не Беатрис (она выше Беатрис ростом), но Беатрис — сестра мистера Брауна; значит, Артур — это не мистер Браун. Однако он и не мистер Блейк (мистера Блейка зовут Вильям), значит, Артуром зовут мистера Уайта.

Тогда Джон, который не является ни мистером Уайтом, ни мистером Блейком (мистера Блейка зовут Вильям), должен быть мистером Брауном. Значит при нашем допущении о том, что Элен — это мисс Браун, она должна быть замужем за Джоном.

Итак, доказано, что если Элен — это мисс Браун, то она должна быть замужем за Джоном.

Шаг 3. Однако Элен *не может* быть замужем за Джоном по следующей интересной причине.

Уже доказано, что Элен — сестра мистера Уайта (шаг 1), и нам сказано, что она (будучи сестрой мистера Уайта) родилась в январе. Итак, Элен родилась в январе, а ее муж — в августе, и она ровно на двадцать шесть недель старше своего мужа. Из календаря ясно, что это возможно лишь в том случае, если Элен родилась 31 января, ее муж — 1 августа, и *между этими датами нет 29 февраля*! Значит, они оба родились не в високосный год. Однако Джон, которому в 1918 г. было пятьдесят лет, родился в високосный год. Следовательно, Джон не может быть мужем Элен.

Однако уже показано (шаг 2), что если бы Элен была бы мисс Браун, ее мужа звали бы Джон. Поскольку это не так, Элен не может быть мисс Браун. Маргарет тоже не может быть мисс Браун (она мисс Уайт). Следовательно, мисс Браун зовут Беатрис.

9
Планета Ог

— Придумал ли ваш дядя сам какие-нибудь загадки? — спросил Александр.

— О, господи, конечно! И очень много, — воскликнул Волшебник.

— А он опубликовал хотя бы некоторые из них? — снова спросил Александр.

— Ты напомнил мне, — сказал Волшебник, — диалог двух американских профессоров, остановившихся у статуи Христа во Флоренции. «Он был великим учителем», — сказал один из них. «Да, — произнес другой, — но он никогда не публиковался!»

— Публикации для людей — просто наваждение! Нет, мой дядя не опубликовал ни одну из своих загадок; к сожалению, он даже никогда их не записывал. Он всегда импровизировал, загадывая загадки: главным образом, я полагаю для того, чтобы позабавить меня, а затем напрочь о них забывал. К счастью, многие из его загадок я запомнил.

— Можете ли вы загадать нам какие-нибудь из его загадок? — спросила Аннабел.

— Разумеется, — ответил Волшебник. — Сейчас мне вспомнились загадки о планете, которую дядя называл Ог.

— Такая планета действительно существует? — спросил Александр.

— Вряд ли, — ответил Волшебник. — Я даже уверен, что дядя ее выдумал. Как бы там ни было, я полагаю, что на него повлияла научная фантастика, особенно книга Эдгара Р.Бэрроуза “Принцесса Марса”. Как и в марсианской фантазии Бэрроуза, планету Ог моего дяди населяют две расы — зеленые люди и красные люди. Кроме того, люди, родившиеся в северном полушарии, кардинально отличаются от тех, кто родился в южном полушарии планеты.

— Чем же они отличаются друг от друга? — спросил Александр.

— Забавно то, — ответил Волшебник, — что зеленые северяне всегда говорят правду, а красные северяне всегда лгут, в то время как зеленые южане всегда лгут, а красные южане всегда говорят правду.

— О, господи! — сказал Александр. — Я думаю, что эти загадки будут слишком сложны.

— Одни из них действительно сложные, — ответил Волшебник, — а другие простые. Давайте начнем с простых загадок.

1*

Темная ночь

Допустим, что темной ночью вы встретили местного жителя и не можете разглядеть, красный он или зеленый. Кроме того, вы не знаете, в каком полушарии он родился.

Какой вопрос, допускающий ответ либо

«да», либо «нет», нужно задать ему, чтобы определить, какого он цвета?

2*

Другая темная ночь

Однажды путешественник с нашей планеты Земля попал на планету Ог и темной ночью встретился на улице с местным жителем.

— Ты красный? — спросил его путешественник.

Встречный ничего не ответил.

— Ты южанин? — спросил путешественник и опять не получил ответа.

— Вы не собираетесь *ничего* мне сказать? — спросил тогда путешественник.

Прежде чем уйти, встречный сказал: «Если бы я ответил “нет” на оба ваших вопроса, я солгал бы по крайней мере один раз».

Можно ли определить, какого цвета этот местный житель и из какого полушария он родом?

3*

Еще одна темная ночь

Другой темной ночью путешественник с Земли встретил местного жителя и спросил его: «Вы красный?» Тот ответил положительно. Тогда странник спросил, из какого полушария он родом. «Я не скажу вам этого», — ответил встречный и ушел.

Из какого он был полушария?

4*
Средь бела дня

Однажды средь бела дня путешественник с Земли встретил жителя планеты Ог, который сказал: «Я зеленый северянин». Путешественник, даже будучи хорошим логиком, не смог определить, северянина он встретил или южанина (хотя и видел, какого тот цвета).

Какого цвета был этот местный житель?

5*
Логический вопрос

Житель планеты Ог, сказавший: «Я зеленый северянин», отличается от жителя этой планеты, который сначала сказал: «Я зеленый», а затем добавил: «Я северянин». Исходя из их высказываний, об одном из них невозможно сказать, какого он цвета и из какого полушария родом, а о другом можно.

В каком случае это возможно, какого цвета и из какого полушария этот местный житель?

6*
Еще один логический вопрос

Предположим, что житель планеты Ог сказал: «Если я зеленый, то я северянин».

Можно ли определить, какого он цвета? Можно ли определить, из какого он полушария?

7*

Двое

Перед вами два жителя планеты Ог: красный северянин и южанин (либо красный, либо зеленый). Одного из них зовут Арк, а другого Барк, и они сказали следующее:

Арк: Мы с Барком одного цвета.

Барк: Мы с Арком разного цвета.

Кто из них сказал правду? Кто из них северянин? Какого цвета южанин?

8*

Еще двое

Двое жителей планеты Ог, которых звали Орк и Борк, высказали следующие утверждения:

Орк: Борк северянин.

Борк: Орк южанин.

Орк: Борк красный.

Борк: Орк зеленый.

Какого цвета Орк и Борк? Из какого полушария каждый из них?

9*

Два брата

На планете Ог родные братья всегда одного цвета, хотя при этом не обязательно, что они родились в одном и том же полушарии. (Мать могла родить одного сына в одном полушарии, а потом пересечь экватор и родить другого сына.) Однако в любом случае братья одного цвета.

Однажды два брата Арг и Барг сказали о себе следующее:

Арг: Мы родились в разных полушариях.

Барг: Арг сказал правду.

Лгали братья или говорили правду?

10*

Братья ли они?

Двое жителей планеты Ог, которых звали Орг и Борг, высказали следующие утверждения:

Орг: Борг северянин.

Борг: На самом деле мы оба южане.

Орг: Это неправда!

Борг: Мы с Оргом родные братья.

Являются ли Орг и Борг братьями? Какого они цвета? Из какого полушария Орг? Что можно сказать о Борге?

11*

Судебный процесс

Одного из жителей планеты Ог судили за кражу. Суду было важно выяснить, северянин он или южанин, поскольку было точно известно, что преступление совершено северянином. Адвокат подсудимого пожелал скрыть свой цвет и явился в суд замаскированным. К всеобщему удивлению, он заявил, что он и его подзащитный родились в северном полушарии.

(Разве мог кто-то ожидать от адвоката заявления, доказывающего виновность его подзащитного!) К еще большему удивлению всех присутствующих, после перекрестного допроса адвокат заявил, что лично он не северянин.

Как вы объясните происшедшее? Можно ли определить цвет адвоката? Можно ли определить, виновен или невиновен подсудимый?

12*

Кто они?

Жители планеты Ог A и B, которые были разного цвета и родились в разных полушариях, сказали следующее:

A: B северянин.

B: A красный.

Какого цвета A и B, и откуда они родом?

13*

Какого цвета Снерль?

Однажды южанин по имени Снерль заявил, что слышал разговор между двумя братьями A и B, в котором A сказал, что B северянин, а B сказал, что A южанин.

Какого цвета Снерль?

14*

Снова двое

Жители планеты Ог A и B, которые были разного цвета, сказали следующее:

А: В северянин.

В: Мы оба северяне.

Какого цвета А и В, и откуда они родом?

15*

Существует ли царь?

Однажды антрополог Эберкромби посетил планету Ог и заинтересовался, есть ли на ней царь. Межу антропологом и местным жителем состоялся следующий диалог:

Эберкромби: Мне сказали, что вы однажды заявили, что на этой планете нет царя. Это правда?

Местный житель: Нет, я никогда такого не говорил!

Эберкромби: А говорили ли вы когда-нибудь, что на этой планете действительно есть царь?

Местный житель: Да, это я говорил.

Можно ли определить, лгал он или говорил правду? Можно ли определить, есть ли на планете царь?

16*

Существует ли царица?

Эберкромби интересовало также, есть ли на планете Ог царица. Он узнал это, когда встретил двух местных жителей, высказавших следующие утверждения:

А: Я северянин, и на этой планете нет царицы.

В: Я южанин, и на этой планете нет царицы.

Так есть на планете царица или нет?

17*

Какого цвета царь?

Это одна из самых любимых загадок Волшебника.

Царь планеты Ог всегда носит маску и одежды, скрывающие все его тело, поэтому ни один из его подданных не знает, какого цвета его властелин. Брат царя, герцог Снорка, также загадочен.

Однажды Эберкромби пришел во дворец, где царь со своим братом решили проверить, насколько умен их гость. В первую очередь с него взяли клятву, что если он узнает цвет царя, никогда не скажет об этом никому из жителей планеты. Затем его ввели в комнату, в которой были царь со своим братом, разумеется, замаскированные. Один из них сказал: «Если я зеленый северянин, то я царь». «Если я зеленый северянин или красный южанин, то я царь», — сказал другой.

Какого цвета царь?

Ответы

1. Подходит вопрос: «Вы северянин?» Если он ответит «да», он зеленый; если «нет» — красный. Предлагаю читателю самостоятельно доказать это.

Разумеется, путешественник мог бы также определить, северянина он встретил или южанина, задав ему вопрос: «Вы зеленый?» Ситуация полностью симметрична: чтобы определить, зеленый ли он, нужно спросить, является ли он северянином, а чтобы определить, северянин ли он, нужно спросить, является ли он зеленым.

2. В результате местный житель сказал, что он красный *или* северянин (возможно и то и другое вместе). Иными словами, он заявил, что он не является зеленым северянином. Зеленый северянин сказатьподобное не может, так как он не лжет. Ни зеленый южанин, ни красный северянин не может правдиво утверждать, что он не является зеленым северянином. Следовательно, местный житель должен быть красным южанином.

3. Когда местный житель ответил: «Я не скажу вам этого», — он был правдив, так как действительно отказался отвечать на второй вопрос путешественника. Значит, он не лжец, и его ответ на первый вопрос был правдивым. Следовательно, он действительно красный. Поскольку он красен и правдив, он должен быть южанином.

4. Если бы местный житель был красным, путешественник узнал бы, что он северянин (так как красный южанин никогда не сказал бы, что он зеленый северянин). Поскольку путешественник этого не узнал, местный житель должен быть зеленым (либо правдивым зеленым северянином, либо лживым зеленым южанином).

5. О местном жителе, утверждающем, что он зеленый северянин, нельзя сказать ничего, кроме того, что он не является красным южанином. Совершенно другое дело, если он высказывает два отдельных утверждения: сначала заявляет, что он зеленый, а затем говорит, что он северянин. Допустим, что так и было. Тогда эти два утверждения либо оба истинны, либо оба ложны. Во втором случае говорящий должен быть красным (поскольку первое утверждение ложно) и к тому же южанином (поскольку ложно второе утверждение). Однако красный южанин не может солгать, значит, оба утверждения должны быть истинными. Следовательно, этот местный житель является зеленым южанином.

6. Говоря, что если он зеленый, то он южанин, местный житель тем самым утверждает, что он не является зеленым северянином. Значит, фактически этот человек заявил, что он не относится к зеленым северянам. Такое мог сказать только красный южанин. (Здесь ситуация такая же, как и в загадке 2, только выражена она другими словами.)

7. Поскольку двое противоречат друг другу, один из них говорит правду, а другой лжет. Красный северянин должен лгать; значит, южанин говорит правду, и поэтому он должен быть красным южанином. Следовательно, оба они одного цвета, а это значит, что Арк сказал правду, а Барк солгал. Таким образом, Арк — красный северянин, а Барк — красный южанин.

8. Если высказывания Орка истинны, то Борк — красный северянин; если же они ложны, Борк — зеленый южанин. В любом случае Борк лжец. Значит, оба высказывания Борка ложны, и Орк является красным северянином. Следовательно, Орк лгал, оба его высказывания ложны, и Борк — зеленый южанин.

9. Если правда то, что они из различных полушарий, возникает ситуация, в которой *одноцветные* северянин и южанин не противоречат друг другу, что невозможно. Следовательно, они лгали.

10. Поскольку Орг противоречат Боргу, один из них говорит правду, а другой лжет.

Предположим, что Борг говорит правду. Тогда они оба северяне (согласно первому утверждению Борга) и братья (согласно первому утверждению Борга). Значит, они одного цвета, и возникает невозможная ситуация, в которой два северянина одного цвета противоречат друг другу. Следовательно, Борг солгал, а Орг сказал правду.

Тогда Борг северянин (как правдиво утверждал Орг), но они оба не являются северянами (поскольку Борг лгал, утверждая, что они оба северяне); значит, Орг южанин. Следовательно, Орг — правдивый южанин и поэтому должен быть красным, а Борг — лживый северянин и тоже красный. Орг и Борг *не являются* братьями (поскольку Борг сказал, что они братья) несмотря на то, что они одного цвета.

11. Очевидно, что оба заявления адвоката не могут быть одновременно истинными, значит, он лжец. Поскольку он отрицал, что он северянин, на самом деле он северянин и должен быть красным. Поскольку он лгал, говоря, что они с подсудимым оба северяне, а сам он северянин, подсудимый должен быть южанином. Следовательно, подсудимый невиновен.

Несмотря на странность своего поведения, адвокат был далеко не глуп: он добился оправдания своего подзащитного.

12. Поскольку А и В разного цвета и из разных полушарий, они либо оба лгут, либо оба говорят правду. Допустим, что они лгут. Тогда В южанин, а А зеленый. Значит, В красный (поскольку А зеленый) и А северянин (поскольку В южанин). Получается, что красный южанин В (как и зеленый северянин А) произнес ложное высказывание, а это невозможно. Значит, оба высказывания должны быть истинными. Следовательно, В северянин, а А красный, причем В является зеленым северянином, а А — красным южанином.

13. Если бы Снерль сказал правду, возникло бы следующее противоречие. Поскольку А и В братья, они одного цвета. Допустим, что они красные. Если А северянин, то он красный северянин. Значит, его высказывание ложно, и В на самом деле южанин, причем красный южанин, который правдив и не может ложно утверждать, что А южанин. Если же А южанин, то он красный южанин. Значит, его высказывание истинно, и В на самом деле северянин, причем красный северянин, который должен лгать и не может правдиво утверждать, что А южанин. Следовательно, братья не могут быть красными. Симметричное рассуждение (которое я предлагаю читателю провести самостоятельно) показывает, что братья не могут быть и зелеными. Значит, Снерль солгал.

Ситуацию можно рассмотреть другим способом (который я считаю более поучительным). В первую очередь, нужно понять, что в любых краях, где каждый местный обитатель либо постоянно лжет, либо постоянно говорит правду, невозможно, чтобы абориген X говорил, что абориген Y лжет, а Y утверждал, что X говорит правду. Ведь тогда Y соглашается с утверждением X о том, что Y лжет, а этого не может сделать ни лжец, ни правдивый. В данной задаче A и B одного цвета, и поэтому, если A называет B северянином, а B называет A южанином, один из них фактически называет другого лжецом, а второй называет первого правдивым. (Если они красные, то A называет B лжецом, а B называет A правдивым. Если они зеленые, то B называет A лжецом, а A называет B правдивым.) Однако это невозможно.

В любом случае Снерль солгал, и поскольку он южанин, он должен быть зеленым.

14. Допустим, что B сказал правду. Тогда они оба северяне, и, следовательно, высказывание A о том, что B северянин, истинно. Однако невозможно, чтобы два северянина *различного цвета* оба говорили правду. Следовательно, B солгал, и по крайней мере один из них южанин. Допустим, что B северянин. Тогда A должен быть южанином. Кроме того, A сказал правду, что B северянин, значит, А должен быть красным южанином, а В — зеленым, и получается, что зеленый северянин солгал, а такое невозможно. Следовательно, В не северянин, а южанин. Поскольку В южанин и при этом солгал, он должен быть зеленым южанином. Поскольку В южанин, А солгал, и поэтому он должен быть красным (так как В зеленый). Следовательно, А — красный северянин.

Итак, А — красный северянин, В — зеленый южанин, и оба они солгали.

15. Невозможно определить, лгал местный житель или говорил правду, но можно утверждать, что на планете есть царь.

Допустим, что местный житель сказал правду. Тогда он действительно однажды сказал, что на планете есть царь, его высказывание должно быть истинным, и царь действительно есть.

Если же местный житель солгал, то неправда, что он никогда не говорил, что царя нет; значит, он однажды сказал, что царя нет, и при этом солгал. Следовательно, царь на планете должен быть.

Итак, независимо от того, солгал местный житель или сказал правду, на планете есть царь.

16. Оба брата одного цвета. Допустим, что они красные. Тогда высказывание А не может быть истинным; ведь если бы оно было истинным, А был бы северянином (как он и сказал), и получилось бы, что красный северянин говорит правду, что не возможно. Следовательно, высказывание А ложно. Поскольку А красный и при этом лжет, он северянин. Следовательно, если бы на планете не было царицы, то было бы истинно, что А северянин и царицы нет; следовательно, высказывание А было бы истинным, а это не так! Тем самым доказано, что если братья красные, то на планете должна быть царица.

Согласно симметричному рассуждению, в котором используется высказывание В вместо высказывания А, если оба брата зеленые, то на планете есть царица. Следовательно, в любом случае на планете царица есть.

17. Допустим, что первым говорил А, а вторым — В. Обязательно ли высказывание А истинно? То есть если А зеленый северянин, то должен ли он быть царем? Допустим, что он *является* зеленым северянином. Тогда он правдив, и действительно истинно, как он и сказал, что если он зеленый северянин, то он царь. Этим доказано, что если он зеленый северянин, то он царь. Поскольку он сказал именно это, он правдив. Итак, мы знаем, что А правдив. Из этого вовсе не следует, что он должен быть царем;

мы знаем только то, что если он зеленый северянин, то он царь. Однако мы не знаем, является ли он зеленым северянином. (Мы знаем, что он правдив, но при этом он может быть и красным южанином.)

С высказыванием В всё обстоит иначе. Оно должно быть истинным. Ведь если он зеленый северянин или красный южанин, его высказывание обязательно истинно. Значит, истинно, что если он зеленый северянин или красный южанин, то он царь. Следовательно, если он зеленый северянин или красный южанин, то он царь. Поскольку он сказал именно это, он правдив; следовательно, он должен быть зеленым северянином или красным южанином. Однако мы уже знаем, что если он зеленый северянин или красный южанин, то он должен быть царем. Тем самым доказано, что он царь.

Поскольку В царь, А царем не является; следовательно, А не может быть зеленым северянином (если бы он был зеленым северянином, то он *был бы* царем, как мы ранее доказали). Поскольку он не зеленый северянин и при этом правдив, он должен быть красным южанином. Поскольку А красный, то красный и его брат — царь. Следовательно, царь красный (и является красным южанином, как и его брат).

10
Метазагадки

1

— Вот еще одна загадка о планете Ог, — сказал Волшебник. — Она очень специфична, и ее вполне можно было бы назвать *метазагадкой*. Житель планеты заявляет, что он женатый северянин. Если я скажу вам, какого он цвета, у вас будет достаточно информации для того, чтобы определить, женат ли он на самом деле?

Аннабел и Александр задумались, и наконец Александр сказал:

— Мы не знаем. Определить это невозможно.

— Вы правы, — сказал Волшебник. — А теперь я скажу, что если бы я назвал цвет аборигена, вы смогли бы определить его матримониальный статус.

— Великолепно! — сказала Аннабел. — Теперь я знаю, женат он или нет.

Так женат ли этот житель планеты?

2*

Еще одна метазагадка

— Вот еще одна метазагадка о планете Ог, — сказал Волшебник. —

Логик с нашей планеты посетил Ог. Встретив темной ночью местного жителя, логик спросил его, является ли он зеленым северянином. Тот ответил («да» или «нет»), но после этого логик не смог понять, кем был местный житель.

Второй логик встретил этого же человека другой темной ночью и спросил его, является ли он зеленым южанином. Тот ответил («да» или «нет»), но после этого логик не смог понять, кем был местный житель.

Еще одной темной ночью третий логик встретил этого же человека и спросил его, является ли он красным южанином. Тот ответил («да» или «нет»), но после этого логик не смог понять, кем был местный житель.

Так кем же был этот абориген планеты?

3*
Метаметазагадка

— Мне понравились две последние загадки, — сказала Аннабел, — но почему вы называете их *метазагадками*?

— Этот термин ввел мой дядя — ответил Волшебник.

Метазагадки — это, так сказать, загадки о загадках. Метазагадка решается на основе информации о том, могут или не могут быть решены какие-то другие загадки. Такие загадки могут быть очень трудными!

Уровень некоторых загадок еще глубже, чем у метазагадок, и их можно решить только на основе информации о том, могут или не могут быть решены какие-то другие метазагадки! Мой дядя называл их *метатетазагадками* и был большим мастером по части их составления.

— Не могли бы вы привести нам пример метаметазагадки? — спросил Александр.

— Хорошо, — сказал Волшебник, задумавшись на мгновение. — Однажды мой дядя загадал мне метазагадку о логике, который посетил планету Ог, темной ночью встретил местного жителя и захотел узнать, является ли тот правдивым человеком. Он спросил встречного, к какому типу он принадлежит (зеленый северянин, красный северянин, зеленый южанин или красный южанин), а тот, назвав один из типов, сказал, что принадлежит именно нему.

— Смог ли логик после этого определить, сказал ли местный житель правду? — спросила Аннабел.

— Хороший вопрос, — заметил Волшебник. — Именно об этом я и спросил у дяди.

— Он ответил вам? — спросил Александр.

— Да.

— Что он ответил? — поинтересовался Александр.

— Я вам не скажу.

— Ну, хорошо, — сказала Аннабел, — а после того, как дядя сказал, смог ли логик решить *свою* задачу, вы смогли определить, был ли местный житель правдивым?

— И этого я вам не скажу, — ответил ей Волшебник. — Если бы я сказал, *вы* смогли бы определить, говорил ли местный житель правду.

— Так почему же вы не скажете? — спросил Александр. — Вы что же, не хотите, чтобы мы решили задачу?

— В этом теперь нет нужды, — улыбнулся Волшебник. — У вас достаточно информации для того, чтобы определить, был ли местный житель правдивым.

Теперь и у читателя достаточно информации для ответов на следующие вопросы:

1. Был ли местный житель правдивым человеком?

2. Смог ли Волшебник решить метазагадку, заданную ему дядей?

3. Мог ли логик определить, к какому из четырех типов принадлежал местный житель?

4. Определил ли логик, является ли местный житель правдивым человеком?

5. Мог ли логик определить, к какому типу принадлежит встретившийся ему человек?

Я полагаю, что читатель сочтет эту загадку весьмапоучительной.

4*

Метазагадка о рыцарях и плутах

— Это была весьма остроумная загадка, — оценила Аннабел. — А вы сами изобретали когда-нибудь загадки или метазагадки?

— О, да, — ответил Волшебник. — Я научился этому искусству у своего дяди. Я изобретал даже метаметаметазагадки и, более того, сконструировал загадки всех степеней сложности: от очень простых до очень трудных.

— И все они о планете Ог? — спросила Аннабел.

— О, нет. В основном это загадки об Островах Рыцарей и Плутов, подобных нашему острову; на них все рыцари говорят только правду, а все плуты только лгут, и каждый житель является либо рыцарем, либо плутом.

Например, вам может понравиться следующая загадка. Логик, посетивший Остров Рыцарей и Плутов, встретил местных жителей А и В. Он спросил А: «Правда ли, что В однажды сказал, что ты плут?» Тот ответил («да» или «нет»). Тогда логик спросил одного из встречных, является ли плутом другой из них, и получил ответ («да» или «нет»). При этом неизвестно, сумел ли логик определить, кто из них кто.

Второй логик, встретившись с той же парой местных жителей, спросил А: «Сказал ли В однажды, что А и В плуты?» Тот ответил («да» или «нет»). Тогда логик спросил одного из встречных, является ли плутом другой из них, и получил ответ («да» или «нет»). При этом неизвестно, сумел ли логик определить, кто из них кто.

Известно, что один из логиков справился с задачей, а второй нет, но неизвестно, кто из них решил задачу. Теперь вам нужно определить, кто такие А и В и который из логиков справился с задачей".

5*
Случай в суде

— О, эта загадка была трудной, но весьма занимательной! — воскликнула Аннабел, когда молодая пара нашла решение. — Есть ли у вас еще такие загадки?

— Теперь я предлагаю вам метаметазагадку, связанную с судебным процессом, — сказал Волшебник. — Сложность этого процесса заключалась в том, что было неизвестно, кем являются судебные поверенные (прокурор и адвокат), рыцарями или плутами. Как бы то ни было, на суде они высказали следующие утверждения:

Прокурор: Подсудимый виновен и совершал другие преступления в прошлом.

Адвокат: Подсудимый невиновен, а обвинитель плут.

Тогда судья задал вопрос, ответ на который он уже знал, и один из судебных поверенных (либо прокурор, либо адвокат) ответил на него, показав своим ответом, рыцарь он или плут. В результате судья определил, виновен ли подсудимый.

На суде присутствовал очень умный репортер, который рассказал своему другу-логику все, что я сейчас сказал вам, и ничего более. Логик, поразмыслив над проблемой, пришел к выводу, что у него не достаточно информации, чтобы решить ее. «Скажи мне, — обратился он к репортеру, — если бы на вопрос судьи ответил другой судебный поверенный, смог бы судья определить, виновен ли подсудимый?» Репортер после недолгого размышления сказал: «Я не знаю. Фактически это и невозможно узнать». «Прекрасно! — сказал логик. — Теперь я знаю, виновен или невиновен подсудимый».

Был ли виновен подсудимый? Кто из двух судебных поверенных отвечал на вопрос судьи и кем он был, рыцарем или плутом?

6*

Очень абстрактная гиперметазагадка

— В последнее время я размышлял над *очень* абстрактной метазагадкой, — смеясь, сказал Волшебник. — На самом деле ее решение не является сложным; фактически оно очень простое. Тем не менее забавно то, что люди склонны не замечать его.

Совершенным логиком я называю того, кто при наличии задачи и информации, которой достаточно для ее решения, знает, что информации достаточно для решения, и решает задачу; если же информации не достаточно для решения задачи, он тоже знает, что этой информации не достаточно. Однажды совершенному логику дали задачу — назовем ее Задача Р. Я не скажу, в чем состоит Задача Р и было ли у логика достаточно информации, чтобы решить ее. Однако если бы я *действительно* сказал вам, в чем состоит Задача Р и было ли у логика достаточно информации, чтобы решить ее, у вас было бы достаточно информации, чтобы самим решить Задачу Р. Разумеется, слово «вам» здесь означает «кому угодно». Другими словами, информации о сути Задачи Р и о том, было ли у логика достаточно информации для ее решения, достаточно для того, чтобы решить Задачу Р.

Теперь *ваша* задача заключается в том, чтобы ответить, решил ли логик Задачу Р.

— Пришло время сменить место нашего пребывания, — сказал Волшебник. — Я предлагаю вам посетить Остров Роботов. Я полагаю, он крайне вас заинтересует. Завтра ожидается необыкновенно хорошая, ясная погода, и я думаю, что нам следует выйти в море до восхода солнца, чтобы провести на острове целый день. Почему бы вам не переночевать у меня, чтобы мы могли пуститься в путь пораньше?

Предложение оказалось весьма заманчивым, и молодая пара охотно согласилась. О том, что случилось на Острове Роботов, рассказано в следующей главе.

Ответы

1. Дело в том, что если местный житель красный, то он не может быть женат, но если он зеленый, то он может быть, а может и не быть женатым.

Предположим, что он красный. Если он правдив, то он женатый северянин (как он и сказал); значит, он говорящий правду красный северянин, что невозможно. Следовательно (при допущении, что он красный), он солгал, и поэтому он действительно красный северянин, но при этом не женат (поскольку он солгал, что женат). Тем самым доказано, что если он красный, то должен быть холостым.

Если же он зеленый, то он может быть либо говорящим правду зеленым женатым северянином, либо лгущим зеленым южанином, который либо женат, либо не женат. Следовательно, знание того, что он зеленый, не позволяет решить вопрос о его семейном положении, а знание того, что он красный, позволяет решить этот вопрос. Но Волшебник сказал, что знание цвета местного жителя *позволило бы* определить его семейное положение; значит, этот местный житель должен быть красным и холостым.

2. Обозначим заданные местному жителю вопросы следующим образом:

Q1. Ты зеленый северянин?

Q2. Ты зеленый южанин?

Q3. Ты красный южанин?

Читатель может легко убедиться, что местные жители четырех типов могли дать на эти вопросы только следующие ответы:

	Q1	Q2	Q3
Зеленый северянин	Да	Нет	Нет
Зеленый южанин	Да	Нет	Да
Красный северянин	Да	Да	Да
Красный южанин	Нет	Нет	Да

На любой из этих вопросов в трех случаях местный житель дает один ответ, а в четвертом случае — другой. Если бы ответ на первый вопрос был «нет», логик узнал бы, что ему отвечал красный южанин, но поскольку логик этого не узнал, ответ был другим, и, значит, отвечавший не был красным южанином. Кроме того, он не был ни красным северянином (поскольку второй логик ничего не узнал о нем), ни зеленым северянином (поскольку третий логик тоже ничего не узнал). Следовательно, местный житель был зеленым южанином.

3. Читателю предлагается самостоятельно подтвердить следующие простые факты:

(1) Если местный житель утверждает, что он зеленый северянин, то он может быть зеленым северянином, красным северянином или зеленым южанином (но не может быть красным южанином).

(2) Если местный житель утверждает, что он красный северянин, то он может быть только зеленым южанином.

(3) Если местный житель утверждает, что он красный южанин, то он может быть красным южанином, зеленым южанином или красным северянином (но не может быть зеленым северянином).

(4) Если местный житель утверждает, что он зеленый южанин, то он может быть только красным северянином.

Следовательно, если бы местный житель заявил, что он зеленый северянин или что он красный южанин, логик не смог бы определить, к какому именно из трех возможных типов он принадлежит и, значит, не узнал бы, говорил ли он правду.

С другой стороны, если бы местный житель сказал, что он красный северянин или зеленый южанин, логик узнал бы, что он лжет. Разумеется, при этом логик определил бы, является местный житель красным северянином или зеленым южанином (ведь если лжец говорит, что он принадлежит к такому-то типу, то на самом деле он принадлежит к другому). Короче говоря, если логик мог определить, к какому типу принадлежит местный житель, тот должен был лгать, а если логик не мог этого определить, то невозможно точно сказать, лгал этот местный житель или говорил правду.

Дядя сказал Волшебнику, решил ли логик свою задачу (смог ли определить, лгал местный житель или говорил правду). Если бы дядя ответил утвердительно, Волшебник знал бы, что местный житель солгал, а если бы дядя ответил отрицательно, Волшебник не смог бы узнать, лгал местный житель или говорил правду (он смог бы только определить, что местный житель либо назвал себя зеленым северянином и тогда мог принадлежать к любому типу, кроме красных южан, либо назвал себя красным южанином и тогда мог принадлежать к любому типу, кроме зеленых северян).

Теперь мы знаем, что если Волшебник решил метазагадку своего дяди, то местный житель должен был быть лжецом, если же не решил, то невозможно определить, солгал местный житель логику или сказал правду. Однако далее Волшебник сказал нам (то есть своим ученикам), что знания о том, решил ли он метазагадку, было бы достаточно для того, чтобы определить, лгал ли местный житель. Итак, знания о том, что волшебник *не решил* свою метазагадку, было бы недостаточно, а знания о том, что он ее *решил*, вполне достаточно. Следовательно, Волшебник должен был решить свою метазагадку, и, значит, местный житель лгал.

Итак, встретившийся логику местный житель лгал. Волшебник знал, что местный житель лгал, но не мог бы определить, к какому из двух типов лжецов он принадлежал, в то время как логик знал не только то, что местный житель лжет, но и то, что он либо красный северянин, либо зеленый южанин (хотя и не знал, кто именно из них).

4. *Шаг 1.* Давайте посмотрим, что можно извлечь из встречи первого логика с островитянами. На первый вопрос логика А ответил либо «да», либо «нет».

Случай А1. Он ответил «да». Тем самым А утверждает, что В однажды назвал его плутом. Если А рыцарь, то В действительно однажды назвал его плутом, и поэтому В должен быть плутом. Если же А плут, то В может быть либо рыцарем, либо плутом, но невозможно определить, кто он (поскольку В такого не говорил об А, о самом В нельзя сказать ничего). Следовательно, в этом случае логик мог бы узнать только то, что А и В оба не являются рыцарями.

Случай А2. А ответил «нет». Значит, А отрицает, что В однажды назвал его плутом. Разумеется, А может быть рыцарем, а В может быть рыцарем или плутом, но если А плут, то В должен быть рыцарем (ведь если отрицание А ложно, то В действительно однажды назвал А плутом; значит, В должен быть рыцарем). Итак, в этом случае логик на данный момент может узнать только то, А и В не являются оба плутами.

Шаг 2. Ответ на второй вопрос логика показал бы, принадлежат ли А и В к одному типу. Ведь если один местный житель утверждает, что другой местный житель плут, они должны быть различных типов (рыцарь не может назвать плутом другого рыцаря, а плут не может назвать плутом другого плута); и если один местный житель называет другого рыцарем, они должны быть одного типа. Следовательно, после ответа на второй вопрос логик мог узнать, принадлежат ли они к одному и тому же типу. Если он понял, что они одинаковы, задача о том, кто из них есть кто, решается независимо от того, какой из случаев (1 или 2) имел место. Ведь в случае 1 ясно, что они одного типа, но не рыцари, а значит, они плуты; в случае 2 понятно, что они оба рыцари. Следовательно, независимо от первого ответа А, если второй ответ показал, что двое местных жителя одинаковы, то логик смог решить задачу. Если же второй ответ показал, что A и B разного типа, то ни в случае 1, ни в случае 2 логик не смог бы определить кто из них рыцарь, а кто плут.

Итак, мы доказали:

(1) Если оба местных жителя принадлежат к одному типу, то первый логик решил задачу.

(2) Если эти двое принадлежат к различным типам, то первый логик задачу не решил.

Шаг 3. Рассмотрим встречу второго логика с местными жителями. В этом случае A, отвечая на первый вопрос, либо утверждал, либо отрицал, что B сказал, что они оба плуты.

Случай B1. Допустим, что A утверждал, что B сказал, что они оба плуты. Если A рыцарь, то B должен быть плутом. Если A плут, то B может быть либо плутом, либо рыцарем. Следовательно, в этом случае второй логик мог узнать только то, что A и B оба не являются рыцарями.

Случай B2. Допустим, что A отрицал, что B сказал, что они оба плуты. Тогда A не может быть плутом, ибо если бы он был плутом, то B действительно сказал, что они оба плуты, что невозможно (ведь будучи рыцарем B не мог бы высказать такое ложное утверждение, а будучи плутом не мог бы сказать правду о том, что они оба плуты). Значит, A должен быть рыцарем, B не мог высказать упомянутое утверждение, а сам он либо рыцарь, либо плут.

Следовательно, если имел место случай В2, то второй логик прав, и мы тоже могли бы узнать только то, что А — рыцарь.

Шаг 4. Теперь допустим, что после ответа на свой второй вопрос логик узнал, относятся ли А и В к одному и тому же типу. Предположим, что он узнал, что они оба одного типа. Тогда он должен был решить задачу (в Случае В1 он знал бы, что они оба плуты, а в Случае В2, — что оба рыцари). Теперь предположим, что он узнал, что местные жители не одинаковы. Тогда в Случае В1 он не смог бы решить задачу (он знал бы, что один из них не рыцарь, и что они разные по типу, но не знал бы, кто есть кто), а в Случае В2 он знал бы, что А рыцарь, а В плут (поскольку он знал бы, что А рыцарь, а В отличается от него). Тем самым доказано, что если А и В различны, то для логика единственное решение задачи в том, что А — рыцарь, В — плут (ведь, как мы видели, если А и В различны, то Случай В1 невозможен или же логик не смог бы решить задачу). Следовательно, должен был иметь место Случай В2, и поэтому логик узнал, что А — рыцарь, а В — плут.

Таким образом, мы доказали следующее:

(3) Если А и В принадлежат к одному типу, второй логик решил задачу.

(4) Если А и В различны, то у второго логика могло быть единственное решение задачи: А — рыцарь, а В — плут.

Шаг 5. Теперь у нас есть все необходимое для решения! Допустим, что A и B одного типа. Тогда, согласно (3), второй логик решил задачу, и, согласно (1), первый логик ее решил, что противоречит условию о том, что один и только один из них смог ее решить. Следовательно, A и B относятся к разным типам.

Поскольку A и B различны, первый логик не смог решить задачу, согласно (2); значит, ее решил второй логик. Следовательно, согласно (4), A — рыцарь, а B — плут.

5. Нужно рассмотреть все четыре возможных случая: кто из судебных поверенных отвечал на вопрос, и был ли он при этом рыцарем или плутом.

Случай 1. Отвечал прокурор, и он был рыцарем. Тогда, разумеется, судья понял, что обвиняемый виновен (а также, что адвокат — плут).

Случай 2. Отвечал прокурор, и он был плутом. Тогда судья не понял бы, виновен ли обвиняемый (он мог быть невиновным, или мог быть виновным, но при этом, в противоположность заявлению прокурора, никогда не совершал преступления в прошлом).

Случай 3. Отвечал адвокат, и он был рыцарем. Тогда, конечно, судья понял, что обвиняемый виновен (а также, что прокурор — плут).

Случай 4. Отвечал адвокат, и он был плутом. Тогда судья знал бы, что обвиняемый виновен в силу следующего рассуждения. Поскольку утверждение адвоката ложно, невозможно одновременно, чтобы обвиняемый был невиновен *и* прокурор был плутом. Значит, ложно либо то, что обвиняемый невиновен, либо то, что прокурор плут. В первом случае обвиняемый виновен, во втором — прокурор не лжет, и это значит, обвиняемый виновен (как и утверждает прокурор). Тем самым доказано, что если адвокат был плутом, судья понял бы, что обвиняемый действительно виновен (хотя при этом и не знал бы, рыцарем или плутом является прокурор).

Теперь разберемся, почему репортер не мог ответить на вопрос своего друга.

Репортер был на суде и поэтому знал, кто из присяжных поверенных отвечал на вопрос судьи и кем он оказался — рыцарем или плутом. Допустим, что отвечал прокурор. Однако если бы вместо него отвечал адвокат, судья *решил бы* дело (как мы выяснили в анализе случаев 3 и 4), и поэтому репортер ответил бы «да» на вопрос своего друга. Поскольку репортер так не ответил, а сказал, что ответа нет, на вопрос судьи отвечал не прокурор. Отвечал именно адвокат, и своим ответом обнаружил, кто он такой.

Допустим, что адвокат был рыцарем. Тогда прокурор должен быть плутом, и, следовательно, если бы он вместо адвоката отвечал судье, судья *не мог бы решить* дело (как видно из анализа случая 2), а репортер, зная об этом, ответил бы «нет» на вопрос своего друга.

Итак, остается единственная возможность — обвиняемый виновен, поскольку судье отвечал адвокат, оказавшийся плутом. В этом случае репортер не мог бы сказать, рыцарем был прокурор или лжецом, и поэтому не знал ответа на вопрос своего друга. (Он знал только то, что если на вопрос судьи отвечал прокурор и при этом он оказался рыцарем, то судья мог решить дело. А если прокурор оказался лжецом, то судья не мог вынести вердикт. Однако репортер не мог понять, рыцарем или плутом обнаружил себя прокурор.)

6. Очевидно, что логик знал, в чем заключается задача P, а будучи совершенным, он знал, достаточно ли у него информации для ее решения. Этой информации достаточно для решения предложенной вам задачи; следовательно, у логика было достаточно информации для решения задачи P, и, будучи совершенным, он ее решил.

Часть III
Самовоспроизводящие роботы

11
Остров Роботов

Волшебник и его друзья, Аннабел и Александр, легли спать пораньше и ранним утром отплыли на остров Роботов. Прибыли они туда на восходе солнца и, прогуливаясь перед завтраком, наблюдали за тем, что происходит вокруг. Остров оказался самым шумным местом, которое Аннабел и Александр видели в своей жизни. Лязг и звон, шум и гром, гудение и громыхание были почти невыносимы. И все это не стихало ни на секунду! Остров был покрыт суетящимися роботами; одни из них двигались совершенно бесцельно, другие собирали новых роботов из валяющихся вокруг деталей, третьи разбирали готовых роботов на детали, которые зачастую использовались для сборки других роботов. На каждом роботе была этикетка со строкой, состоящей из заглавных букв. Сначала Аннабел и Александр подумали, что буквы предназначены просто для идентификации робота, но оказалось, что это запись *программы*, определяющей, что данный робот должен делать — двигаться бесцельно, собирать других роботов и с какой именно программой, или разбирать готовых роботов и с какой именно программой.

Молодую пару поразило еще одно обстоятельство. Они увидели робота, собирающего из кучи деталей другого робота, идентичного своему создателю. Разумеется, у созданного робота была идентичная программа, и, поэтому он в дальнейшем собирал дубликат *самого себя*, который, в свою очередь, собирал свой дубликат (фактически из частей своего прапрадедушки, который к этому времени был уже разобран). Очевидно, что этот процесс может продолжаться бесконечно, пока его что-то его не остановит.

Кроме того, молодых поразило еще одно странное явление. Робот, назовем его x, собирал робота y, отличающегося от x, который затем собирал дубликат робота x, который затем собирал дубликат робота y, и этот двойной цикл мог продолжаться бесконечно!

И еще они увидели тройной цикл: робот x собирал робота y, который собирал робота z, который собирал (дубликат) робота x, который собирал (дубликат) робота y, ...

Затем они увидели печальную картину. Робот x собирал робота y, и первое, что делал y завершении своего создания, — разбирал своего создателя x. Это шокировало молодых людей, поскольку казалось проявлением высшей степени неблагодарности.

Потом они увидели, что робот x разобрал робота y. Некоторое время спустя y был восстановлен и, встретив робота x, немедленно разобрал своего. Еще позже x был восстановлен и разобрал робота y, и так могло продолжаться бесконечно!

И еще они увидели, как два совершенно не похожих друг на друга робота x и y быстро сбегаются, начинают разбирать друг друга, и скоро от них остается лишь груда частей.

И видели они, как робот x собирает робота y, который собирает робота z, который затем разбирает робота x. Таким образом, робота x уничтожает его собственный внук!

И видели они совсем печальную картину: робот-самоубийца разбирал самого себя, и от него оставалась только кучка деталей. (На определенной стадии разборки он нажимал кнопку у себя на груди, в результате чего оставшаяся его часть полностью разрушалась.) Затем подходил другой робот и восстанавливал саморазрушителя, но как только он отходил, восстановленный с прежней программой робот опять уничтожал себя. Казалось, что этот бедняга лишен всякой надежды на существование. Если бы его опять восстановили с той же программой, он снова должен был бы себя уничтожить: с такой программой ни один робот не мог быть стабильным.

— Все это полностью сбило меня с толку, — сказала Аннабел. — Совершенно не понимаю, что здесь творится!

— Я тоже, — заметил Александр.

— О, вы все поймете после обеда, — сказал Волшебник. — На острове есть несколько роботостанций, каждая со своей программной системой. После ланча мы посетим лаборатории некоторых работающих здесь инженеров. Они объяснят вам суть своих систем.

I. Система Чарльза Робертса

После чудесного ланча, приготовленного и сервированного вышколенными роботами, Волшебник привел своих друзей на Северо-восточную станцию, директором которой был приятный человек по имени Чарльз Робертс. Представив Робертсу своих учеников, Волшебник удалился, сославшись на то, что ему нужно посетить кое-какие места на острове.

— Итак, о подробностях моей системы, — улыбнулся Робертс. — Как вы заметили, на каждом роботе есть этикетка со строкой заглавных букв, которые составляют программу, определяющую, что этот робот будет делать. Позвольте объяснить вам свои обозначения и терминологию.

Выражением, или *комбинацией*, я называю произвольную строку заглавных букв. Например: MLBP, LLAZLBA, а также единственная буква, скажем, G — это выражения. Прописные буквы x, y, z, a, b, c, e обозначают отдельные строки заглавных букв, xy означает комбинацию x, за которой следует комбинация y. Например, если x — это выражение MBP, а y — это выражение SLPG, то xy — это выражение MBPSLPG. Значит, Ax — это AMBP, xA — это MBPA, GxH — это GMBPH, а CxLy — это CMBPLSLPG. Вам понятно?

Это гости инженера поняли без труда.

— Итак, — продолжил объяснения Робертс, — моя программная система основана на идее определенных выражений, являющихся *именами* других выражений. В системе два правила, касающихся именования выражений:

Правило Q. Для любого выражения x выражение Qx именует x.

Например: QBAF именует BAF, QQH именует QH, а QDCD именует DCD.

Qx можно называть *главным* именем x, но, как вы увидите, выражение x может иметь и другие имена.

Правило R. Если x именует y, то Rx именует yy.

Например: RQB именует BB, так как QB именует B; или же RQBR именует BRBR, так как QBR именует BR. В общем случае для любого выражения x выражение RQx именует xx, так как Qx именует x. Не делайте обычную ошибку, полагая, что Rx именует xx; в общем случае это не так. Только RQx именует xx.

Правило **R** я называю правилом *повторения*, так как для любого x выражение xx называется *повторением* x; значит, ABCABC — это повторение ABC. Таким образом правило повторения гласит, что если x именует y, то Rx именует повторение y.

Чтобы убедиться, что вы поняли эти правила, спрашиваю: что именует выражение RRQBH?

— Оно именует BHBHBHBH, — после минутного размышления ответил Александр.

— Почему? — спросил Робертс.

— Потому что RQBH именует BHBH, значит RRQBH должно именовать повторение BHBH, то есть BHBHBHBH.

— Хорошо! — одобрил Робертс.

— Вы говорили, что выражение может иметь более одного имени, — спросил Александр. — Как это получается?

— Ну, — ответил Робертс, — например, у выражения xx одно имя RQx, а другое — Qxx.

Они оба именуют xx. Или же Qxxx именует выражение xxx, и его же именуют RQxx и RRQx. Значит, Qxxx, RQxx и RRQx — три имени одного и того же выражения.

— Разумеется, — сказал Александр.

— Как все это связано с тем, что одни роботы создают других? — спросила Аннабел.

— О, мое правило создания очень простое, — ответил Робертс. — Помните? Говоря, что x создает y, мы имеем в виду, что любой робот с программой x создаст робота с программой y. Вот мое правило создания.

Правило С. Если x именует y, то Cx создает y.

Значит, для любого y робот CQy (то есть любой робот с программой CQy) создает робота y (робота с программой y).

Из этих трех правил следует также, что CRQx создает xx (поскольку RQx именует xx) , а CRRQx создает xxx (поскольку RRQx именует xxx). А теперь обратимся к некоторым интересным приложениям.

1

— Вы видели на этом острове самовоспроизводящихся роботов, которые собирают дубликаты самих себя?

— О, да, — подтверила Аннабел.

— Так могли бы вы написать мне программу для одного такого робота? То есть можете ли вы найти такой x, что x создает x?

2

— Очень хорошо, — сказал Робертс, когда молодые люди показали ему свое решение. — А теперь, прежде чем мы обратимся к другим задачам создания роботов, вы должны понять некоторые основные принципы именования. Например, можете ли вы найти x, который именует самого себя?

3

— Прекрасно, — сказал Робертс. — Можно ли найти другой x, именующий самого себя, или существует только один такой?

4

— Вы говорили, что в общем случае Rxx не именует xx. Может ли случиться, скажем, по совпадению, что Rxx *действительно* именует xx?

— Странный вопрос, — заметил Робертс. — Он никогда не приходил мне в голову. Дайте подумать.

При этом Робертс взял авторучку и стал вычислять что-то на бумаге. «Да, — сказал он через минуту, — такое может случиться. А вы сами можете найти такой "x"»?

5*

Некоторые другие странности

— Если вам нравятся курьезы, — сказал Робертс, — могу сообщить вам, что для любого из следующих условий существует x, удовлетворяющий этому условию:

(a) Rx именует x;

(b) RQx именует QRx;

(c) Rx именует Qx;

(d) RRx именует QQx;

(f) RQx именует RRx.

Однако это лишь курьезы, и мне неизвестны их применения в программировании роботов. Вы можете поработать с ними ради собственного удовольствия, если вам нравятся загадки как таковые, независимо от практических приложений.

Некоторые принципы неподвижной точки

— Мы видели, — сказал Александр, как некоторые роботы разбирали других роботов. Они тоже наделены вашей программой?

— Нет, — ответил Робертс. — Программы разрушения находятся в ведении моего брата Дэниела Ченсея Робертса. Он тоже робототехник на этом острове. Его программы очень интересны, и вам следовало бы навестить его сегодня.

А сейчас я изложу вам базовый принцип, лежащий в основе и многих моих программ и программ моего брата.

6*

Принцип неподвижной точки

x называется *неподвижной точкой* выражения a, если x именует ax. (Помните, что a, подобно x и y, обозначает заданную комбинацию заглавных букв.)

Принцип неподвижной точки гласит, что любое выражение имеет неподвижную точку. Более того, существует общий метод нахождения неподвижной точки любого заданного выражения a. Можете ли вы доказать принцип неподвижной точки и изложить мне упомянутый метод? Например, назовите такой x, что x именует ABCx.

7

Факт существования самовоспроизводящихся роботов — результат применения принципа неподвижной точки. Понимаете, почему? Нет? Позвольте изложить вопрос более конкретно. Допустим, мы рассматриваем другую систему именования, в которой правила **Q** и **R** заменены другими правилами именования, и также есть правило: если x именует y, то x создает y. Если эта система именования тоже имеет принцип неподвижной точки: для любого выражения a существует x, именующий ax, — то должен существовать самовоспроизводящийся робот. Вы понимаете, почему?

8

Другой результат применения принципа неподвижной точки: существует x, который именует xx. Можете найти такой x? Кроме того, для любого выражения a существует x, который именует axax. Понимаете, почему?

9

В качестве еще одного применения этого принципа найдите x, который создает xx.

10

Покажите, что для любого выражения a существует x, который создает ax. Изложите метод нахождения такого x для любого данного выражения a. Этот метод имеет другие приложения, и я буду называть его методом **C**.

11*

Принцип двойной неподвижной точки

Из принципа неподвижной точки следует, что для любых выражений a и b существуют такие выражения x и y, что x именует ay, а y именует bx. Это следствие я называю принципом двойной неподвижной точки. Фактически существуют два разных способа нахождения x и y для данных a и b. Я называю их *методами двойной неподвижной точки*. В чем они заключаются?

12

— Я видела двух различных роботов, — сказала Аннабел, — каждый из которых мог собрать другого. Ваша программа такое допускает?

— Конечно, — ответил Робертс. — Сейчас вы уже сами должны уметь найти таких x и y. Каковы же они?

13

— Можно найти такие выражения x и y, — сказал Робертс, — что каждое из них именует другое, и при этом они различны. Можете их назвать?

14

Кроме того, можно найти такие выражения x и y, что x создает y и y именует x. Есть два ответа. Можете найти оба?

15

Есть даже принцип тройной неподвижной точки. Для любых выражений a, b и c существуют такие выражения x, y и z, что x именует ay, y именует bz, а z именует cx. Найти такие выражения можно тремя способами. В чем они заключаются?

16

Найдите такие выражения x, y и z, что x создает y, y именует z, а z создает x. Меня удовлетворит хотя бы один ответ.

— А теперь, — сказал Робертс, когда молодые люди решили последнюю задачу, — я полагаю, что вы готовы навестить моего брата Дэниела Ченсея.

Он указал им путь к лаборатории Дэниела Ченсея, и, поблагодарив одного брата, пара отправилась к другому профессору Робертсу.

II. Система Дэниела Ченсея Робертса

— Как и говорил мой брат, — сказал Дэниел Ченсей, — у меня есть программы роботов, разрушающих других роботов. У меня также есть программы роботов, создающих других роботов.

Я говорю, что x *разрушает* y, если любой робот с этикеткой x разрушает любого робота с этикеткой y. Мои правила создания роботов полностью совпадают с правилами создания, сформулированными братом. Что касается правил разрушения, то мне достаточно одного:

Правило D. Если x создает y, то Dx разрушает y.

Например, для любого выражения x DCQx разрушает x, так как CQx создает x. Также DCRQx разрушит xx, поскольку CRQx создает xx.

17

— А что случится, если x разрушает y, когда x и y — одно и то же выражение? — спросила Аннабел. — Значит ли это, что робот x разрушит самого себя?

— Именно! — сказал Дэниел Ченсей. — Таких роботов мы называем *роботами-самоубийцами*.

Можете ли вы найти такой x, что робот x — самоубийца? В моей программе такой есть.

— Это очевидно, — сказал Александр. — Мы уже знаем, как найти x, создающий x. Значит, Dx — саморазрушитель.

— Вовсе нет! — сказал Дэниел Ченсей. — Если x создает самого себя, то Dx разрушит x, а это не значит, что Dx разрушит Dx, что нам требуется.

— О, конечно! — согласился Александр.

Каков же правильный ответ?

18

— Другой полезный принцип, — сказал Дэниел Ченсей, — заключается в том, что для любого выражения a существует x, разрушающий ax. Можете ли вы изложить метод нахождения такого x? Я называю его методом **D**.

19

— Верно и то, — продолжал хозяин лаборатории, — что для любого выражения a, существует x, который разрушает повторение ax, то есть разрушает axax. Понимаете, почему?

20

— Мы видели другую печальную картину, — сказала Аннабел, — робот x собирает робота y, который затем неблагодарно разрушает робота y. В вашей системе есть такая программа?

— Разумеется, есть, — ответил Дэниел Ченсей. — Вам должно быть по силам найти такие x и y, что x создает y, а y разрушает x. Фактически здесь есть два решения. Каковы же они?

21

— Мы видели также, — сказал Александр, — двух различных роботов, разрушающих друг друга. И это предусмотрено вашей системой?

— Определенно, — ответил Дэниел. — Существуют такие x и отличающийся от него y, что x и y разрушают друг друга. Какие же они?

22

— Мы еще видели, — сказала Аннабел, — как робот x создает робота y, который создает робота z, который затем разрушает робота x.

— Это возможно в моей системе, — сказал Дэниел. — Попробуйте найти такие x, y и z. (Фактически ответов может быть несколько.)

Друзья и враги

— Я заметил, что у одних роботов, — сказал Александр, — этикетки начинаются с буквы F, и у других — с буквы E. Имеют ли эти буквы какое-то особое значение?

— О, конечно! — ответил Дэниел Ченсей. — Знаете ли, между нашими роботами завязались и дружеские и враждебные отношения. Если x создает y, то Fx — друг y, а Ey — враг y. Кроме того, FCQy — *лучший* друг y, а ECQy — злейший враг y. Из этого вытекают некоторые интересные следствия. Вот несколько примеров.

23

Робот, являющийся другом самому себе, называется *нарциссом*. Такой робот существует. Можете ли вы на него указать?

Кроме того, существует программа робота, являющегося врагом самому себе. Такой робот называется *невротиком*. Если вы можете привести программу робота-нарцисса, то, конечно, сможете привести и программу робота-невротика.

24

Очевидно, что ни один робот x не может быть *лучшим* другом самому себе (ни один x не может быть идентичен FCQx), но существует x, который создает своего собственного лучшего друга. Назовите его.

25

— Как найти робота x, разрушающего своего злейшего врага? — спросил Дэниел и продолжил. — Конечно, должен существовать и x, разрушающий своего лучшего друга. Достаточно у разрушителя своего злейшего врага заменить E на F.

— Почему у какого-то робота возникает ужасное желание разрушить своего лучшего друга? — спросила шокированная услышанным Аннабел.

— К сожалению, некоторые наши роботы безумны, — ответил Дэниел.

— Тогда зачем же вы создаете программы для безумных роботов? — упорствовала Аннабел.

— Это неизбежно, — ответил Дэниел. — До сих пор нам не удалось найти интересную программную систему, не имеющую побочных последствий. Ситуация аналогична генетическому коду человека. К сожалению, он допускает возникновение патологий.

— Скажите мне, — продолжала Аннабел, — может ли робот x быть другом робота y, являющегося врагом робота x?

— О, да, — ответил Дэниел. — Такие роботы называются *христоподобными*. Помимо прочего, Христос говорил, что мы должны возлюбить врагов своих. Фактически существует такой x, что он является другом своего *злейшего* врага. Такой x называется *мессией*. Робот, являющийся врагом своего друга, называется *злым*, а если он враг своему лучшему другу, то он называется *сатаническим*.

26

Фактически существуют два христоподобных робота, один из которых даже мессия; и существуют два злых робота, один из которых даже сатанический. Можете написать их программы?

27

Существует x, создающий y, который разрушает лучшего друга x. Можете его найти?

28

Существует также x, создающий лучшего друга y, который разрушает злейшего врага x. Можете его найти?

29

Существует также x, являющийся лучшим другом того, кто разрушает злейшего врага x. Можете найти такого x?

30

— Это только начало ряда возможностей, — продолжал Дэниел. — Число комбинаций бесконечно, и этим интересен наш остров.

— Эти программы действительно интересны, — сказала Аннабел, — однако меня смущает вот что. Мне понятен ваш интерес к программному обеспечению, поскольку в нем выражаются задачи, имеющие комбинаторный интерес. Но для чего реально *конструировать* таких роботов? Почему вас не удовлетворяет одно создание программ? Зачем нужно запускать их в реальности?

— По множеству причин,— ответил Дэниел.— Прежде всего, приятно получить эмпирическое подтверждение тому, что твои программы действительно работают. Но более важно и крайне интересно посмотреть, как взаимодействуют между собой роботы с разными программами. Поскольку на острове несколько сотен роботов, фактически невозможно предсказать, что произойдет в будущем. Может ли эта колония роботов существовать бесконечно, или однажды все ее члены будут разрушены, и после этого не останется ничего, кроме разобранных деталей? Возникают все виды интересных социологических вопросов, и мы уже приступили к созданию робота-социолога, призванного заниматься социологией общества роботов. Вполне возможно, что это прольет свет на социологию человеческих обществ.

— Да, это звучит очень интересно, — сказала Аннабел, — и я просто заинтригована вашей системой.

— Моя система, — это модернизированная версия системы, разработанной ранее профессором Куинси,— ответил Дэниел.— Он был первым роботологом на этом острове. Сейчас он на пенсии, но продолжает активные научные исследования и любит принимать гостей, интересующихся его системой. Почему бы вам не нанести ему визит?

В это время в лабораторию вошел Волшебник.

— Так и думал, что найду вас здесь, — сказал он. — Навестить профессора Куинси — хорошая идея. Я не знаком с его системой, и провожу вас к нему.

Все трое поблагодарили профессора Робертса за то, что он уделил им время, и отправились к профессору Куинси.

Ответы

1. Для любого выражения x выражение CRQx создает повторение x (поскольку RQx именует повторение x); поэтому вместо x мы берем CRQ, и получается, что CRQCRQ создает повторение CRQ, то есть CRQCRQ. Следовательно, CRQCRQ создает CRQCRQ. Итак, ответ: CRQCRQ.

2. RQRQ именует повторение RQ, то есть RQRQ. Значит, RQRQ именует самого себя.

3. Именующее нечто выражение может иметь только одну из следующих форм: Qy, RQy, RRQy, RRRQy и так далее. То есть любое «имя» либо имеет вид y для некоторого y, либо Qy, которому предшествуют одно или несколько R.

Нам нужен «именователь» x, именующий самого себя. Может ли он иметь вид Qy? Может ли Qy именовать Qy? Конечно, нет; Qy именует y, а выражение y не может совпадать с Qy (оно короче).

А как насчет выражения вида RQy? Ну, RQy именует yy, а нам нужно, чтобы RQy именовало RQy, а это может случиться, если и только если yy = RQy. Возможно ли это? Да, при y = RQ. Значит, RQRQ именует RQRQ (это ответ к предыдущей задаче). Более того, *единственный* y, такой, что yy = RQy, — это RQ. Следовательно, *единственный* x вида RQy, именующий самого себя, — это RQRQ. (Не ощущается ли во всем этом некая острота ума?)

А не подойдет ли нам выражение RRQy? Нет, поскольку RRQy именует выражение yyy, которое должно отличаться от RRQy (ведь если бы они совпадали, нам нужны были бы y = R и y = Q, что явно невозможно).

Выражение RRRQy тоже не годится, так как оно именует yyyyyyyy, что явно длиннее RRRQy.

Выражение, начинающееся с четырех и более R, независимо от его длины, будет неизбежно именовать более длинное выражение; значит, единственное именующее самого себя выражение — это RQRQ.

4. Возьмите x = RRQRQ.

5. (a) QQ (d) QQ
(b) QR (e) RR
(c) QQQ

6. RQaRQ именует повторение aRQ, то есть aRQaRQ. Значит, если x=RQaRQ, то x именует ax.

Напоминаю, что прописная буква a обозначает *любую* комбинацию заглавных букв. Значит, если, например, a обозначает ABCx, то выражением x, именующим ABCx, будет RQABCRQ.

Возможно, проще всего представлять это следующим образом. Чем бы ни был заполнен прочерк, верно следующее: x, создающий —x, — это RQ—RQ.

7. В любой системе именования если некоторый y именует Cy, то Cy создает Cy, и тогда Cy — это выражение, создающее само себя (робот Cy создает робота Cy). В рассматриваемой системе именования выражением y, именующим Cy, является RQCRQ (по методу неподвижной точки); следовательно, выражение CRQCRQ создает само себя (а это и есть наш первоначальный ответ на задачу).

8. Если мы найдем y, именующий Ry, то Ry будет именовать повторение Ry, и тогда можно принять за x выражение Ry. Согласно методу неподвижной точки, y = RQRRQ (это частный случай применения метода, в котором a — это буква R). Поэтому принимаем x = RRQRRQ, и читатель сам может проверить, что он именует выражение RRQRRQRRQRRQ.

Также при заданном выражении a для нахождения x, именующего повторение ax, мы сначала ищем y, именующий aRy, — а таким y является выражение RQaRRQ (согласно методу неподвижной точки, когда a — это aR) — и тогда Ry именует повторение Ry; следовательно, мы берем x = Ry. Итак, ответ: RRQaRRQ.

9. Согласно решению предыдущей задачи, при a = C существует y, именующий выражение CyCy, а именно: y = RRQCRRQ. Тогда Cy должно создавать CyCy, и, следовательно, мы берем x = CRRQCRRQ.

10. Нам нужно найти y, именующий aCy, и тогда Cy создает aCy; поэтому мы берем x = Cy. Применяя метод неподвижной точки, принимаем y = RQaCRQ. Итак, ответ: CRQaCRQ. Это и есть наш метод **C**.

11. Нужно найти x, именующий ay, и y, именующий bx. Это можно сделать двумя способами.

Первый способ состоит в том, чтобы найти x, именующий aQbx, и затем взять Qbx вместо y. (Тогда очевидно, что x именует ay, а y, равный Qbx, именует bx.) Нужный x мы находим по методу неподвижной точки и получаем ответ:

x = RQaQbRQ

y = QbRQaQbRQ

Второй способ состоит в том, чтобы сначала найти y, именующий $bQay$, и затем взять $x = Qay$. В результате получается следующий ответ:

$y = RQbQaRQ$

$x = QaRQbQaRQ$

12. Нужно найти x, создающий CQx. Тогда CQx в свою очередь создает x. Применяя метод **C** с CQ вместо a, получаем $x = CRQCQCRQ$, создающий повторение $CQCRQ$, то есть $CQCRQCQCRQ$, то есть CQx. Значит, два различных выражения, создающие друг друга, — это $CRQCQCRQ$ и $CQCRQCQCRQ$.

13. $RQQRQ$ именует выражение $QRQQRQ$, которое в свою очередь именует $RQQRQ$.

14. Один способ решения состоит в том, чтобы взять x, создающий Qx, и $y = Qx$. В результате получается ответ:

$x = CRQQCRQ$

$y = QCRQQCRQ$

Второй способ решения состоит в том, чтобы взять y, именующий CQy, и $x = CQy$. В результате получается ответ:

$x = RQCQRQ$

$y = CQRQCQRQ$

15. Один способ решения состоит в том, чтобы взять x, именующий aQbQcx, затем взять z = Qcx и y = Qbz. В результате получается ответ:

x = RQaQbQcRQ

z = QcRQaQbQcRQ

y = QbQcRQaQbQcRQ

Второй способ решения состоит в том, чтобы взять y, именующий bQcQay, затем x = Qay и z = Qcx.Читателю предлагается получить ответ самостоятельно.

Третий способ решения состоит в том, чтобы взять z, именующий cQaQbz, затем y = Qbz и x = Qay.Читателю предлагается получить ответ самостоятельно.

16. Можно поступить следующим образом. Оставим x временно неопределенным, и каким бы он ни оказался в конечном счете, мы примем за z выражение CQx (которое создает x). Тогда y должен именовать z, поэтому принимаем y = Qz. Значит, y = QCQx. Следовательно, нам нужен x, который создает QCQx. Используя метод неподвижной точки, получаем следующий ответ:

x = CRQQCQRQ

y = QCQCRQQCQRQ

z = CQCRQQCQRQ

Существуют два других решения, найти которые предлагается заинтересованному читателю.

17. DCRQDCRQ

18. Возьмите x = DCRQaDCRQ

19. Возьмите x = DCRRQaDCRRQ

20. Один способ решения состоит в том, чтобы взять x, создающий DCQx, и y = DCQx. Применяя метод **C** (задача 10), получаем:

x = CRQDCQCRQ

y = DCQCRQDCQCRQ

Второй способ решения состоит в том, чтобы взять y, разрушающий CQy, и x = CQy. Применяя метод **D** (задача 18), получаем:

x = DCRQCQDCRQ

y = CQDCRQCQDCRQ

21. Нужен x, разрушающий DCQx. Применяя метод **D**, получаем x = DCRQDCQDCRQ. Этот x разрушает выражение DCQDCRQDCQDCRQ, которое в свою очередь разрушает x.

22. Решение можно получить, найдя x, создающий выражение CQDCQx, которое принимается за y, а в качестве z принимается DCQx. Применяя метод **C**, получаем:

x = CRQCQDCQCRQ

y = CQDCQCRQCQDCQCRQ

z = DCQCRQCQDCQCRQ

23. FCRQFCRQ — друг повторения FCRQ, то есть FCRQFCRQ. Значит, FCRQFCRQ — нарцисс.

Очевидно, что ECRQECRQ — невротический (враг самому себе).

24. Решение очевидно. Нужен x, создающий FCQx; значит по методу **C** принимаем x = CRQFCQCRQ.

25. Возьмите x = DCRQECQDCRQ.

26. Мессия — это x, являющийся другом ECQx (злейшего врага x). Значит, x должен иметь вид Fz для некоторого z, создающего ECQFz (то есть ECQx). Применяем метод **C**, принимая z = CRQECQFCRQ. Затем принимаем x = FCRQECQFCRQ, и x — это наш мессия. Теперь z создает ECQFz, то есть выражение ECQFCRQECQFCRQ, которое мы обозначим y. Хотя x — друг y, он не лучший друг y, поэтому y злой (будучи врагом — фактически злейшим врагом — x), но не сатанический.

Разумеется, путем взаимной замены E и F, можно получить сатанического и христоподобного, не являющегося мессией. Итак,

FCRQECQFCRQ — мессия;

ECQFCRQECQFCRQ — злой, но не сатанический ;

ECRQFCQECRQ — сатанический;

FCQECRQFCQECRQ — христоподобный, но не мессия.

27. Возьмем x, который создает DCQFCQx. Такой x — это CRQDCQECQ.

28. Возьмем x, который создает FCQDCQECQx. Пусть y = DCQECQx. Тогда x создает FCQy, лучшего друга y, а y разрушает ECQx, злейшего врага x. В результате получаем ответ: x = CRQFCQDCQECQCRQ.

Нужны такие x и y, что x = FCQy (лучший друг y) и y разрушает ECQx. Значит нужно, чтобы y разрушал ECQFCQy. Поэтому мы принимаем y = DCRQECQFCQDCRQ, а искомый x — это FCQDCRQECQFCQDCRQ.

12
Необычная система профессора Куинси

I. Система Куинси

— О, да, — заговорил Куинси, когда трое его гостей удобно уселись, — возможно, моя система старомодна, но она действительно работает! Да, представьте себе, она на самом деле работает, — повторил он с усмешкой. — Моя система, знаете ли, основана на идее *цитирования* — выражение именуется путем его заключения в кавычки; слева кавычки открываются, а справа закрываются. Вместо левых и правых кавычек я использую символы Q_1 и Q_2 соответственно. Например, *цитата* выражения x — это Q_1x Q_2 ; цитата выражения HFUG — это Q_1HFUGQ_2. Вот мое первое правило.

Правило Q_1Q_2. Q_1xQ_2 именует x.

Таким образом, *цитата* x именует x. Сравните это правило с первым правилом именования системы Робертса: Qx именует x. Эта система основана на более современной идее *одностороннего* цитирования, применяемой нынче во многих языках компьютерного программирования типа LISP. В таких системах используются только открывающие кавычки, обозначенные в системе Робертса символом Q.

Далее, *нормой* выражения я называю выражение, за которым непосредственно следует его собственная цитата. То есть норма x — это xQ_1xQ_2. Такое понятие *нормы* я позаимствовал у логика Рэймонда Смаллиана. Операция создания нормы какого-то выражения играет в моей системе такую же фундаментальную роль, как и операция повторения в системе Робертса. Поэтому вместо правила Робертса R моим базисным правилом именования служит:

Правило N. Если x именует y, то Nx именует норму y.

Итак, если x именует y, то Nx именует yQ_1yQ_2. В частности, NQ_1yQ_2 именует yQ_1yQ_2. У меня есть еще и другие правила именования, но сначала я хотел бы показать вам, что можно сделать только с помощью тех двух правил, которые я сформулировал.

После этих слов профессор Куинси предложил вниманию своих гостей следующие задачи:

1

Найдите x, который именует самого себя.

2

Первый принцип неподвижной точки Робертса выполняется и для данной системы, а именно: для любого выражения a, существует x, именующий ax. Укажите метод нахождения такого x для заданного a.

3

Существует выражение, именующее свою собственную норму, и выражение, именующее норму его нормы. Можете найти эти выражения?

4

— Мое правило создания, — сказал Куинси, — такое же, как в системе Робертса: «Если x именует y (в моей системе), то Cx создает y». Мое правило разрушения совпадает с правилом системы Робертса: если x создает y, то Dx разрушает y.

Теперь найдите x, создающий себя, и x, разрушающий себя.

5

Для любого данного выражения a существует x, создающий ax, и x, разрушающий ax. Можете объяснить, почему?

6

В системе Дэниела Робертса, если x создает y, то Fx — друг y, а Ex — враг y. Однако в моей системе лучший друг y — это ECQ_1yQ_2, а злейший враг y — FCQ_1yQ_2.

Найдите x, который является другом x, и x, который является врагом x.

— В системе Робертса — заметила Аннабел, — можно найти x, который создает друга. А в вашей системе это можно сделать?

— Вероятно, нет, если применять только правила, которые я вам уже изложил. Теперь я назову еще два правила именования. Вот первое из них:

Правило M. Если x именует y, то Mx именует Q_1yQ_2 (цитату y).

С помощью этого правила можно сделать многое, что явно невозможно сделать без него. Я приведу вам несколько примеров:

7

Найдите x, именующий свою собственную цитату.

8

Найдите x, именующий норму своей собственной цитаты, и другой x, именующий цитату своей собственной нормы.

9

Покажите, что для любого выражения a существует x, именующий цитату ax.

— Верно ли то, — спросила Аннабел, — что для любых выражений a и b, существуют такие выражения x и y, что x именует ay, а y именует b, как и в системе Робертса?

— Я в этом сомневаюсь, — ответил Куинси, — и именно поэтому мне нужно последнее правило, которое я сейчас сформулирую.

Для любого выражения x, состоящего из двух или более букв, символом $x^\#$ я обозначаю результат стирания первой буквы в x. Например: если x — это BFGH, то $x^\#$ есть FGH. Если x состоит из единственной буквы, то $x^\#$ обозначает просто x (это для «пустых» случаев). Итак, мое последнее правило — это следующее правило стирания:

Правило K. Если x именует y, то Kx именует $y^\#$.

Например, KQ_1BFGHQ_2 именует FGH (поскольку Q_1BFGHQ_2 именует BFGH).

С этим правилом моя система программирования полна, и в ней можно сделать почти все то же, что и в системе Робертса, за исключением редких диковин.

Затем Куинси предложил следующие задачи, причем первая из них является основой для всех остальных:

11*
Средства Куинси

Для любого выражения a можно найти x, именующий axQ_2, а также x, именующий axQ_2Q_2, и x, именующий ax $Q_2Q_2Q_2$; и то же самое верно для любого числа повторений Q_2.

12

Теперь можно сформулировать принцип двойной неподвижной точки. Для любых a и b существуют такие x и y, что x именует ay, а y именует bx. Есть два способа нахождения x и y. Какие это способы? А что можно сказать о принципе тройной неподвижной точки?

13*
Другие средства Куинси

При заданном a полезно иметь под рукой средства нахождения такого выражения x, что оно:

(1) именует $axQ_{2,}$

(2) создает $axQ_2Q_{2,}$

(3) создает $axQ_2Q_2Q_2$.

Эти средства будут применяться в следующих задачах. Назовем их средствами C Куинси.

Полезно также иметь средство нахождения x, который:

(4) разрушает axQ_2.

Однако его можно получить из (1), заменив C на DC. Назовем его средством D Куинси.

А теперь найдите все эти средства.

14

Найдите такие x и y, что x создает y, а y разрушает x. (Есть два решения.)

15

Найдите x, создающего своего лучшего друга, и x, разрушающего своего злейшего врага.

16

Найдите мессию x (друга своего злейшего врага) и сатанического x (врага своего лучшего друга).

17

Найдите x, являющегося лучшим другом того, кто разрушает злейшего врага x.

18

Найдите x, создающего лучшего друга того, кто разрушает злейшего врага x.

— Из всего этого вы поймете, как работает моя система, — сказал Куинси. — Ее возможности поистине безграничны.

II. Можете ли вы найти ключ к решению?

— Если вам нравятся необычные и сложные задачи, — сказал Куинси, — я должен рассказать вам о любопытной системе, разработанной профессором Кудвортом, еще одним робототехником нашего острова.

Он заинтересовался тем, что произойдет с моей системой, если заменить правило нормализации — правило N, являющееся сердцем системы, — правилом R Робертса. Сделав такую замену, он ни к чему не пришел. Да, он смог решить несколько тривиальных задач, но они оказались бесполезными для конструирования программ. Разумеется, он не смог получить даже программу для самовоспроизводящегося робота, то есть получить такой x, что x создает x. Затем его друг, инспектор Крэйг из Скотленд-Ярда, очень интересующийся комбинаторными загадками, предложил Кудворту добавить правило инверсии. Когда Кудворт сделал это, система прекрасно заработала!

— В чем заключается правило инверсии? — спросила Аннабел.

— *Инверсия* выражения — это обратная запись данного выражения. Например, инверсия ABCD — это DCBA. Используя букву V, Кудворт сформулировал правило: если x именует y, то Vx именует инверсию y.

После этого Куинси записал для своих гостей все правила системы Кудворта:

Правило Q_1Q_2. Q_1xQ_2 именует x.

Правило R. Если x именует y, то Rx именует yy.

Правило M. Если x именует y, то Mx именует Q_1yQ_2 (цитату y).

Правило K. Если x именует y, то Kx именует $y^{\#}$.

Правило V. Если x именует y, то Vx именует инверсию y.

— Правила создания, разрушения, дружбы и вражды остаются такими же, как и в моей системе,— продолжил Куинси.— Теперь первая задача состоит в том, чтобы найти x, именующий самого себя. Это непросто! Самое короткое такое выражение, известное мне, состоит из восемнадцати букв. Существует также x, именующий свою собственную норму. Самое короткое такое x, известное мне, состоит из тридцати четырех букв.

Существует также x, именующий свою собственную инверсию, x, создающий свою собственную инверсию, x, разрушающий инверсию своего повторения, x, являющийся другом врага инверсии нормы своей собственной цитаты; и так я могу продолжать бесконечно, перечисляя другие комбинации. В системе есть также принципы неподвижной точки, двойной неподвижной точки и так далее.

Вы могли бы получить удовольствие, поразмыслив в свободное время над этими задачами. Я полагаю, что решив первую из них, вы получите ключ к решению всех остальных.

19

Профессор Куинси прав, утверждая, что важная идея, лежащая в основе построения x, именующего самого себя, является ключом к решению всех остальных задач. Какой же это ключ?

Покинув профессора Куинси, трое друзей обнаружили, что плыть домой уже слишком поздно, и решили заночевать в гостинице.

— Завтра, — сказал Волшебник, — прежде чем покинуть остров, я хотел бы, чтобы мы посетили станцию Саймона Симпсона, самого молодого и самого прогрессивного робототехника на этом острове. Я слышал, что он довольно тщеславен, но его программная система очень проста, элегантна и определенно достойна изучения.

Втроем они просидели до полуночи, разбираясь со странной системой Кудворта, но все-таки нашли решение. Усталые, они уснули, проснулись только поздним утром и, позавтракав, отправились на станцию Саймона Симпсона. О том, что там произошло, рассказано в следующей главе.

Ответы

1. NQ_1NQ_2 именует норму N, то есть NQ_1NQ_2. Значит, NQ_1NQ_2 именует самого себя.

2. Возьмите x = NQ_1aNQ_2. Он именует норму aN, то есть aNQ_1aNQ_2, а это и есть ax.

3. Если y именует Ny, то Ny будет именовать норму Ny. Возьмем x = Ny, и тогда x будет именовать свою собственную норму. Согласно решению задачи 2 (это метод неподвижной точки для системы Куинси), можно принять y = NQ_1NNQ_2 (то есть взять N вместо a); значит, x, именующий свою собственную норму, есть NNQ_1NNQ_2. А x, именующий норму своей нормы, — это $NNNQ_1NNNQ_2$.

4. CNQ_1CNQ_2 создает само себя (поскольку NQ_1CNQ_2 именует CNQ_1CNQ_2).

$DCNQ_1DCNQ_2$ разрушает само себя.

5. Найти x, создающий ax, можно, найдя сначала y, именующий aCy, а затем принять x равным Cy. Берем y = NQ_1aCNQ_2 и получаем ответ: x = CNQ_1aCNQ_2.

6. Нужен y, создающий Fy, и тогда Fy будет другом Fy. Берем x = Fy, и x оказывается другом самому себе. Согласно предыдущей задаче (используя F вместо а) принимаем у = CNQ_1FCNQ_2; и значит, $FCNQ_1FCNQ_2$ — друг самому себе.

Враг самому себе — это $ECNQ_1ECNQ_2$.

Обсуждение. Перед тем как изложить следующие ответы, сделаем паузу и заметим, что до сих пор решения этих задач не очень отличались от решений задач в системе Робертса: замените N на R, а Q_1 и Q_2 — на Q, и эти решения станут решениями в системе Робертса. Например, сравните NQ_1NQ_2, именующее себя в системе Куинси, с RQRQ, именующим себя в системе Робертса. Или же в последней задаче $ECNQ_1ECNQ_2$ — враг самому себе в системе Куинси, в то время как ECRQECRQ — враг самому себе в системе Робертса. Однако в следующих задачах данная ситуация заметно изменяется.

7. Подходит MNQ_1MNQ_2, так как NQ_1MNQ_2 именует норму MN, то есть MNQ_1MNQ_2. Следовательно, MNQ_1MNQ_2 именует цитату выражения MNQ_1MNQ_2.

8. x, именующий норму своей собственной цитаты, — это $NMNQ_1NMNQ_2$. x, именующий цитату своей собственной нормы, — это $MNNQ_1MNNQ_2$

9. Возьмите x = MNQ_1aMNQ_2.

10. Это следствие из предыдущей задачи. Поскольку существует x, именующий цитату ax, можно принять y в качестве цитаты ax, и тогда y именует ax. Следовательно, ответ состоит в том, что $x = MNQ_1aMNQ_2$; $y = Q_1aMNQ_1aMNQ_2Q_2$.

Заметим, что с помощью последнего правила (правила K) Куинси, можно найти и другое решение, которое мы обсудим позднее.

11. x, именующий axQ_2 — это $KMNQ_1aKMNQ_2$, поскольку NQ_1aKMNQ_2 именует $KMNQ_1aKMNQ_2$, то есть ax; значит, MNQ_1aKMNQ_2 именует Q_1axQ_2, и, следовательно, $KMNQ_1aKMNQ_2$ именует axQ_2.

Замечание. Это дает второе решение предыдущей задачи: можно взять y, именующий aQ_1yQ_2 (принимая aQ_1 вместо a), а именно: $y = KMNQ_1aKMNQ_2$. Тогда принимаем за x цитату y, то есть $x = Q_1KMNQ_1a\ Q_1MNQ_2Q_2$.

x, именующий axQ_2Q_2 — это $KKMMNQ_1aKKMMNQ_2$; x, именующий $axQ_2Q_2Q_2$ — это $KKKMMMNQ_1aKKKMMMNQ_2$ и так далее.

12. Первый способ решения: получить x, именующий axQ_1bxQ_2, а затем принять $y = Q_1bxQ_2$. Применяем средство Куинси (принимая aQ_1b вместо a) и получаем $x = KMNQ_1aQ_1bKMNQ_2$. Затем берем $y = Q_1bKMNQ_1aQ_1bKMNQ_2Q_2$. (Читатель может сам удостовериться в том, что такие x и y подходят.)

Второй способ решения состоит в том, чтобы сначала взять y, именующий bQ_1ayQ_2, а затем принять $x = Q_1ayQ_2$. В результате получается: $x = Q_1aKMNQ_1bQ_1aKMNQ_2Q_2$; $y = KMNQ_1bQ_1aKMNQ_2$.

Что касается тройных циклов, можно взять x, который именует $aQ_1bQ_1bQ_1cxQ_2Q_2$ (а именно: $x = KKMMNQ_1aQ_1bQ_1cKKMMNQ_2$), а затем принять $z = Q_1cxQ_2$ и $y = Q_1bzQ_2$.

Предлагаем читателю самостоятельно записать такие z и y.

Третий способ решения состоит в том, чтобы взять y, именующий $bQ_1cQ_1ayQ_2Q_2$, а затем принять $x = Q_1ayQ_2$ и $z = Q_1cyQ_2$. Можно также взять z, именующий $cQ_1aQ_1bzQ_2Q_2$, а затем принять $x = Q_1ayQ_2$ и $y = Q_1bzQ_2$. При желании все эти варианты решения можно записать подробно.

13. Чтобы получить x, создающий axQ_2, нужно найти y, именующий $aCyQ_2$, а затем принять $x = Cy$. Применяем первое средство Куинси из задачи 10 и получаем $y = KMNQ_1aCKMNQ_2$. Значит, искомый x — это $CKMNQ_1aCKMNQ_2$.

x, создающий axQ_2Q_2 — это $CKKMMNQ_1aCKKMMNQ_2$.

x, создающий $axQ_2Q_2Q_2$ — это $CKKKMMMNQ_1aCKKKMMMNQ_2$.

x, разрушающий axQ_2 — это $DCKMNQ_1aDCKMMNQ_2$.

14. Можно взять x, создающий DCQ_1xQ_2, который в свою очередь разрушает x. Применяя средство C Куинси, получаем ответ:

$x = CKMNQ_1DCQ_1CKMNQ_2$,

$y = DCQ_1CKMNQ_1DCQ_1CKMNQ_2\ Q_2$.

Можно также взять y, разрушающий CQ_1yQ_2, и принять $x = CQ_1yQ_2$. Тогда получается:

$x = CQ_1DCKMNQ_1CQ_1DCKMNQ_2Q_2$,

$y = DCKMNQ_1CQ_1DCKMNQ_2$.

15. Теперь это просто: применяя средство C Куинси, получаем, что x, создающий своего лучшего друга FCQ_1xQ_2, — это $CKMNQ_1FCQ_1CKMNQ_2$.

x, разрушающий своего злейшего врага, — это $DCKMNQ_1EDCQ_1DCKMNQ_2$.

16. Чтобы получить мессию, нужен z, создающий ECQ_1FzQ_2 (злейшего врага Fz), и тогда Fz — мессия. Применяя средство C Куинси, принимаем $z = CKMNQ_1ECQ_1FCKMNQ_2$. Итак, мессия — это $FCKMNQ_1ECQ_1FCKMNQ_2$.

Сатанический — это $ECKMNQ_1FCQ_1ECKMNQ_2$.

17. Пусть y — это «некто», разрушающий злейшего врага x. Тогда x — лучший друг y; значит, $x = FCQ_1yQ_2$. Злейший враг x — это ECQ_1xQ_2, что в терминах y означает $ECQ_1FCQ_1yQ_2Q_2$. Поэтому нужно, чтобы y создавал $ECQ_1FCQ_1yQ_2Q_2$. Применяем средство C Куинси и получаем $y = CKKMMNQ_1ECQ_1FCQ_1CKKMMNQ_2$. Следовательно, x — это $FCQ_1CKKMMNQ_1ECQ_1FCQ_1CKKMMNQ_2Q_2$.

18. Допустим, что некоторый y разрушает ECQ_1xQ_2 (злейшего врага x). Принимаем $y = DCQ_1ECQ_1xQ_2Q_2$. Тогда лучший друг y — это $FCQ_1DCQ_1ECQ_1xQ_2Q_2Q_2$. Значит, нам нужен x, создающий $FCQ_1DCQ_1ECQ_1yQ_2Q_2Q_2$. Применяя средство C Куинси, получаем $x = CKKKMMMNQ_1FCQ_1DCQ_1ECQ_1CKKKMMMNQ_2$.

19. Чтобы решить все задачи, возникающие в системе Кудворта, нужно найти выражение s, выполняющее те же функции, что и буква N в системе Куинси. То есть для любых выражений x и y s должно быть таким, что если x именует y, то sx именует норму y. Такое выражение s можно назвать *нормализатором*.

Пусть $y^{\neg}$ означает *обращение* y. Как же перейти от выражения y к его норме yQ_1yQ_2 через последовательность операций, каждую из которых можно запрограммировать в данной системе? Вот одна из таких последовательностей:

(1) Взять цитату y, получив таким образом Q_1yQ_2.

(2) Обратить полученный результат: $Q_1y^{\neg}Q_2$.

(3) Стереть Q_2, получив $Q_1y^{\neg}$.

(4) Обратить полученный результат: Q_1y.

(5) Повторить полученный результат: Q_1yQ_1y.

(6) Стереть первое левое Q_1, получив Q_1y.

(7) Взять цитату полученного результата: $Q_1yQ_1yQ_2$.

(8) Стереть первое левое Q_1, получив yQ_1yQ_2.

Теперь допустим, что x именует y, тогда:

(1) Mx именует Q_1yQ_2.

(2) VMx именует $Q_2y^{\neg}Q_1$.

(3) KVMx именует $y^{\neg}Q_1$.

(4) VKVMx именует Q_1y.

(5) RVKVMx именует Q_1yQ_1y.

(6) KRVKVMx именует yQ_1y.

(7) MKRVKVMx именует $Q_1yQ_1yQ_2$.

(8) KMKRVKVMx именует yQ_1yQ_2.

Значит, KMKRVKVM — нормализатор. Все задачи этой главы можно решить в системе Кудворта, заменив букву N сочетанием KMKRVKVM.

Например, выражение, именующее себя, — это KMKRVKVM Q_1KMKRVKVMQ_2. (А есть ли более короткое выражение, именующее себя?) Выражение, создающее себя, — это CKMKRVKVM Q_1CKMKRVKVMQ_2.

В качестве упражнения предлагаю читателю написать утверждение, именующее свое обращение. А как насчет выражения, создающего свое обращение? А сможете ли вы написать выражение, создающее повторение своего обращения?

13
От сложного к простому

— Старомодные системы просто сводят меня с ума,— сказал Симпсон, тряхнув головой.— Например, вы знакомы со странной системой Кудворта?

— Да, — ответил Волшебник, — профессор Куинси вчера объяснил нам эту систему.

— Так не самая ли это идиотская система из всех, которые я видел в своей жизни?! Столько мучиться ради того, чтобы получить нормализатор! Иногда я просто сомневаюсь, в своем ли уме некоторые мои коллеги?

— Вот уж не знаю, — сказал Волшебник. — Поиск ключа к этой системе я счел довольно интересным.

— Но эта система сложна сверх необходимости! — сказал Симпсон. — Похоже, Кудворту нравится усложнять все до предела. Моя философия противоположна: я хочу до предела все упростить.

На самом деле система Куинси не так уж и плоха, и ее появление понятно, если учесть, что она была построена до открытия одностороннего способа цитирования. И все же, последнее правило стирания выглядит лишь искусственным средством ad hoc для исправления неестественной ситуации. Но и в этом случае Куинси мог бы сделать лучше — заменить два правила **M** и **K** одним: если x именует y, то Lx именует yQ_2. Из одного этого правила следовали бы принципы двойной и тройной неподвижной точки, что позволяет решить все задачи, которые, по-видимому, он задавал вам.

Разумеется, система Робертса более проста и более естественна. Однако даже эта система сложнее, чем нужно для решения задач, имеющих значение с практической точки зрения. Меня не интересуют такие академические вопросы, как возможность найти x, создающего свое собственное повторение. Какое значение это может иметь для робототехники? Мой подход чисто прагматический. Я интересуюсь только вопросами, важными для социологии. Какой робот какого робота создает? Какой робот какого робота разрушает? Какие роботы являются друзьями, лучшими друзьями, врагами и злейшими врагами каких роботов? А для подобных вопросов моя программная система самая эффективная из всех.

— Ты используешь одностороннее или двухстороннее цитирование? — спросил Волшебник.

— Я не использую никакого цитирования; в моей системе нет кавычек.

— Это интересно, — сказал Волшебник. — Я тоже экспериментировал с системой без кавычек, но не для робототехники, а в связи с определенными общими проблемами, возникающими при самореференции. Мне действительно интересно ознакомиться с твоей системой.

— Мои правила прямые, краткие, приятные, и они касаются сути дела. Я использую символы C, D, F, E, C*, D*, F*, E* и следующие правила:

Правило C. Cx создает x.
Правило C*. C*x создает xx.
Правило D. Dx разрушает x.
Правило D*. D*x разрушает xx.
Правило F. Fx является лучшим другом x.
Правило F*. F*x является другом xx.
Правило E. Ex является злейшим врагом x.
Правило E*. E*x является врагом xx.

Что может быть прямее таких правил? Теперь я могу предложить более краткие решения всех задач, чем те, которые вы когда-либо видели. Например, очевидно, что самовоспроизводящий робот — это C*C*, а саморазрушающий — D*D*. Предлагаю вам несколько задач, и уверен, что вы их легко решите. Между прочим, эти решения представляют решения в системе Робертса в более ясном виде. Как это происходит, я объясню позже. А сейчас сосредоточимся на задачах.

1

Найдите такие различные x и y, что каждый из них создает другого.

2

Найдите такие x и y, что x создает y, а y разрушает x. Существует два решения.

3

Покажите, что для любого выражения a существует x, создающий ax, и существует x, разрушающий ax.

4

Для выражений a и b покажите, что:

(a) существуют такие x и y, что x создает ay и y создает bx (есть два решения);

(b) существуют такие x и y, что x разрушает ay и y разрушает bx (есть два решения);

(c) существуют такие x и y, что x создает ay и y разрушает bx (есть два решения).

5

Найдите робота x, являющегося другом самому себе.

6

Найдите x, создающего своего лучшего друга.

7

Найдите x, создающего своего друга, не являющийся лучшим другом.

8

Найдите x, являющегося другом своего злейшего врага.

9

Найдите x, являющегося лучшим другом одного из своих врагов.

10

Найдите такие x и y, что x создает лучшего друга y, а y разрушает злейшего врага x.

11

Найдите x, являющегося лучшим другом того, кто разрушает его злейшего врага.

12

Найдите x, создающего y, который является другом z, являющимся злейшим врагом w, который разрушает лучшего друга злейшего врага x.

— Видите, — гордо сказал Симпсон, — что в моей системе можно очень легко программировать все виды сложных социологических ситуаций.

— Твоя система, без сомнения, изящна и экономична, — сказал Волшебник, — и она мне очень понравилась. Она во многом сходна с моей системой, и по странному совпадению мы даже применяем похожие символы.

Возможно, ты не сознаешь лишь то, что все твои решения можно легко преобразовать в решения в системе Робертса, просто заменяя

C на CQ, C^* на CRQ, D на DCQ, D^* на DCRQ, F на FCQ, F^* на FCRQ, E на EECQ, E^* на ERCQ. Например, твой x, создающий самого себя, — это C^*C^*. Если заменить C^* на CRQ, получается CRQCRQ, то есть x, создающий самого себя, в системе Робертса. То же самое верно для всех твоих решений.

— Конечно, я это понимаю — сказал Симпсон. — Именно это я и имел в виду, когда сказал, что мои решения представляют решения Робертса в более ясном виде.

Читатель может легко убедиться в том, что для каждой из двенадцати предыдущих задач, решения в системе Симпсона можно преобразовать в решения в системе Робертса методом, который только что предложил Волшебник.

Решения

1. C^*CC^* и CC^*CC^*

2. *Решение 1.* $x = C^*DC^*$, $y = DC^*DC^*$
Решение 2. $x = CD^*CD^*$, $y = DC^*DC^*$

3. x, создающий ax, — это C^*aC^*; x, разрушающий ax, — это D^*aD^*.

4. (a) *Решение 1.* $x = C^*aCbC^*$, $y = CbC^*aCbC^*$
Решение 2. $x = CaC^*bCaC^*$, $y = C^*bCaC^*$.

(b) То же самое, заменяя C^* на D^* и C на D.

(c) *Решение 1.* $x = C^*aDbC^*$, $y = DbC^*aDbC^*$ *Решение 2.* $x = CaD^*bCaD^*$, $y = D^*bCaD^*$.

5. F^*F^*

6. C^*FC^*

7. CF^*CF^*

8. F^*EF^*

9. FE^*FE^* (робот E^*FE^* сатанический.)

10. *Одно решение:* $x = C^*FDEC^*$, $y = DEC^*FDEC^*$ *Другое решение:* $x = CFD^*ECFD^*$, $y = D^*ECFD^*$

11. $x = FD^*EFD^*$

12. Существует несколько решений. Одно из них: $x = C^*FEDFEC^*$(который создает $FEDFEx$). Второе решение: $x = CF^*EDFECF^*$. Третье решение: $x = CFED^*FECFED^*$.

В каждом из этих вариантов легко найти y, z и w.

Часть IV

Гёделевы загадки

14
Самореференция и кроссреференция

Несколько дней спустя после возвращения с острова Роботов, наша пара снова навестила Волшебника.

— Меня действительно заинтересовали те программы, — сказала Аннабел. — И как только создатели роботов их выдумывают?

— Все они связаны с проблемами обозначения, — ответил Волшебник, — практически с обозначением с помощью кавычек.

— А что это такое?

— Я объясню вам это с самого начала, — сказал Волшебник. — Вы понимаете разницу между *применением* и *упоминанием* слов?

Ни Аннабел, ни Александр никогда об этом не слышали.

— Я покажу вам это различие на примере, — пояснил Волшебник и написал следующее предложение:

(1) ЛЕД — ЭТО ЗАМЕРЗШАЯ ВОДА

— Это предложение истинно или ложно?

— Очевидно, что истинно, — ответили молодые люди.

— Хорошо. А что вы скажете о таком предложении?

(2) ЛЕД СОСТОИТ ИЗ ТРЕХ БУКВ

— Оно тоже истинно, — сказала Аннабел.

— Конечно, оно истинно, — сказал Александр — Лед *действительно* содержит три буквы.

— Нет, оно не истинно! — сказал Волшебник. — В замерзшей воде нет вообще никаких букв! Три буквы содержатся в слове «ЛЕД». Поэтому, предложение (2) в том виде, как оно записано, просто ложно! Его правильный вариант:

(3) «ЛЕД» СОСТОИТ ИЗ ТРЕХ БУКВ

— В предложении (1) говорится о *сущности* льда. В предложении (2) говорится о сущности льда, но то, что сказано, ложно. В предложении (3) говорится о слове «ЛЕД», и при этом сказанное истинно. О слове говорят, заключая его в кавычки, — именно этим старым методом мы пока ограничимся. Во всяком случае, в предложении (1) слово «ЛЕД» *применяется*, так как в предложении говорится о субстанции, а не о слове. В предложении (2) слово

«ЛЕД» *упоминается*, или *о нем* что-то говорится, но само оно не применяется, так как в предложении речь идет о слове, а не о субстанции льда.

— Это выглядит достаточно ясным, — сказала Аннабел .

— В предложении (2), — продолжал Волшебник, — *применяется* не слово «ЛЕД», а *имя*, или *цитата* этого слова. Данное имя применяется для того, чтобы говорить об этом слове. Знаю, что вы поняли общую идею, и тем не менее новички часто путают применение с упоминанием. Теперь позвольте предложить вам следующий пример.

Он снова написал предложение и спросил, истинно оно или ложно.

(3) «««ЛЕД»»» СОДЕРЖИТ ТРИ ПАРЫ КАВЫЧЕК

— Очевидно, что оно истинно, — сказала Аннабел.

— Конечно, истинно, — подтвердил Александр.

— Извините, но вы оба ошибаетесь, — сказал Волшебник. — Да, в том, что я *написал*, действительно, три пары кавычек, но в том, *о чем* здесь говорится, всего две пары кавычек. Правильное высказывание выглядит так:

(3)'«««ЛЕД»»» СОДЕРЖИТ ДВЕ ПАРЫ КАВЫЧЕК

— Это немного сбивает с толку, — сказала Аннабел.

— Хорошо, может быть следующий пример вам поможет. Истинно ли такое предложение?

(4) ЛЕД НЕ СОДЕРЖИТ НИ ОДНОЙ ПАРЫ КАВЫЧЕК

— Да, — ответил Александр, — в субстанции льда нет никаких кавычек.

— Тогда что вы скажете о таком предложении?

(5) «ЛЕД» НЕ СОДЕРЖИТ НИ ОДНОЙ ПАРЫ КАВЫЧЕК

— Оно ложно, — сказал один из молодых людей. — Я вижу *пару* кавычек.

— Это то, что ты *видишь*, — сказал Волшебник, — а в предложении говорится о слове «ЛЕД», не заключенном в кавычки. Поэтому предложение (5) истинно! То, что *применяется*, имеет одну пару кавычек, а то, *о чем говорится* или что *упоминается*, не имеет кавычек.

— Кажется, я начинаю понимать, — сказала Аннабел.

— Хорошо, тогда рассмотрим следующее предложение:

(6) ««ЛЕД»» СОДЕРЖИТ ОДНУ ПАРУ КАВЫЧЕК

— Теперь я понимаю, что оно истинно, — сказал Александр.

— Хорошо. А что скажете об этом предложении?

(7) «««ЛЕД»»» СОДЕРЖИТ ДВЕ ПАРЫ КАВЫЧЕК

— Да, оно истинно, — сказала Аннабел.

— Хорошо, — сказал Волшебник — А теперь я хотел бы проиллюстрировать разницу между «применением» и «упоминанием» в занимательном стиле. Истинно или ложно следующее предложение?

(8) ЧТОБЫ ПРОЧЕСТЬ БИБЛИЮ, НУЖНО БОЛЬШЕ ВРЕМЕНИ, ЧЕМ ДЛЯ ТОГО, ЧТОБЫ ПРОЧЕСТЬ «БИБЛИЮ»

— Конечно, оно истинно, — засмеялась Аннабел. — Для прочтения Библии нужно *намного* больше времени!

— В данном случае — сказал Волшебник — «Библия» и применяется и упоминается в одном и том же предложении.

Рассмотрим еще один пример.

(9) ЭТО ПРЕДЛОЖЕНИЕ ДЛИННЕЕ, ЧЕМ «ЭТО ПРЕДЛОЖЕНИЕ»

— Оно тоже истинно, — подтвердили оба молодых человека.

— Хорошо. А теперь скажите мне, на каком языке написано это предложение, на русском или на английском?

(10) «DEVIL» — ЭТО ИМЯ OF DEVIL

— Я сказала бы, что на обоих, — ответила Аннабел, — в нем есть и русские, и английские слова.

— Правильно. А как насчет этого предложения?

(11) «DEVIL» — ЭТО АНГЛИЙСКОЕ ИМЯ ДЬЯВОЛА

— Оно тоже написано на обоих языках, — сказал Александр. — В нем тоже есть английские и русские слова.

— А в этот раз неправильно, — сказал Волшебник. — Английское слово заключено в кавычки, значит, оно не применяется, а только упоминается. Дело в том, что человек, умеющий читать по-русски и не знающий ни одного английского слова, прекрасно поймет это предложение (и даже немножко научится английскому языку). В то же время, тот же человек не сможет понять предложение (10), поскольку не поймет, чьим же именем является «*devil*».

Самореференциальные предложения

— А теперь, — сказал Волшебник, — я хотел бы перейти к более интересным проблемам построения предложений, относящихся к самим себе.

Допустим, я хочу построить предложение, приписывающее самому себе некоторое свойство. Для уточнения возьмем свойство быть читающим человеком по имени Джон. Как строится предложение, в котором говорится, что Джон читает это самое предложение? Конечно, один из очевидных способов — это предложение следующего вида:

(12) ДЖОН ЧИТАЕТ ЭТО ПРЕДЛОЖЕНИЕ

Очевидно, что предложение (12) истинно, если только Джон читает предложение (12). Однако данное предложение содержит *указательное* слово «это», а нам желательно достичь такой же самореференции без помощи указателей (индексикалов).

— Что вы понимаете под индексикалом? — спросила Аннабел.

— *Индексикал* — это термин, обозначение которого зависит от его контекста. Например, «Джеймс Смит» — это не индексикал, поскольку в любом контексте этот термин обозначает человека Джейса Смита, тогда как слово «я» — типичный индексикал, поскольку всякий раз оно обозначает именно того человека, который его произносит. Когда Джеймс Смит говорит «я», он имеет в виду Джеймса Смита, а когда «я» произносит Пауль Джонс, он имеет в виду Пауля Джонса. Другой индексикал — слово «ты», обозначение которого зависит от человека, которому оно адресовано. Еще один индексикал «сейчас» обозначает различные моменты его произнесения в различные моменты времени.

Логик Рэймонд Смаллиан дал индексикалам полушутливое имя *термины-хамелеоны*;

о них он писал в статье под названием «Языки-хамелеоны». В этой статье автор пишет: «Подобно хамелеонам, чья окраска зависит от окружающей их среды, эти термины меняют свое значение от контекста к контексту». Один из друзей автора, наделенный чувством юмора и знавший об этой статье до ее публикации, написал Смаллиану: «Я слышал о твоих языках-хамелеонах. Я знаю их хорошо, за исключением того, что мне кажется, что они совсем не то, чем они кажутся».

Во всяком случае, я думаю, что вы теперь понимаете, что такое индексикалы, или термины-хамелеоны. Очевидно, что фраза «это предложение» является индексикалом; то, что она обозначает, зависит от предложения, в котором она появляется, разумеется, при условии, что в данном предложении она *применяется*, а не *упоминается*.

— Я не уверена, что все поняла, — сказала Аннабел.

— Хорошо, скажите мне, истинно или ложно следующее предложение?

(13) В ЭТОМ ПРЕДЛОЖЕНИИ ПЯТЬ СЛОВ

— Это предложение истинно, — сказал Александр. — В нем, действительно, пять слов.

— Правильно. А что скажете о таком предложении?

(14) В ЭТОМ ПРЕДЛОЖЕНИИ РОВНО ДВА СЛОВА

— Очевидно, что оно ложно,— сказала Аннабел.

— Правильно. А как насчет следующего предложения?

(15) «ЭТО ПРЕДЛОЖЕНИЕ» СОДЕРЖИТ РОВНО ДВА СЛОВА

— О, я начинаю понимать, что вы имеете в виду — сказала Аннабел — Последнее, что вы написали, без сомнения, истинно. В предложении (15) не говорится, что предложение (15) содержит ровно два слова, что не верно, но фраза «это предложение» состоит точно из двух слов, и это верно. Однако в предложении (14) не говорится, что «это предложение» содержит ровно два слова, а говорится, что во всем предложении (14) всего два слова, что явно ложно, поскольку там их шесть.

— Очень хорошо,— сказал Волшебник.— Я вижу, что вы уже приобретаете способность различать применение и упоминание. Теперь вы понимаете, что фраза «это предложение», заключенная в кавычки, *не* является индексикалом; она всегда обозначает одни и те же два слова, стоящие внутри кавычек.

А теперь я хочу объяснить, как можно получить самореференцию. *не* применяя индексикалы.

— Зачем это нужно? — спросила Аннабел. — Что плохого в индексикалах? Они кажутся очень полезными!

— Конечно, они очень полезны, — ответил Волшебник. — Они прекрасно работают в естественных, имеющих индексикалы языках, типа русского. Однако в формальных математических языках, подобных тому, который изучал Курт Гёдель, — к этому-то я сейчас и веду — нет индексикалов; значит, Гёдель должен был получить самореференцию, не применяя индексикалы.

— Как же он это сделал? — спросил Александр.

— Именно к этому я сейчас и подхожу. Вы знаете, что в алгебре буквами x и y обозначаются неизвестные числа, а на острове, который мы недавно посетили, конструкторы роботов применяли эти буквы для обозначения произвольных выражений своих языков программирования. А я сейчас буду использовать эти же буквы для обозначения неизвестных выражений обычного русского языка.

Итак, используя весьма важную идею Гёделя, я определяю *диагонализацию* выражения как результат замены символа x цитатой всего этого выражения. Например, рассмотрим следующее выражение:

(1) ДЖОН ЧИТАЕТ x

В том виде, в каком оно записано, это не предложение; оно ни истинно, ни ложно, так как не известно, что обозначает символ x. Если заменить x именем некоторого выражения, то (1) становится реальным предложением, которое может быть либо истинным, либо ложным, в зависимости от обстоятельств. Разумеется, можно заменить x цитатой выражения (1), получив тем самым его диагонализацию:

(2) ДЖОН ЧИТАЕТ «ДЖОН ЧИТАЕТ x»

Выражение (2) — реальное предложение, в котором утверждается, что Джон читает выражение (1), и оно истинно, если и только если Джон читает (1). Однако (2) не является самореференциальным, поскольку в нем не утверждается, что Джон читает (2), а утверждается, что Джон читает (1). Чтобы получить самореференциальное предложение, начинаем не с выражения (1), а со следующей фразы:

(3) ДЖОН ЧИТАЕТ ДИАГОНАЛИЗАЦИЮ x

Теперь посмотрим, как выглядит диагонализация выражения (3).

(4) ДЖОН ЧИТАЕТ ДИАГОНАЛИЗАЦИЮ «ДЖОН ЧИТАЕТ ДИАГОНАЛИЗАЦИЮ x»

На первый взгляд, в (4) мало смысла, но даже неглубокое размышление показывает, что оно не только имеет смысл, но и открывает нечто очень интересное! В предложении (4) говорится, что Джон читает диагонализацию (3); однако диагонализация (3) — это само предложение (4). Значит, в (4) утверждается, что Джон читает само предложение (4)! Следовательно,

(4) — самореференциальное предложение. Эта базовая идея принадлежит Гёделю.

Я полагаю, это легче понять в символической записи. Используем букву J как сокращение выражения «Джон читает», а букву D — как сокращение выражения «диагонализация ...». Таким образом получаем следующую сокращенную запись (1):

(5) Jx

Ее диагонализация:

(6) J"Jx"

В (6) говорится, что Джон читает двухбуквенное выражение "Jx"; значит, в (6) утверждается, что Джон читает выражение (5). Здесь нет самореференции: в (6) не говорится, что Джон читает (6). Теперь рассмотрим следующее выражение:

(7) JDx

Его диагонализация:

(6) JD"JDx"

В (8) говорится, что Джон читает диагонализацию выражения (7), а диагонализация (7) — это само выражение (8). Значит, (8) самореференциально: в нем утверждается, что Джон читает само выражение (8)!

Самореференция возникает цикличным образом в знаменитой теореме Гёделя о неполноте, о которой я расскажу вам позже. Идея диагонализации очень близка приему, использованному Гёделем для получения самореференции. Однако есть более простые методы, открытые позднее логиками Альфредом Тарским, Виллардом Куайном и Рэймондом Смаллианом. Один из таких методов я сейчас вам покажу.

В статье «Языки, в которых допустима самореференция» Смаллиан определяет *норму* выражения как выражение, *за которым следует* его собственная цитата. Рассмотрим пример. Начнем со следующего выражения:

(9) ДЖОН ЧИТАЕТ

Норма этого выражения:

(10) ДЖОН ЧИТАЕТ «ДЖОН ЧИТАЕТ»

Предложение (10) не является самореференциальным; в нем не говорится, что Джон читает (10), а говорится, что Джон читает (9). А теперь рассмотрим такое выражение:

(11) ДЖОН ЧИТАЕТ НОРМУ ...

Норма этого выражения:

(12) ДЖОН ЧИТАЕТ НОРМУ «ДЖОН ЧИТАЕТ НОРМУ ...»

Предложение (12) самореференциально. В нем утверждается, что Джон читает норму выражения (11), а норма (11) — это само выражение (12).

Рассмотрим символическую запись. Как и прежде, J является сокращением фразы «Джон читает», и теперь N — это сокращение фразы «норма ...». В результате (11) записывается:

(13) JN

а (12) сокращается так:

(14) JN "JN"

Выражение (14) — это норма выражения (13). В (14) утверждается, что Джон читает норму выражения (13). Значит, в (14) утверждается, что Джон читает (14); следовательно (14) — самореференциальное предложение.

Сравните самореференциальное предложение JN"JN", основанное на нормализации, с предложением JD"JDx", основанное на рассмотренной ранее диагонализации.

Можно ли с помощью диагонализации построить предложение, обозначающее самого себя? Да, таким выражением будет выражение D"Dx", обозначающее диагонализацию Dx, диагонализация Dx — это D"Dx". Значит, выражение D "Dx" обозначает самого себя.

Однако с помощью нормализации получается более простое решение. Выражение N"N" обозначает норму буквы N, то есть N"N". Значит, N"N" обозначает самого себя. Разумеется, это то же самое, что и NQ_1NQ_2 в системе профессора Куинси, только здесь Q_1 означает открывающую кавычку, а Q_2 — закрывающую кавычку. Именно это имел в виду Куинси, говоря, что его система основана на двухстороннем цитировании.

— О, я на самом деле сейчас поняла это, — обрадовалась Аннабел. — Тогда его слова озадачили меня, но я не хотела прерывать его. Он еще упомянул системы, основанные на одностороннем цитировании. Что это такое?

— В таких системах используются открывающие кавычки и нет закрывающих, — сказал Волшебник. — Метод имеет свои преимущества и недостатки в сравнении с двухсторонним цитированием. Например, берется символ, не применяемый обычно для открывающих кавычек, скажем °, и для данного выражения x вместо самого x используется °x в качестве имени для x. Как я сказал, у такого метода есть определенные преимущества, которые я вкратце объясню. В некоторых машинных языках, типа LISP, применяется именно одностороннее цитирование.

Следуя терминологии профессора Мак-Каллоча (из книги Смаллиана «Принцесса или тигр?»), определим *ассоциатив* данного выражения как выражение со звездочкой (символ «°»), за которым следует само данное выражение. Теперь используем символ A в качестве сокращения фразы «ассоциатив ...». Тогда, вместо выражения JN''JN'', утверждающего, что Джон читает его, получаем:

(15) JA°JA

В предложении (15) утверждается, что Джон читает ассоциатив предложения JA, а ассоциативом JA является само предложение

JA°JA. Значит, мы имеем еще один способ получения самореференции.

Выражением, обозначающим самого себя, является также $A^\circ A$. Оно обозначает ассоциатив выражения A, то есть $A^\circ A$.

Преимущество одностороннего цитирования в том, что оно обеспечивает относительно легкий способ получения *кроссреференции* — конструкции двух предложений, в каждом из которых говорится о другом члене пары. Допустим, чтомы рассматриваем двух индивидов — Джона и Пауля — и хотим построить два таких предложения x и y, что в x говорится, что Джон читает y, а в y говорится, что Пауль читает x. Как это сделать? Пусть, как и раньше, J есть сокращение фразы «Джон читает», и теперь P — сокращение фразы «Пауль читает». Как можно построить предложения x и y?

1

Как же построить эти предложения? Есть два решения.

2

Допустим, мы рассматриваем еще и третьего человека — назовем его Вильям — и используем W для сокращения фразы «Вильям читает».

Постройте такие x, y и z, что в x говорится, что Джон читает y; в y говорится, что Пауль читает z, а в z говорится, что Вильям читает x.

— Понятие *ассоциатива,* — пояснил Волшебник, — лежало в основе многих систем Мак-Каллоча, описанных в книге «Принцесса или тигр?» Оказалось, что операцию *повторения* можно применять для достижения самореференции и кроссреференции точно так же, как и операцию взятия ассоциатива. Я не думаю, что Смаллиану было известно об этом, когда он писал «Принцесса или тигр?», но он показал это в своей более поздней статье «Цитирование и самореференция». Давайте взглянем, на каких идеях базируется этот метод.

Повторение данного выражения — это выражение, за которым следует само данное выражение. Пусть буква R означает сокращение фразы «повторение...». Как же с помощью символов J, R и ° построить предложение, в котором утверждается, что Джон его читает? Обычно предлагается неправильный вариант JR°JR. Он неправильный, так как в предложении JR°JR говорится, что Джон читает повторение JR, то есть JRJR. Значит, в предложении JR°JR говорится, что Джон читает JRJR, а не о том, что Джон читает JR°JR.

Правильное решение: JR°JR°JR°. В этом предложении говорится, что Джон читает повторение выражения JR°, то есть само выражение JR°JR°.

Давайте теперь сравним четыре известных нам способа построения предложения, утверждающего, что Джон читает его. Можно применить диагонализацию, нормализацию, ассоциативность или повторение, получив, соответственно следующие предложения:

(i) JD"JDx"

(ii) JN"JNX"

(iii) JA°JA

(iv) °JR°

Разумеется, именно метод повторения является всей основой системы программирования Чарльза Робертса [глава 11]. Я не знаю, сам ли Робертс придумал это или позаимствовал у Смаллиана.

Повторение, как и ассоциативность, можно использовать для получения кроссреференции.

3

С помощью символов J, P, R, ° постройте такие предложения x и y, что в x утверждается, что Джон читает y, а в y утверждается, что Пауль читает x.

Самореференция с применением Гёделевой нумерации

— Я слышала фразу *«гёделева нумерация»,* — сказала Аннабел, — и мне сказали, что Гёдель использовал ее для получения самореференции. Вы можете объяснить это нам?

— Разумеется. Видите ли, в предложениях математических систем, которые изучал

Гёдель, говорится о таких объектах, как числа и множества, а не о предложениях. В таких системах нет ничего подобного кавычкам или другим средствам, с помощью которых можно прямо говорить о выражениях. Поэтому Гёдель умно обошел эту трудность, приписав каждому предложению номер, называемый *гёделевым номером* данного предложения. Таким образом, гёделев номер предложения, грубо говоря, играет роль цитаты данного предложения.

В качестве примитивного примера предположим, что я приписываю номера всем предложениям русского языка и могу найти номер n, являющийся гёделевым номером следующего предложения:

Джон читает предложение, гёделев номер которого n.

Однако n — гёделев номер самого этого предложения, и поэтому в нем окольным путем утверждается, что Джон читает его.

Как же можно достичь самореференции? Я покажу вам два способа; в первом из них применяется диагональный метод Гёделя. Давайте снова используем J для обозначения фразы «Джон читает», а D — для выражения «диагонализация ...», но при этом слово «диагонализация» имеет новое значение.

Используя пять символов, J, D, x, 1 и 0, припишем им, соответственно, гёделевы номера 10, 100, 1000, 10000 и 100000. Для упрощения ссылок запишем под этими символами их гёделевы номера:

J	D	x	1	0
10	100	1000	10000	100000

Тогда для любого сложного выражения, составленного из этих символов, в результате замены каждого символа его гёделевым номером получается гёделев номер данного выражения. Например, выражение xJ1D имеет гёделев номер1000101000100; выражение DJ имеет гёделев номер 10010.

Теперь мы заново определим *диагонализацию* выражения как результат замены не цитатой этого выражения (в данной системе нет никаких цитат), а гёделевым номером этого выражения (записанной, разумеется, в обычной десятичной нотации). Например, диагонализация Jx — это J101000. Диагонализация DxJ — это D100100010J.

А теперь для любого гёделева номера n будем считать, что Jn означает не то, что Джон читает номер n, а то, что Джон читает *выражение*, имеющее гёделев номер n. Например, в J10000100 утверждается, что Джон читает выражение "1D"; в J10 утверждается, что Джон читает букву J; в J10010 утверждается, что Джон читает DJ.

Теперь интерпретируем JDn как предложение, гласящее, что Джон читает *диагонализацию* выражения, имеющего гёделев номер n. Например, в предложении JD10100010 утверждается, что Джон читает диагонализацию выражения, имеющего гёделев номер 10100010. Выражение, имеющее гёделев номер 10100010, — это JxJ, а диагонализация JxJ — это J10100010J. Значит, в JD10100010J утверждается, что Джон читает (бессмысленное) выражение J10100010J.

Теперь вам должно быть очевидно, как построить предложение, в котором утверждается, что Джон читает само это предложение.

4

Найдите такое предложение.

Принцип гёделевой нумерации можно применять с нормализацией вместо диагонализации, как это было сделано Смаллианом. Он сделал примерно следующее:

Мы будем использовать символы J, N, 1, 0, — x больше не нужен. Припишем им соответствующие гёделевы номера 10, 100, 1000, 10000. Как и прежде, гёделев номер составного выражения получается заменой каждого символа его гёделевым номером. Затем мы предопределяем *норму* выражения как выражение, за которым следует его гёделев номер. Например, норма J1JN — это J1JN10100010100.

Теперь интерпретируем JNn как предложение, в котором говорится, что Джон читает норму выражения, имеющего гёделев номер n. (Если n не является гёделевым номером никакого выражения, JNn считается ложным.)

5

В каком же простом предложении говорится, что Джон его читает?

Особая система волшебника

— Недавно, — с гордой улыбкой сказал Волшебник, — я придумал еще одну схему самореференции, в которой не используются ни кавычки, ни гёделева нумерация, и она так же хорошо подходит для кроссреференции, как и для самореференции. Она очень похожа на метод программирования Симпсона.

Для любого выражения x я пишу **J**x, и это значит, что Джон читает само выражение x. Я не желаю ни заключать x в кавычки, ни ставить звездочку перед x, ни использовать гёделев номер x. Я пишу выражение **J**x, означающее, что Джон читает x. Далее, **J•**x означает, что Джон читает *повторение* x. Следовательно, **J•**x означает, что Джон читает xx. (**J**xx означает то же самое).

Теперь самореференция становится полностью тривиальной; в предложении **J•J•** утверждается, что Джон читает повторение **J•**, то есть

J•J•. Значит, в предложении J•J• говорится, что Джон читает само предложение J•J•. Это такой простой метод достижения самореференции, какой только можно вообразить.

Однако кроссреференция не настолько проста, и все же сравнима с другими методами, которые мы уже обсудили. Пусть Px означает, что Пауль читает x, а P•x означает, что Пауль читает xx. То же самое верно для Вильяма при использовании букв W и W• соответственно. Можете ли вы теперь построить такие предложения x и y, что в x говорится, что Джон читает y, а в y говорится, что Пауль читает x? Можете ли вы построить такие предложения x, y и z, что в x говорится, что Джон читает y, в y говорится, что Пауль читает z, а в z говорится, что Вильям читает x?

6

Найдите ответы на три последних вопроса.

Ответы

1. *Одно решение:* x = J•P•A°J•PA y = PA°J•PA. *Другое решение:* x = JA°P•JA y = P•JA°P•JA.

2. *Одно решение:* x = J•P•WA°J•P•WA y = P•WA°J•P•WA z = WA°J•P•WA

(Есть по меньшей мере еще два других решения.)

3. *Одно решение:* x = J•PR°J•PR° y = PR°J•PR°.

Другое решение: x = JR°P•J R° y = P•JR°P•JR°.

4. JD101001000

5. JN10100

6. Первая задача состоит в том, чтобы построить такие предложения x и y, что в x говорится, что Джон читает y, а в y говорится, что Пауль читает x.

Одно решение: x = JP•JP• y = P°JP°.

Другое решение: x = J•PJ• y = PJ•PJ•.

Данный метод очень экономичен — ясен и прост — по сравнению с другими методами, которые мы рассмотрели. Снимаю шляпу перед Волшебником!

Что касается последнего вопроса Волшебника, на него есть три следующих ответа:

x:	JPW°JPW°	JP°WJP°	J•PWJ•
y:	PW°JPW°	P°WJP°	PWJ•PWJ•
z:	W°JPW°	WJP°WJP°	WJ•PWJ•

15
Миниатюрный гёделев язык Волшебника

— Сегодня, — сказал Волшебник, — я хочу показать вам миниатюрный вариант знаменитой теоремы Гёделя о неполноте. Он послужит мостом для перехода от того, что мы делали в предыдущих главах, к тому, чем мы займемся немного позже. Система, которую я сейчас представлю вам, — это модернизированный и упрощенный вариант «языка» Смаллиана. Вместо одностороннего цитирования Смаллиана, я буду применять метод без цитат, который я объяснил в предыдущей главе.

В данной системе можно доказывать различные предложения. В ней используются четыре символа: P, P°, Q, Q°. Символ P означает доказуемость в данной системе. Таким образом для любого выражения X в языке этой системы, PX утверждает, что X доказуем в данной системе, и, соответственно, называется *истинным*, если и только если X доказуем в данной системе. Символом Q обозначается недоказуемость в данной системе. Таким образом для любого выражения X, QX утверждает, что X недоказуем в данной системе, и, соответственно, называется *истинным*, если и только если X недоказуем в данной системе. Далее, $P^{\circ}X$ означает, что XX доказуемо в данной системе, и, соответственно, называется *истинным*, если и только если XX доказуемо в данной системе. И, наконец, $Q^{\circ}X$ означает, что XX недоказуемо в данной системе, и, соответственно, называется *истинным*, если и только если XX недоказуемо в данной системе. *Предложением* называется любое выражение одного из четырех видов: PX, $P^{\circ}X$, QX, $Q^{\circ}X$, где X — любая комбинация из четырех используемых символов. В дальнейшем слово *доказуемо* означает доказуемость в данной системе. Теперь давайте посмотрим на следующие базисные факты:

(1) PX утверждает, что выражение X доказуемо;

(2) QX утверждает, что выражение X недоказуемо;

(1) $P^{\circ}X$ утверждает, что выражение XX доказуемо;

(1) $Q^{\circ}X$ утверждает, что выражение XX недоказуемо.

Вы видите, что эта система самореференциальна и позволяет доказывать различные утверждения о том, что можно или нельзя доказать в данной системе. Нам дано, что эта система абсолютно точна в том смысле, что каждое доказуемое в ней предложение истинно; другими словами, выполняются следующие условия (для любого выражения X):

C_1 : Если доказуемо PX, то доказуемо X;

C_2 : Если доказуемо QX, то X недоказуемо;

C_3 : Если доказуемо $P^{\circ}X$, то доказуемо XX;

C_4 : Если доказуемо $Q^{\circ}X$, то XX недоказуемо.

Из того, что каждое доказуемое в этой системе предложение истинно, вовсе не следует, что каждое истинное предложение доказуемо в данной системе. На самом деле оказывается, что есть такое истинное предложение, которое недоказуемо в этой системе. Вы можете найти такое предложение?

1

Найдите предложение, недоказуемое в этой системе.

Опровержимые предложения. Для каждого предложения мы определяем его *сопряжение* следующим образом. Сопряжение PX суть QX, а сопряжение QX суть PX. Сопряжение P°X суть Q°X, а сопряжение Q°X суть P°X. Значит, предложения PX и QX являются сопряжениями друг друга, и предложения P°X и Q°X тоже являются сопряжениями друг друга. Очевидно, что в каждой сопряженной паре один член является истинным, а другой ложным.

Предложение называется *опровержимым* (в данной системе), если его сопряжение доказуемо (в данной системе). Значит, PX опровержимо, если и только если QX доказуемо, и PX доказуемо, если и только если QX опровержимо. То же самое верно для P°X и Q°X.

2

Найдите предложение, утверждающее, что оно опровержимо.

3

Найдите предложение, утверждающее, что оно неопровержимо.

4

Какое предложение утверждает, что оно доказуемо?

Неразрешимые предложения. «Предложение называется *неразрешимым* (в данной системе), если в этой системе оно не является ни доказуемым, ни опровержимым, — сказал Волшебник. — В решении задачи 1 вы видели, что предложение $Q^{\circ}Q^{\circ}$ истинно, но недоказуемо в данной системе. Поскольку оно истинно, его сопряжение $P^{\circ}Q^{\circ}$ ложно, а значит, тоже недоказуемо в этой системе. Следовательно, предложение $Q^{\circ}Q^{\circ}$ неразрешимо в данной системе.

Мой аргумент апеллирует к понятию истины, но даже не обращаясь к этому понятию, можно показать неразрешимость предложения $Q^{\circ}Q^{\circ}$ в качестве прямого следствия из условий C_1 — C_4. Допустим, что $Q^{\circ}Q^{\circ}$ доказуемо. Заменив X на Q°, согласно условию C_4, получаем, что повторение Q° недоказуемо, а это значит, что $Q^{\circ}Q^{\circ}$ недоказуемо. Итак, получается, что если $Q^{\circ}Q^{\circ}$ доказуемо, то $Q^{\circ}Q^{\circ}$ недоказуемо, то есть возникает противоречие. Следовательно, $Q^{\circ}Q^{\circ}$ недоказуемо. Если бы его сопряжение, то есть $P^{\circ}Q^{\circ}$

было доказуемо, тогда, согласно C_3 (с заменой X на Q°), $Q^\circ Q^\circ$ было бы доказуемо, а мы доказали, что это не так. Значит и $P^\circ Q^\circ$ недоказуемо. Следовательно, предложение $Q^\circ Q^\circ$ неразрешимо в этой системе.

— Скажите мне вот что: $Q^\circ Q^\circ$ — это единственное предложение, которое истинно, но недоказуемо, или есть и другие такие же? — спросила Аннабел.

— $Q^\circ Q^\circ$, — пояснил Волшебник, — единственное известное мне предложение, которое истинно, недоказуемо в *любой* системе, удовлетворяющей условиям C_1 — C_4. Однако как вы увидите далее, для любой системы, удовлетворяющей условиям C_1 — C_4, существуют и другие предложения, которые истинны, но недоказуемы в данной системе. Предложение $Q^\circ Q^\circ$, как я сказал, — это единственное известное мне предложение, работающее одновременно во *всех* системах, удовлетворяющих условиям C_1 — C_4.

Затем Волшебник сформулировал следующие задачи.

5*

Некоторые свойства неподвижной точки

Покажите, что для любого выражения E существует предложение X, утверждающее, что EX доказуемо (X истинно, если и только если EX доказуемо), и что существует некоторое предложение X, утверждающее, что EX недоказуемо.

6*

Некоторые свойства антинеподвижной точки

Пусть для любого предложения X X^- является сопряжением X. Покажите, что для любого выражения E существует предложение X, утверждающее, что EX^- доказуемо, и что существует некоторое предложение X, утверждающее, что EX^- недоказуемо.

Затем Волшебник предложил несколько задач по кроссреференции.

7

Найдите такие предложения X и Y, где X утверждает, что Y доказуемо, а Y утверждает, что X недоказуемо. (Есть два решения.) Затем докажите, что по крайней мере одно из предложений X, Y должно быть истинным, но недоказуемым (хотя и невозможно сказать, какое именно).

8

Найдите такие предложения X и Y, где X утверждает, что Y опровержимо, а Y утверждает, что X неопровержимо. (Есть два решения.) Затем докажите, что по крайней мере одно из предложений X, Y должно быть ложным, но неопровержимым (хотя и невозможно сказать, какое именно).

9

Найдите такие предложения X и Y, где X утверждает, что Y доказуемо, а Y утверждает, что X опровержимо. (Есть два решения.) Затем докажите, что по крайней мере одно из предложений X, Y истинно и недоказуемо или другое ложно, но неопровержимо. Какое из этих предложений каким свойством обладает?

10

Найдите такие предложения X и Y, где X утверждает, что Y недоказуемо, а Y утверждает, что X неопровержимо. Следует ли из этого, что одно из них должно быть неразрешимым?

11

Найдите такие предложения X, Y и Z, где X утверждает, что Y опровержимо, Y утверждает, что Z неопровержимо, а утверждает, что доказуемо. Является ли одно из них неразрешимым?

12

— Раньше я говорил, — напомнил Волшебник, — что для любой системы, удовлетворяющей условиям C_1 — C_4, найдутся отличающиеся от $Q^{\circ}Q^{\circ}$ предложения, которые истинны, но недоказуемы в данной системе. Можете ли вы сейчас доказать это? Понимаете ли вы, как это сделать?

Регулярность. Система называется регулярной, если выполняются обращения условий C_1 и C_3, то есть если X доказуемо, то PX тоже доказуемо, и если XX доказуемо, то $P^{\circ}X$ тоже доказуемо. Такие условия, вместе с условиями C_1 и C_3, гласят, что PX доказуемо, если и только если X доказуемо, и $P^{\circ}X$ доказуемо, если и только если XX доказуемо. Здесь можно было бы заметить, что регулярность — это аналог условия, не выполняющегося для систем, которые изучал Гёдель, но речь об этом пойдет в другой раз. Как вы скоро увидите, регулярность обладает некоторыми интересными свойствами.

Определим *позитивное* предложение как предложение вида PX или $P^{\circ}X$, а *негативное* предложение как предложение вида QX или $Q^{\circ}X$. Позитивные предложения утверждают, что определенные предложения доказуемы; негативные предложения утверждают, что определенные предложения недоказуемы. Заметим, что если система регулярна, то все истинные позитивные предложения доказуемы; и наоборот, все истинные позитивные предложения доказуемы, то система регулярна.

13

Почему система регулярна, если и только если все истинные позитивные предложения доказуемы?

Итак, мы видим, что в регулярной системе только негативные предложения могут быть истинными, но недоказуемыми. Любое предложение, утверждающее, что нечто доказуемо, само должно быть доказуемым, если оно истинно.

14

Из того, что система регулярна, следует ли, что любое ложное негативное предложение опровержимо?

— Регулярные системы, как вы сейчас увидите, действительно, обладают некоторыми интересными свойствами, — сказал Волшебник.

15

В первую очередь в регулярных системах исчезают неясности, отраженные в задачах 7 — 10, то есть если система регулярна, то в рамках задачи 7 можно определить, X или Y является истинным, но недоказуемым предложением. Какое же из них? А в задаче 8 X или Y является ложным, но неопровержимым предложением? В задаче 9 является ли X истинным, но недоказуемым, или Y является ложным, но неопровержимым? В задаче 10 является ли X неразрешимым? Конечно, на все эти вопросы можно ответить только при допущении регулярности.

Заметим, что для любой системы, удовлетворяющей условиям C_1 — C_4, независимо от того, регулярна она или нет, если E — произвольный ряд символов P, то доказуемо EX, и значит, доказуемо предложение X. Это следует из повторяющихся применений условия C_1. Например, если доказуемо PPPX, то доказуемо и PPX (по C_1); следовательно, доказуемо PX (снова по C_1); следовательно, доказуемо X (снова по C_1). Очевидно, то же самое верно, если E содержит четыре или более символов P, или если E содержит два символа P, или только один символ P. Значит, если E — *любая* последовательность символов P, то если доказуемо EX, то доказуемо и X. Для регулярных систем верно и обратное, то есть если доказуемо X, то доказуемо и EX, где E — любая последовательность символов X. Ведь если предложение X доказуемо, и система регулярна, то доказуемо PX (в силу регулярности); следовательно, доказуемо PPX и так далее. Итак, для регулярной системы, если E — произвольный ряд символов P, то EX доказуемо, если и только если доказуемо X.

Регулярные системы обладают также следующим свойством. Для любой системы, удовлетворяющей условиям C_1 — C_4, предложение $P^{\circ}X$ истинно, если и только если истинно PXX, так как каждое из них истинно, если и только если XX доказуемо. Однако без регулярности нет оснований считать, что $P^{\circ}X$ доказуемо, если и только если доказуемо PXX. Если одно из этих предложений доказуемо, то второе истинно, но это не значит, что оно доказуемо. Если же система регулярна, то P°X доказуемо, если и только если доказуемо PXX.

16

Почему в регулярной системе P°X доказуемо, если и только если доказуемо PXX?

Особенно интересно следующее свойство регулярных систем. Мы уже знаем, что в любой системе, удовлетворяющей условиям C_1 — C_4, есть бесконечное множество предложений, которые для этой системы истинны, но в ней недоказуемы. Это не значит, что есть бесконечное множество предложений, которые истинны для *всех* систем, удовлетворяющих условиям C_1 — C_4, и в то же время недоказуемы во всех этих системах. Однако существует бесконечное множество таких предложений X, что для каждой *регулярной* системы, удовлетворяющей условиям C_1 — C_4, каждое предложение X истинно в данной системе, но недоказуемо в ней.

17

Можете ли вы это доказать?

— То, о чем я рассказал вам сегодня, — продолжал Волшебник, — применяется в области, известной как *метаматематика* — теория математических систем. Моя миниатюрная система обеспечивает один из подходов к знаменитой теореме Гёделя о неполноте.

Рассмотрим математическую систему (М), в которой есть точно определенные правила, согласно которым одни предложения считаются истинными, а другие — доказуемыми в (М). Допустим, мы хотим знать, является ли (М) *полной* в том смысле, что все истинные в (М) предложения доказуемы в этой системе. Можно показать, что если (М) — одна из широкого класса систем, изучавшихся Куртом Гёделем, то можно *перевести* мою систему в (М) в том смысле, что относительно каждого предложения X моей системы существует такое предложение X° системы (М), что X истинно в моей системе, если и только если соответствующее предложение X° системы (М) истинно в (М), и X доказуемо в моей системе, если и только если X° доказуемо в (М). Вы понимаете, к чему это ведет? Это значит, что для любой такой системы (М) должно существовать истинное в (М) предложение, которое недоказуемо в (М), — его истинность можно установить, только выйдя за пределы данной системы. Следовательно, ни одна система (М), в которую переводима моя система, не может быть полной. Понимаете, почему это именно так?

18

Почему же дело обстоит именно так?

— Все это крайне удивительно! — сказала Аннабел.

— Разумеется! — согласился Александр.

— О чем вы расскажете нам в следующий раз? — спросила Аннабел.

— К вашему следующему визиту, — загадочно улыбаясь, ответил Волшебник, — я приготовил особый парадокс.

— С нетерпением буду ждать его, — сказала Аннабел. — Меня всегда интересовали парадоксы.

Ответы

1. Предложение $Q^\circ Q^\circ$. Оно утверждает, что повторение Q° недоказуемо, но повторение Q° — это $Q^\circ Q^\circ$. Следовательно, $Q^\circ Q^\circ$ истинно, если и только если оно недоказуемо в данной системе. Это значит, что оно либо истинно и недоказуемо, либо ложно и доказуемо. Вторая альтернатива противоречит заданному условию, что только истинные предложения доказуемы в данной системе. Следовательно, верна первая альтернатива — это предложение истинно, но недоказуемо в данной системе. (Это предложение — транскрипция знаменитого предложения Гёделя, которое утверждает свою собственную недоказуемость.)

2. Предложение $P^\circ Q^\circ$ утверждает, что повторение Q°, то есть $Q^\circ Q^\circ$, доказуемо. Однако $Q^\circ Q^\circ$ — это сопряжение $P^\circ Q^\circ$. Значит, $P^\circ Q^\circ$ утверждает, что его сопряжение доказуемо или, другими словами, что оно само опровержимо.

3. Это предложение $Q^\circ P^\circ$. Оно утверждает, что предложение $P^\circ P^\circ$, являющееся сопряжением $Q^\circ P$, доказуемо.

4. Предложение $P^\circ P^\circ$ утверждает, что оно доказуемо.

5. Предложение X, утверждающее, что EX доказуемо, — это $P^\circ EP^\circ$, которое утверждает, что повторение EP° доказуемо. Однако повторение EP° — это $EP^\circ EP^\circ$, то есть EX.

Предложение X, утверждающее, что EX недоказуемо, — это $Q^\circ EQ^\circ$.

6. Предложение X, утверждающее, что EX^- доказуемо, — это $P^\circ EQ^\circ$.

Предложение X, утверждающее, что EX^- недоказуемо, — это $Q^\circ EP^\circ$.

7. Одно решение можно получить, взяв предложение X, которое утверждает, что доказуемо QX, а затем принять Y = QX (то есть предложение, утверждающее, что X недоказуемо). В результате получается решение:

$X = P^{\circ}QP^{\circ}$, $Y = QP^{\circ}QP^{\circ}$

Другое решение можно получить, взяв предложение Y, которое утверждает, что недоказуемо PY, а именно $Y = Q^{\circ}PQ^{\circ}$, а затем принять X = PY. В результате получается альтернативное решение:

$X = PQ^{\circ}PQ^{\circ}$, $Y = Q^{\circ}PQ^{\circ}$

В обоих решениях X утверждает, что Y доказуемо, а Y утверждает, что X недоказуемо. Следовательно, X истинно, если и только если Y доказуемо, и Y истинно, если и только если X недоказуемо. Итак, из *любых* двух предложений X,Y, находящихся в такой взаимосвязи, одно должно быть истинным, но недоказуемым в силу следующих доводов. Допустим, что X доказуемо. Тогда X истинно, и, значит, Y доказуемо, и поэтому оно истинно; значит, X недоказуемо. То есть получается противоречие. Следовательно, X не может быть доказуемым. Отсюда следует, что Y должно быть истинным. Значит, X определенно недоказуемо, а Y определено истинно. Далее, X либо истинно, либо нет. Если X истинно, то X истинно, но недоказуемо. Если X не истинно, то Y недоказуемо (так как X истинно, если и только если Y доказуемо).

В итоге X недоказуемо, а Y истинно. Если X истинно, то именно X истинно, но недоказуемо; если X ложно, то именно Y истинно, но недоказуемо.

8. Решение 1: $X = P^{\circ}QP^{\circ}$, $Y = Q^{\circ}QP^{\circ}$

Решение 2: $X = P^{\circ}PQ^{\circ}$, $Y = QQ^{\circ}PQ^{\circ}$

(Я получил эти решения, принимая за X сопряжение Y, а за Y — сопряжение X из предыдущей задачи.)

Далее X утверждает, что Y опровержимо; значит, X утверждает, что Y^{-} доказуемо; следовательно, X^{-} утверждает, что Y^{-} недоказуемо. Кроме того, Y утверждает, что X неопровержимо; значит, Y утверждает, что X^{-} недоказуемо; следовательно, Y^{-} утверждает, что X^{-} доказуемо. Тогда, согласно предыдущей задаче, заменив X на Y^{-}, а Y на X^{-}, мы получаем, что по крайней мере одно предложение из пары X^{-}, Y^{-} истинно, но недоказуемо; следовательно, одно предложение из пары X, Y ложно, но неопровержимо. (Конечно, можно доказать все это с самого начала, — и если у читателя есть какие-то сомнения, он может попытаться сделать это самостоятельно, — а мне ни к чему повторять уже проделанную работу.)

9. Можно взять предложение X, утверждающее, что доказуемо PX^{-}, а затем принять $Y = PX^{-}$. Можно также взять предложение Y, утверждающее, что доказуемо QY, а затем принять $X = PY$. В результате получаются два следующих решения:

Решение 1: $X = P^{\circ}PQ^{\circ}$, $Y = PQ^{\circ}PQ^{\circ}$

Решение 2: $X = PP^{\circ}QP^{\circ}$, $Y = P^{\circ}QP^{\circ}$

Допустим, что X истинно. Тогда Y доказуемо (как утверждается в X); значит, Y истинно; поэтому X опровержимо (как утверждается в Y), а это невозможно. Следовательно, X не может быть истинным, а должен быть ложным. Тогда Y недоказуемо (как утверждается в X), и поэтому мы теперь знаем, что X ложно, а Y недоказуемо. Если X неопровержимо, то X ложно, но неопровержимо. С другой стороны, если X опровержимо, то утверждаемое в Y истинно; значит, Y истинно, но недоказуемо. Итак, или X ложно, но неопровержимо, или Y истинно, но недоказуемо.

10. Можно просто взять сопряжения из предыдущей задачи и взаимно заменить их, получив следующие решения:

Решение 1: $X = QQ^{\circ}PQ^{\circ}$, $Y = Q^{\circ}PQ^{\circ}$

Решение 2: $X = Q^{\circ}QP^{\circ}$, $Y = QP^{\circ}QP^{\circ}$

Применяя анализ предыдущей задачи к Y^{-} и X^{-} вместо X и Y соответственно, получаем, что Y^{-} ложно, но неопровержимо, или X^{-} истинно, но недоказуемо. Это значит, что или X ложно, но неопровержимо, или Y истинно, но недоказуемо.

11. Мы приведем только одно решение, которое получается, если взять предложение X, утверждающее, что PQX доказуемо, а затем принять, что Y — это QQX, а Z — это PX. Значит, X утверждает, что Y опровержимо, Y утверждает, что QX недоказуемо, или, другими словами, что PX неопровержимо, а PX — это Z. В результате получается следующее решение:

$X = P^{\circ}PQP^{\circ}$ $Y = QQP^{\circ}PQP^{\circ}$ $Z = PP^{\circ}PQP^{\circ}$

Теперь допустим, что Z истинно. Тогда X доказуемо, и, значит, оно истинно; поэтому Y опровержимо, и, значит, оно ложно; поэтому Z опровержимо, а значит, оно ложно; и мы приходим к противоречию. Следовательно, Z не может быть истинным; оно ложно. Кроме того, X недоказуемо. Если X истинно, то X истинно, но недоказуемо. Допустим, что X ложно. Тогда Y неопровержимо. Если Y ложно, то Y ложно, но неопровержимо. Если Y истинно, то Z неопровержимо. Итак, одно из следующих утверждений должно быть истинным: (1) X истинно, но недоказуемо; (2) Y ложно, но неопровержимо; (3) Z ложно, но неопровержимо.

12. Это прямое следствие из задачи 7. Известно, что для любой системы, удовлетворяющей условиям C_1 — C_4, по меньшей мере одно из предложений $^{\circ}PQP^{\circ}$ и $^{\circ}PQP^{\circ}$ истинно, но недоказуемо в этой системе. То же самое верно для предложений $PQ^{\circ}PQ^{\circ}$ и $Q^{\circ}PQ^{\circ}$. Разумеется, наше старое резервное предложение $Q^{\circ}Q^{\circ}$истинно, но недоказуемо в данной системе. Значит, эта система содержит по меньшей мере три предложения, которые истинны, но недоказуемы в ней. (На самом деле таких предложений бесконечное множество. Например, одно из трех предложений $PPQ^\circ PPQ^\circ$, $PQ^\circ PPQ^\circ$, $Q^\circ PPQ^\circ$ должно быть истинным, но недоказуемым. Также одно из четырех предложений $PPPQ^\circ PPPQ^\circ$, $PPQ^\circ PPPQ^\circ$, $PQ^\circ PPPQ^\circ$, $Q^\circ PPPQ^\circ$ истинно, но недоказуемо и так далее.)

13. Допустим, что система регулярна. Рассмотрим позитивное предложение X. Оно имеет вид PY или $P^\circ Y$. Если PY истинно, то Y доказуемо; значит, в силу регулярности PY доказуемо. Если $P^\circ Y$ истинно, то YY доказуемо; значит, в силу регулярности $P^\circ Y$ доказуемо. Это значит, что регулярность влечет доказуемость всех истинных предложений.

Теперь наоборот допустим, что все три позитивных предложения доказуемы. Пусть доказуемо Y. Тогда PY истинно и, значит, доказуемо (согласно гипотезе). Также если YY доказуемо, то $P^\circ Y$ истинно и, значит, доказуемо (согласно гипотезе); следовательно, система регулярна.

14. Конечно, следует! Допустим, что система регулярна. Пусть X — любое ложное негативное предложение. Тогда его сопряжение X^- — истинное позитивное предложение, и, значит, оно доказуемо. Следовательно, X опровержимо.

15. Допустим, что система регулярна. Тогда, как мы показали, в этой системе все истинные позитивные предложения доказуемы, а все ложные негативные предложения опровержимы.

В задаче 7 X — позитивное предложение; значит, невозможно, чтобы X было истинно и недоказуемо; следовательно, именно Y истинно и недоказуемо. Это верно в любом из двух решений для X и Y. Следовательно, оба предложения $QP^{\circ}QP^{\circ}$ и $Q^{\circ}PQ^{\circ}$ истинны и недоказуемы в любой *регулярной* системе.

В задаче 8 Y не может быть ложным, но неопровержимым, так как Y — негативное предложение, значит, таким же должно быть и X.

В задаче 9 Y не может быть истинным и недоказуемым, так как Y — позитивное предложение; значит, именно X ложно, но неопровержимо.

В задаче 10 X не может быть ложным и неопровержимым, так как X — негативное предложение; значит, именно Y истинно, но недоказуемо.

16. Допустим, что система регулярна. Тогда $P^{\circ}X$ доказуемо, если и только если $P^{\circ}X$ истинно, что в свою очередь верно, если и только если XX доказуемо, что в свою очередь верно, если и только если PXX истинно, что в свою очередь верно, если и только если PXX доказуемо.

Проще говоря, мы знаем, что $P^{\circ}X$ истинно, если и только если PXX истинно (истинность любого из этих предложений эквивалентна доказуемости XX); но $P^{\circ}X$ и PXX — позитивные предложения, а в случае регулярных систем истина и доказуемость для позитивных предложений совпадают.

17. Если E — произвольная последовательность символов P, предложение $Q^{\circ}EQ^{\circ}$ должно быть истинным и доказуемым во *всех* регулярных системах. Прежде всего, даже для системы, не обязательно регулярной, $EQ^{\circ}EQ^{\circ}$ не может быть доказуемо, в противном случае $Q^{\circ}EQ^{\circ}$ было бы доказуемым (в силу повторных применений C_1); значит, $EQ^{\circ}EQ^{\circ}$ было бы доказуемо (в силу C_3), и получилось бы противоречие. Следовательно, $EQ^{\circ}EQ^{\circ}$ недоказуемо. Значит, и $Q^{\circ}EQ^{\circ}$ должно быть истинным. Однако если сейчас добавить допущение о том, что система регулярна, тогда, если бы $Q^{\circ}EQ^{\circ}$ было доказуемо, было бы доказуемо и $EQ^{\circ}EQ^{\circ}$, а это не так. Следовательно, $Q^{\circ}EQ^{\circ}$ недоказуемо ни в одной регулярной системе; тем не менее оно истинно во всех регулярных системах (удовлетворяющих C_1 — C_1, разумеется).

18. Поскольку в системе Волшебника есть истинное предложение X, недоказуемое в ней (например, предложение $Q^{\circ}Q^{\circ}$, как мы видели в решении задачи 1), перевод X в (M) должен быть истинным предложением в (M), которое недоказуемо в (M).

Часть V

Как такое может быть?

16
Об этом стоит подумать

Во время своего следующего визита к Волшебнику Аннабел и Александр познакомились с самым трудным парадоксом из всех тех, с которыми они сталкивались в своей жизни.

— Прежде чем изложить этот парадокс, — сказал Волшебник, — я хочу предложить вам нетрудную задачу на тему вероятности, которая порождает множество противоречивых мнений. Многие дают на нее неправильный ответ, при этом настаивают на своей правоте, и никакие доказательства не могут убедить их в том, что они ошиблись. Интересно ли это вам?

— Конечно, интересно, — в один голос ответили молодые люди.

— Задача формулируется следующим образом. Перед вами три закрытых ящика: A, B и C.

В одном из них лежит приз (причем я знаю, в каком именно), а два других пусты. Вы наугад выбираете один ящик, скажем, А. Прежде чем вы откроете его и посмотрите, есть ли в нем приз, я открываю один из двух других ящиков, например В, и показываю, что он пуст. Теперь вы можете либо оставить себе ящик, который вы уже выбрали, либо поменять его на ящик С. Увеличится ли вероятность получения приза, если поменять ящик А на ящик С, или такой обмен не имеет смысла?

После недолгого размышления Аннабел ответила:

— Обмен ящиков не имеет никакого смысла. Когда я выбираю ящик А, мои шансы найти в нем приз составляют один к трем. Но когда я вижу, что ящик В пуст, вероятность того, что приз находится в выбранном мною ящике, становится один к двум. Другими словами, мои шансы найти приз в ящике А или С равны, поэтому нет никакого резона менять один ящик на другой.

— Я полностью согласен с ней, — повторил вслед за женой Александр.

Волшебник улыбнулся.

— Именно так отвечает большинство людей, — сказал он, — но они ошибаются. Вне всякого сомнения, вам выгоднее поменять ящики. Тем самым шансы получить приз увеличиваются от одного к трем до двух к трем.

— Я ничего не понимаю! — недоуменно произнесла Аннабел. — Как такое может быть? Ведь изначально равновероятно, что приз окажется в любом из трех ящиков, не так ли?

— Разумеется, — ответил Волшебник.

— Тогда если известно, что его нет в ящике В, так же вероятно, что он лежит либо в ящике А, либо в ящике С. Разве это не очевидно?

— Нет, это не очевидно, — ответил Волшебник. — Более того, это неверно. Вы забыли, что *именно я* открывал ящик. Я ведь нарочно открыл вам пустой ящик.

— И что же из этого? — сказал Александр. — Допустим, что вы открыли ящик В и показали, что он пуст *до того*, как я выбрал ящик А. Вы хотите сказать, что в этом случае больше шансов на то, что приз лежит в ящике С, а не в В?

— Нет, — ответил Волшебник, — в этом случае шансы абсолютно равны.

— С каждой минутой вы запутываете меня все больше! — воскликнул Александр. — Давайте рассмотрим ситуацию следующим образом. Я произвольно выбираю ящик, скажем, А, Аннабел же выбирает ящик С. Тогда вы открываете ящик В и показываете, что он пуст. Согласно вашей логике, мне выгодно поменяться ящиками с Аннабел, а ей выгодно поменяться ящиками со мной. Очевидно, что это абсурд!

— Конечно, это было бы абсурдом, если бы это следовало из того, что я сказал ранее. Ты же описываешь совершенно другую ситуацию! Если ты выбираешь ящик А, твоя жена выбирает ящик С, а затем я открываю ящик В, показывая, что он пуст, тогда, разумеется, шансы найти приз в ящике А или в ящике С абсолютно равны.

— Я не вижу никакой разницы, — сказал Александр.

— Разница в том, что во втором случае, — когда каждый из вас произвольно выбирает один из ящиков, — вы лишаете меня возможности выбирать, так как остается только один ящик. В одной из трех возможных ситуаций я *не могу* открыть ящик В и показать вам, что он пуст, так как именно в этой ситуации он не пуст. Однако в первом случае, когда вы оба выбираете ящик А, у меня есть выбор открыть ящик В или ящик С и показать, что он пуст. Я заведомо уверен, что смогу показать вам пустой ящик. Независимо от того, лежит приз в ящике А или нет, один из двух оставшихся ящиков пуст. Зная, в каком ящике приз, я умышленно открываю вам пустой ящик. Показ пустого ящика не дает вам никакой дополнительной информации, так как я *всегда* могу показать вам именно пустой ящик.

Все было бы по-другому, если бы я не знал, в каком ящике приз. Если бы я наугад открыл ящик В и он оказался пустым, вероятность того, что приз лежит в ящике С, увеличилась бы с 1/3 до 1/2, и не было бы никакого смысла менять выбранный вами ящик на ящик C. Другими словами, предположим, что вы выбрали ящик A, а затем бросаете монету, чтобы определить, какой из ящиков — B или C — открывать. Если выпадает орел, открываете B, если решка — C. Монета брошена, и выпадает орел. Значит, надо открыть ящик B. Теперь обратите особое внимание на следующее! *До* открытия ящика B существует реальная возможность того, что приз лежит именно в нем; фактически шансы один к трем, что приз в этом ящике. Затем ящик открывается и оказывается пустым. В результате вы действительно получаете дополнительную информацию, и шансы найти приз в ящике A или в ящике C уравниваются. Однако вместо бросания монеты *я сам* мог выбрать, какой ящик открыть. Зная, где лежит приз, я мог безошибочно выбрать пустой ящик. Если бы приз был в ящике B, я открыл бы не его, а ящик C. Поэтому моя демонстрация пустого ящика не дает вам вообще никакой полезной информации.

Правильное рассуждение о заданной ситуации выглядит следующим образом. Когда вы выбрали ящик A, вероятность того, что в нем лежит приз, равна один к трем. Затем я умышленно открываю пустой ящик и показываю, что он пуст. Вы не получаете вообще никакой дополнительной информации, влияющей на вероятность нахождения приза в ящике А, — эта вероятность остается один к трем. Однако вы получаете информацию о ящике С, — вероятность того, что приз находится в нем, становится два к трем, а ранее она была один к трем. Поэтому, несомненно, есть резон поменять ящики.

— Кажется, я начинаю понимать, о чем вы говорите, — сказала Аннабел, — но, честно признаться, не уверена в этом. Мне нужно еще подумать.

— Может быть, вам поможет следующая иллюстрация моей мысли, — сказал Волшебник. — Предположим, что вместо трех ящиков я предлагаю вам сто, и только в одном из них лежит приз. Вы наугад выбираете один из ящиков. Теперь вероятность того, что приз находится в нем, равна 1 к 100, не так ли?

— Конечно, — согласились молодые люди.

— Хорошо, — сказал Волшебник. — Тогда остается девяносто девять ящиков, и я знаю, в каком из них лежит приз. Я по собственному выбору открываю девяносто восемь ящиков и показываю, что они пусты. Вы действительно считаете, что после этого ваши шансы на то, что приз находится в выбранном вами ящике возрастут от 1 к 100 до 1 к 2?

— Это хорошая иллюстрация проблемы, — сказала Аннабел, — и все-таки мне нужно еще подумать.

Обсуждение. Разумеется, Волшебник прав, но на удивление большое число людей невозможно в этом убедить. Я уверен, что некоторые читатели этой книги никогда не согласятся с Волшебником. Большинство согласится, но обязательно найдутся те, которые не согласятся. С теми, кто не согласен с аргументом Волшебника, я хотел бы сыграть пару дюжин игр, используя сто ящиков, по ставке десять к одному. Очень скоро они остались бы без штанов!

Парадокс конверта

— Теперь я изложу вам очень трудный парадокс, который многократно обсуждался в течение нескольких последних лет, — сказал Волшебник.

На столе лежат два конверта. Вам говорят, что в одном из них вдвое больше денег, чем в другом. Вы выбираете один из конвертов и открываете его. Допустим, что вы находите там 100 долларов. У вас есть возможность оставить конверт себе или обменять его на второй. Во втором конверте с равной вероятностью может оказаться как 200 долларов, так и 50. Следовательно, ваши шансы выиграть и проиграть при обмене конвертов равны. Поэтому вам есть резон пойти на обмен конвертов.

— Все это выглядит абсолютно логично, — заметила Аннабел. Александр согласился с ней.

— Однако далее начинаются курьезы, — сказал Волшебник. — До того как вы откроете конверт, вы знаете, что рассуждение по поводу обмена будет одним и тем же, независимо от того, какую сумму вы обнаружите, открыв первый конверт. Значит, разумно поменять выбранный вами конверт на другой немедленно, даже не открывая его. Действительно, пусть n — сумма денег в конверте, который вы уже взяли. Тогда во втором конверте с равной вероятностью может быть либо n/2, либо 2n долларов, поэтому вам выгоднее обменять ваш конверт на второй. Однако если бы вы первоначально выбрали конверт, лежащий сейчас на столе, в силу такого же рассуждения вам было бы выгодно обменять его на тот, который у вас в руках. Ясно, что получается абсурд! В этом и заключается парадокс.

Молодые люди задумались на некоторое время.

— Я понимаю абсурдность ситуации, — наконец сказала Аннабел, — но я не могу найти ошибку в рассуждении. В чем она заключается?

— Честно говоря, мне до сих пор неизвестен абсолютно удовлетворительный ответ на твой вопрос, — сказал Волшебник. Я излагал эту проблему многим экспертам по теории вероятности. Одни из них были так же озадачены, как и я, а другие давали объяснения, говоря, что на бесконечном множестве целых положительных чисел не может быть меры вероятности. Однако я подозреваю, что суть парадокса не связана с вероятностью. У меня есть своя версия этого парадокса, в которой вероятность вообще не фигурирует.

— Неужели? — удивилась Аннабел.

— Моя версия выглядит следующим образом. Вы выбираете один из конвертов и решаете обменять его на другой, оставшийся на столе. При обмене вы либо выиграете, либо проиграете. Теперь я докажу два противоречащих друг другу предложения.

Предложение 1. Сумма денег, которую вы выиграете (если вы действительно выиграете при обмене), больше суммы, которую вы проиграете, если вы действительно проиграете.

Предложение 2. Выигранная и проигранная суммы равны.

Очевидно, что эти предложения не могут быть одновременно истинными. Тем не менее я докажу, что каждое из них истинно.

Доказательство первого предложения по существу совпадает с тем, которое я вам уже изложил. Пусть n — сумма денег в конверте, который вы взяли. Тогда во втором конверте лежит либо 2n, либо n/2 долларов.

— С равной вероятностью, — сказал Александр.

— Вероятность здесь ни при чем, парировал Волшебник. — Я хочу вообще исключить ее из рассуждений. Сейчас важно то, что во втором конверте лежит либо 2n, либо n/2 долларов, но мы не знаем, какая именно из этих сумм.

— Хорошо, — сказал Александр.

— Выиграв при обмене, вы выигрываете n долларов, а проиграв, проигрываете n/2 долларов. Поскольку n больше, чем n/2, при выигрыше вы выигрываете больше (n), чем проигрываете при проигрыше (n/2). Тем самым предложение 1 доказано.

Теперь докажем предложение 2. Пусть d — разница между суммами денег, лежащих в двух конвертах, или, что то же самое, пусть d — меньшая из двух сумм. Выиграв при обмене, вы выигрываете d долларов, а проиграв, проигрываете d долларов. Значит, выигранная и проигранная суммы равны. Например, пусть в одном из конвертов лежит 50 долларов, тогда в другом — 100. Выигрыш при обмене означает, что вы держали в руках конверт с меньшей суммой и выиграли 50 долларов. Проигрыш при обмене означает, что вы держали в руках конверт со 100 долларами и проиграли тоже 50. Итак, 50 долларов — это сумма и выигрыша и проигрыша. Такое же доказательство верно и тогда, когда d — меньшая из сумм, лежащих в конвертах. Суммы выигрыша и проигрыша выражаются одним и тем же числом d. Тем самым доказано предложение 2. Суммы выигрыша и проигрыша равны.

Так какое же из этих предложений истинно? Ведь очевидно, что они не могут быть истинными одновременно?

Эпилог. Могу сообщить читателю, что Аннабел со своим мужем так и не смогли прийти к согласию по этой проблеме. Аннабел была абсолютно уверена, что истинно предложение 1, а Александр был в такой же степени уверен, что истинно предложение 2.

— Как ты можешь говорить такое? — вопрошала Аннабел. — Допустим, что ты открыл выбранный конверт и нашел там 100 долларов. Тогда ты знаешь, что во втором конверте лежит либо 50, либо 200 долларов. Значит, выиграв при обмене, ты выигрываешь 100, а проиграв, проигрываешь только 50. Разве не очевидно, что возможный выигрыш больше возможного проигрыша? Разве не очевидно, что 100 долларов больше, чем 50? Какие у тебя могут быть сомнения в этом?

— Ты рассуждаешь о проблеме неправильно, — настаивал на своем Александр. — В одном конверте лежит n, а в другом 2n долларов для некоторого неизвестного нам n. Выиграв при обмене, ты получаешь не n, а 2n долларов, то есть выигрываешь n долларов, а проиграв, получаешь не 2n, а n долларов, то есть проигрываешь тоже n долларов. Ясно, что это одна и та же сумма.

Молодые люди так и не пришли к общему мнению. Какое из предложений считаете истинным *вы*, 1 или 2?

17
О времени и изменении

Когда молодые люди в следующий раз поднялись в башню Волшебника, они нашли хозяина в особом философском расположении духа. Он проводил утро за чтением древнегреческих и древнекитайских философских трактатов.

— Время действительно странная штука, — сказал он. — Некоторые мистики заявили, что время нереально, и иногда я склонен согласиться с ними!

— Понятно, — сказал Александр. — *Время от времени* вы соглашаетесь с ними, а иногда не согласны, не так ли?

— Примерно так, — засмеялся Волшебник. — Что же касается времени, я должен прочитать вам прелестный отрывок из работы древнекитайского философа Чан Ци:

«Было начало. Было время до этого начала. И было время до того времени, которое было до этого начала. Было бытие, и было небытие. Было время до этого небытия. И было время до того времени, которое было до этого небытия.

Иногда есть бытие, и есть небытие, но я не знаю, какое бытие и небытие является реальным бытием или реальным небытием. Я только что сказал что-то, но я не знаю, говорит ли на самом деле что-нибудь сказанное мной или же не говорит ничего»*.

Молодые люди от души посмеялись над услышанным, особенно над последним предложением.

— Я вспомнил также рецепт бессмертия Смаллиана, — сказал Волшебник. — Известен ли он вам?

— Нет, — ответил Александр. — Я должен услышать такой рецепт!

— Он очень прост. Чтобы быть бессмертным, достаточно сделать следующее. (1) Всегда говорите правду; никогда впредь не произносите ложных высказываний. (2) Немедленно скажите: «Я повторю это высказывание завтра». Если вы это сделаете, я гарантирую, что вы будете бессмертны!

Конечно, Волшебник был прав. Если сегодня вы правдиво скажете: «Я повторю это предложение завтра», то завтра вы его повторите. Если вы останетесь правдивым завтра, то повторите это предложение на следующий день,

* *Wing-Tsit Chan*, A Source Book in Chinese Philosophy (Princeton, N. J.: Princeton University Press, 1963), pp. 185, 186.

затем повторите на следующий день, затем на следующий день...

— Теоретически это прекрасный план, — сказала Аннабел, — но это вряд ли самый *практичный* план в мире!

— Он напоминает мне предложенный Белым Конем план перелезания через калитку, — заметил Александр.

— Что это за план? — спросил Волшебник (который, видимо, не читал «Алису в стране чудес» и «Алису в Зазеркалье»).

— Как объяснял Белый Конь, — сказал Александр, — единственная трудность связана с ногами — *голова* уже находится достаточно высоко. Поэтому вы сначала размещаете голову поверх калитки, тогда голова — на достаточной высоте; затем вы встаете на голову, тогда, видите ли, ноги — на достаточной высоте; вот вы и перелезли, видите ли.

— Очень хорошо! — засмеялся Волшебник. — Что же касается возражения Аннабел против рецепта Смаллиана как непрактичного плана, то Смаллиан изложил свой план в очень занимательном рассказе о человеке, искавшем бессмертие и посетившем на Востоке великого мудреца, который, как говорили, был экспертом по этому предмету. Мудрец объяснил, как стать бессмертным, но человек возражал, как и Аннабел, на том основании, что план непрактичен. Он сказал мудрецу: «Как я могу правдиво сказать, что я повторю это предложение завтра, если я даже не знаю, буду ли я завтра жив?» «О, — ответил мудрец, — ты хотел *практического* решения! Нет, я не очень силен в практике; я работаю только в теории».

Аннабел и Александр расхохотались, услышав этот рассказ.

— Говоря о бессмертии, — продолжал Волшебник, — я вспоминаю, что когда я был мальчиком, мой дядя (который живо интересовался всеми логическими и философскими темами) привел мне замечательное доказательство того, что логически невозможно, чтобы человек умер. Хотите услышать это доказательство?

— О, да! — одновременно воскликнули молодые люди.

— Мой дядя излагал это следующим образом. Если человек умирает, то когда он умирает? Он умирает, когда жив, или когда он мертв? Он не может умереть, когда он мертв, потому что, однажды умерев, он не может больше умирать: он уже мертв. Однако он не может умереть и тогда, когда он еще жив, потому что тогда он был бы живым и мертвым одновременно, что невозможно. Следовательно, он вообще не может умереть.

— Я сказала бы, — произнесла Аннабел, немного подумав, — что в момент, когда человек умирает, он ни жив, ни мертв. Это момент перехода между жизнью и смертью.

— Это выглядит разумным, — сказал Александр.

— Нет, возразил Волшебник, — так легко вы не отделаетесь! Для меня «мертв» означает, что человек уже не жив. Фактически во избежание любой семантической путаницы, можно сформулировать аргумент иначе: жив или не жив человек в момент своей смерти?

Молодые люди задумались на некоторое время.

— Все это связано с доказательствами невозможности движения, предложенные Зеноном?

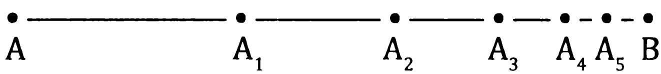
— Некоторая сьязь есть, — ответил Волшебник. — Фактически аргумент моего дяди можно обобщить, получив новое доказательство невозможности движения.

— Что это за доказательства Зенона? — спросил Александр. — Я слышал *о* них, но никогда не слышал их.

— Я их читала, — сказала Аннабел, — но никогда не могла понять, в чем заключаются ошибки. Там *должны* быть ошибки, так как очевидно, что объекты *действительно* движутся. Так в чем же заключаются ошибки?

— У Зенона было три доказательства, — ответил Волшебник. — Есть и четвертое доказательство, но оно плохо изложено, и, кажется, нет единого понимания того, в чем же оно заключается. Поэтому я ограничусь первыми тремя доказательствами.

Первое доказательство. Допустим, что объект движется от точки A к точке B. Прежде чем достичь B, он должен достичь некоторой точки A_1, расположенной посередине между A и B. Назовем это *первым* шагом. По завершении первого шага тело должно перейти из точки A_1 в точку A_2, находящуюся посередине между A_1 и B. Назовем это *вторым* шагом. Затем объект должен сделать третий шаг: перейти от A_2 к точке A_3, находящейся посередине между A_2 и B, и так далее.



Ни за какое конечное число шагов объект не достигнет B; то есть для любого целого положительного числа n, достигнув точки A_n по завершении шага n, объект должен будет сделать еще один шаг, чтобы перейти в точку A_{n+1}, находящуюся посередине между A_n и B. Значит, объект должен сделать бесконечное число шагов, чтобы достичь B, а поскольку это невозможно сделать за конечный промежуток времени, объект не может переместиться из A в B.

Можно рассуждать и по-другому. Прежде чем попасть из A в B, сначала объект должен достичь точки B_1 посередине между A и B; но прежде чем попасть в B_1, он должен достичь точки B_2 посередине между A и B_1; прежде чем сделать *это*, он должен достичь точки B_3 посередине между A и B_2; и так далее. Следовательно, объект не может даже начать движение!

Во втором доказательстве Зенона речь идет об Ахиллесе, пытающемся догнать черепаху. Для начала скажем, что Ахиллес находится в 100 ярдах позади черепахи и бежит в сто раз быстрее нее. Его первый шаг — добежать до той точки, в которой сейчас находится черепаха, то есть пробежать 100 ярдов. Когда он достигнет этой точки, черепахи там уже не будет; она продвинется на десять ярдов вперед. Тогда Ахиллес предпринимает второй шаг: пробегает 10 ярдов до той точки, в которой черепаха была при завершении его первого шага. Однако когда он достигнет этой точки, черепаха пробежит (или, точнее, проползет) еще 1 ярд. Когда же Ахиллес пробежит этот ярд, черепаха все же будет на 1/10 ярда впереди и так далее. Другими словами, когда Ахиллес достигает точки, в которой черепаха была, ее там уже нет. Следовательно, Ахиллес никогда не сможет догнать черепаху.

Третье доказательство Зенона поражает меня как наиболее сложное. Это рассуждение о летящей стреле. Допустим, что стрела непрерывно летит в течение определенного промежутка времени. Возьмем любое мгновение этого временного интервала. Невозможно, чтобы стрела двигалась *на протяжении этого мгновения*, так как мгновение имеет *нулевую* длительность, и стрела не может находиться одновременно в двух разных местах. Следовательно, в каждое мгновение времени стрела неподвижна, и, значит, она неподвижна на протяжении всего интервала, а это значит, что она не может двигаться в течение этого интервала времени!

— Да, я помню эти парадоксы, — сказала Аннабел. — Сейчас вы напомнили мне о них еще раз, и я озадачена больше, чем когда-либо. Несомненно, что в них *что-то* должно быть неправильным, поскольку объекты *действительно* движутся; но в чем именно заключена ошибка? Объяснение не относится к логике? Или же что-то не так именно с логикой?

— Нет, с самой логикой все в порядке, — засмеялся Волшебник, — и есть чисто логическое объяснение ошибок в доказательствах Зенона. Меня действительно удивляет то, что люди одурачены первыми двумя доказательствами, а вот с третьим не все так просто, поскольку его намного труднее понять.

— Так в чем же заключаются ошибки? — спросил Александр.

— Давайте начнем с первого доказательства, — ответил Волшебник. — В любом доказательстве, приводящем к ложному заключению, где-то должен быть неправильный шаг, и значит, должен быть *первый* неправильный шаг. Итак, где первый неправильный шаг в первом доказательстве Зенона?

— Я не вижу в нем ни одного ложного шага, — сказал Александр. — Все шаги кажутся мне корректными.

— Мне тоже, — добавила Аннабел.

— Да бросьте вы! Даже заключение кажется вам правильным?

— Конечно, нет! — согласилась Аннабел. — Заключение ложно. Ведь очевидно, что объекты *действительно* движутся.

— Тогда, если заключение ложно, а каждый предшествующий ему шаг корректен, ясно, что первым неправильным шагом является само заключение.

— Я никогда об этом не думала! — сказала Аннабел.

— Многие не думали, и это удивительно! — сказал Волшебник. — Конечно же, заключение является здесь первым ложным утверждением! Любой объект должен пройти через бесконечное число шагов, которые описывает Зенон, но отсюда никак нельзя сделать заключение: «Следовательно, объект не может двигаться». Где гарантии для такого вывода? Зенон молчаливо предполагает, что невозможно сделать бесконечное число шагов за конечный отрезок времени, и эта посылка полностью лишена каких-либо оснований.

— Это допущение кажется мне вполне разумным! — сказала Аннабел. — Как может сумма бесконечного числа величин быть конечной?

— Такое постоянно случается в математике, — ответил Волшебник. — Например, бесконечный ряд $1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + 1/32 + \ldots + 1/2^n + \ldots$ при суммировании дает 2. Такой ряд называется *сходящимся*; он сходится к 2. Бесконечный ряд $1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 + \ldots + 1/n + \ldots$ называется *расходящимся* рядом. Возьмите достаточное число его элементов, — и вы получите больше миллиона; возьмите еще больше элементов, — и вы получите больше триллиона. Какое бы число, сколь угодно большое, вы ни выбрали, данный ряд в конечном счете превышает это число. Говорят, что такой расходящийся ряд стремится к бесконечности. Однако ряд, относящийся к первой проблеме Зенона, $1/2 + 1/4 + 1/8 + \ldots$ сходится к 1, и поэтому Зенон совершенно неоправданно делает заключение, что объект никогда не может попасть из А в В. Похожий анализ применим и ко второму доказательству Зенона. Фактически здесь фигурирует ряд $1/10 + 1/100 + + 1/1000 + \ldots + 1/10^n + \ldots$ который сходится еще быстрее, чем в ряд в первом аргументе.

Третье доказательство по поводу летящей стрелы является более тонким, и я опасаюсь, что вы не достаточно знаете математику, чтобы в нем разобраться. Те, кто изучил исчисление, знает, что в любой момент времени в пределах интервала стрела *находится* в движении и что Зенон ошибался, говоря, что если бы стрела двигалась в данное мгновение, то в это мгновение она находилась бы более чем в одном месте. Конечно, в каждый данный момент времени стрела находится только в одном месте, но из этого *не* следует, что в этот момент стрела находится в состоянии покоя.

— Я не понимаю, — сказала Аннабел. — Если движущаяся стрела находится только в одном месте в данный момент, то чем она отличается от покоящейся стрелы, которая в каждый момент времени тоже находится только в одном месте? Как можно объяснить разницу между этими двумя случаями?

— Ты задаешь великий и мудрый вопрос, — ответил Волшебник, — цель дифференциального исчисления — или по крайней мере одна из его основных целей — ответить на вопрос именно такого рода. Авторы этого исчисления, Ньютон и Лейбниц, впервые в истории человечества дали абсолютно точное определение, что для объекта означает быть в движении *в какой-то момент времени* и что означает утверждение о скорости тела *в какой-то момент времени*. Я не могу дать эти определения, предварительно не ознакомив вас с некоторыми фундаментальными понятиями этого исчисления. Сейчас достаточно сказать, что утверждение о том, что тело имеет определенную скорость *в какой-то момент времени* — это на самом деле утверждение не о самом данном мгновении, а о последовательно уменьшающихся временных интервалах, концентрирующихся в этом мгновении. Надеюсь, что когда-нибудь я смогу дать вам более точное техническое описание того, о чем идет речь.

— Раньше вы говорили, — заметил Александр, — что аргумент вашего дяди можно обобщить, чтобы получить еще одно доказательство невозможности движения. Как это?

— Обобщив аргумент моего дяди, можно доказать, что ничто и никогда не может измениться, — это, конечно, очень понравилось бы философу Пармениду! Допустим, что нечто изменяется: находится в одном состоянии, — назовем его состоянием А, — а затем выходит из этого состояния. В какой момент времени оно может измениться? Оно не может измениться, когда оно вне состояния А, потому что оно уже вышло из этого состояния. Оно не может измениться и тогда, когда еще находится в состоянии А, ибо тогда оно оказалось бы одновременно и в состоянии А и вне состояния А. И не говорите мне, что в момент изменения оно не пребывает ни в состоянии А, ни вне состояния А! Для меня *вне состояния А* означает *не в состоянии А*, и логически невозможно, чтобы нечто пребывало ни в состоянии А, ни не в состоянии А одновременно.

— В чем же здесь еще одно доказательство невозможности движения? — спросил Александр.

— Очевидно, что если объект покидает определенное место, он изменяет свое состояние нахождения в данном месте на ненахождение в данном месте. Значит, если невозможен переход от одного состояния к другому, то и движение невозможно...

— Да, время и изменение — курьезные вещи! — продолжил Волшебник. — Что же такое время, на самом деле? Как сказал Августин: «Когда меня спрашивают, что такое время, я не знаю; когда не спрашивают, я знаю!» Кстати о времени, как я понимаю, вы оба покидаете нас на некоторое время?

— Да, — ответила Аннабел, — завтра мы отплываем домой. Моя сестра, принцесса Гертруда, выходит замуж.

— На какой срок вы уезжаете? — спросил Волшебник.

— Возможно, на несколько месяцев, — ответила Аннабел. — У нас с Александром есть дома дела. Но мы намерены обязательно вернуться.

Мы даже подумываем о переезде сюда, так как оба заинтригованы предметом логики. Кажется, дома мало об этом знают. Вы не представляете, как мы благодарны за все то, чему вы нас научили! Вы расскажете нам что-нибудь о бесконечности, когда мы вернемся? Именно эта тема всегда занимала и озадачивала меня!

— О, да! — сказал Волшебник. — Бесконечность — это действительно предмет! Когда вы вернетесь, я обещаю организовать для вас путешествие по бесконечности. Возвращайтесь скорее, и счастливого вам пути!

Часть VI

Путешествие в бесконечность

18

Что такое бесконечность?

Наша молодая пара отсутствовала более двух месяцев. Вернувшись на остров, они сразу отправились к Волшебнику.

— С возвращением! — сказал Волшебник. — Так вы хотите узнать что-нибудь о бесконечности?

— У вас хорошая память, — ответила Аннабел.

— Ну и хорошо, — не стал возражать Волшебник. — Первое, что нам нужно сделать, — это тщательно определить наши термины. Что именно вы понимаете под словом «бесконечное»?

— Для меня оно означает отсутствие конца, — сказал Александр.

— Я бы сказала то же самое, — подтвердила Аннабел.

— Это не вполне удовлетворительно, — сказал Волшебник. — У круга нет ни начала, ни конца, и все же вы не сказали бы, что он бесконечен: он имеет лишь конечную длину, хотя и содержит бесконечное множество точек.

Я хочу говорить о бесконечности в точном смысле, используемом математиками. Конечно, этому слову есть и другие применения. Например, теологи часто ссылаются на бесконечность Бога, хотя некоторые из них достаточно честны, чтобы признать, что по отношению к Богу это слово применяется не в таком смысле, как к чему-то другому. Я не хочу третировать теологическое или любое другое нематематическое применение этого слова, но я хочу ясно дать понять, что предмет нашего обсуждения — бесконечность в чисто *математическом* смысле этого термина. И для него нам необходимо точное определение.

Очевидно, что слово «бесконечное» является прилагательным, и прежде всего мы должны договориться о том, к какому сорту объектов оно применимо. Какого рода объекты можно считать конечными или бесконечными? При математическом применении термина такими объектами являются *множества*, или совокупности объектов, которые могут быть *конечны-*

ми или *бесконечными*. Мы говорим, что *множество* объектов имеет конечное или бесконечное число членов, и теперь нужно сделать эти понятия точными.

Ключевую роль здесь играет понятие одно-однозначного соответствия между двумя множествами. Например, два множества — стадо из семи овец и роща из семи деревьев — связаны между собой так, как ни одно из них не связано с грудой из пяти камней, потому что множество из семи овец и множество из семи деревьев можно соединить по парам (например, привязав к каждому дереву по овце) так, что каждая овца и каждое дерево будут принадлежать в точности одной паре. В математической терминологии это значит, что множество из семи овец можно поставить в 1-1-значное соответствие с множеством из семи деревьев.

Другой пример. Допустим, что, попав в театральный зал, вы видите, что все места заняты, никто не стоит и никто не сидит ни у кого на коленях, на каждом месте сидит один и только один человек. Тогда, не считая число людей или число мест, вы знаете, что эти числа равны, так как множество людей находится в 1-1-значном соответствии с множеством мест: каждый человек соответствует месту, которое он занимает.

Я знаю, что вы знакомы с множеством натуральных чисел, хотя можете и не знать, что оно так называется. Натуральные числа — это числа 0, 1, 2, 3, 4... То есть натуральное число — это ноль или любое целое положительное число.

— А *ненатуральное* число существует? — спросила Аннабел.

— Нет, о таком я никогда не слышал, — усмехнулся Волшебник, — и, должен признаться, нахожу твой вопрос очень забавным. Как бы то ни было, с этого момента я буду использовать слово *число* в смысле *натуральное число*, если не оговаривается что-то обратное.

Если дано натуральное число n, то что значит утверждение, что определенное множество имеет в точности n элементов? Например, что значит утверждение о том, что на моей правой руке в точности пять пальцев? Это значит, что я могу установить 1-1-значное соответствие между множеством пальцев моей правой руки с множеством целых положительных чисел от 1 до 5, считая, что большой палец соответствует 1, указательный — 2, средний — 3, безымянный — 4 и мизинец — 5. В общем случае для любого целого положительного числа n множество содержит (в точности) n элементов, если можно установить 1-1-значное соответствие между этим множеством и множеством целых положительных чисел от 1 до n. Множество, содержащее n элементов, называют также *n-элементным множеством*. Процесс установления 1-1-значного соответствия между n-элементным множеством и множеством целых положительных чисел имеет общераспространенное название — *счет*. Да, именно в этом и заключается сущность счета.

Итак, я объяснил вам, что означает для множества иметь n элементов, где n — целое положительное число. А что, если n = 0? Что означает для множества иметь 0 элементов? Очевидно, что это значит, что множество вообще не имеет элементов.

— Такие множества существуют? — спросил Александр.

— Есть только одно такое множество, — ответил Волшебник. — Оно называется *пустым множеством* и является в высшей степени полезным для математиков. Без него постоянно пришлось бы делать исключения, и все стало бы очень громоздким. Например, мы хотим говорить о множестве людей в театре в данный момент. Может случиться, что в этот момент времени в театре вообще нет людей, и в таком случае мы говорим, что множество находящихся в театре людей пусто — точно так же, как говорим о пустом театре. Его нельзя путать с театром вообще! Театр продолжает существовать как театр; просто в нем может не быть ни одного человека. Точно так же, пустое множество существует как множество, но у него нет элементов.

Я вспоминаю чудесный случай. Много лет назад я рассказал о пустом множестве милой леди-музыканту. Она удивилась и спросила: «Математики действительно применяют это понятие?» Я ответил: «Конечно применяют». Она спросила: «Где?» «Везде», — ответил я. Она задумалась ненадолго и сказала: «О, да. Я полагаю, это похоже на музыкальные паузы». Я думаю, это была очень хорошая аналогия!

Один забавный случай связан со Смаллианом. Когда он был студентом Принстонского университета, один из известных математиков во время лекции сказал, что ненавидит пустое множество. В следующей своей лекции он использовал пустое множество. Смаллиан поднял руку и сказал: «Я думал, вы сказали, что не любите пустое множество». «Я сказал, что не люблю пустое множество, — ответил профессор. — Я никогда не говорил, что не *использую* пустое множество!»

— Вы еще не сказали нам, что вы понимаете под «конечным» и «бесконечным», — сказала Аннабел. — Вы собираетесь объяснять?

— Именно к этому я и подхожу, — ответил Волшебник. — Все, что я сказал вам прежде, ведет к определению этих терминов. Множество *конечно*, если существует такое натуральное число n, что данное множество содержит в точности n элементов, а это, как мы помним, значит, что данное множество можно поставить в 1-1-значное соответствие с целыми положительными числами от 1 до n. Если такого натурального числа n не существует, то множество называется бесконечным. Это очень просто. Таким образом, 0-элементное множество конечно, 1-элементное множество конечно, 2-элементное множество конечно ... и n-элементное множество конечно, где n — любое натуральное число. Но если для любого натурального числа n ложно, что множество содержит в точности n элементов, то это множество бесконечно. Значит, если множество бесконечно, то для любого натурального числа n, если удалить из данного множества n элементов, в нем еще останутся элементы — фактически еще останется бесконечное число элементов.

— Вы понимаете, почему сказанное верно? Давайте сначала рассмотрим простую задачу. Допустим, я удалил один элемент из бесконечного множества. То, что осталось, обязательно будет бесконечным?

— Кажется, что так! — сказала Аннабел.

— Именно так! — подтвердил Александр.

— Хорошо, вы правы, но можете ли вы это доказать?

Молодые люди задумались, но доказательство вышло трудным для них. Все казалось слишком очевидным, чтобы требовать доказательства. Однако это легко доказать из самих определений терминов «конечное» и «бесконечное». Данные определения необходимо применить для этого.

1

Как же это доказать?

Волшебнику пришлось немного подтолкнуть молодых людей к нужному решению, но, в конце концов, они нашли доказательство, которое его устроило.

Отель Гильберта

— Бесконечные множества, — сказал Волшебник, — обладают некоторыми странными свойствами, которые иногда называют парадоксальными. На самом деле они не парадоксальны, просто слегка поражают при первом знакомстве с ними. Это хорошо иллюстрирует известный рассказ об отеле Гильберта.

Возьмем обычный отель, в котором конечное число номеров, скажем, сто. Допустим, что все номера заняты и в каждом из них один жилец. Приезжает новый человек и хочет снять номер на ночь, но ни он, ни один из жильцов отеля не желает делить свой номер с другим человеком. Тогда невозможно разместить в отеле нового приезжего, так как невозможно установить 1-1-значное соответствие между 101 человеком и 100 комнатами. Однако с бесконечным отелем (если вы можете представить себе такой) ситуация другая. В отеле Гильберта бесконечное число комнат: по одной на каждое целое положительное число. Комнаты пронумерованы последовательно: номер 1, номер 2, номер 3… номер n… и так далее. Можно представить себе, что номера отеля расположены в линейном порядке: они начинаются в определенной точке и продолжаются вправо до бесконечности. Есть первый номер, но нет последнего! Важно помнить, что нет именно последнего номера, точно так же, как нет последнего натурального числа. Далее опять предполагается, что все номера заняты: в каждом номере по одному человеку. Появляется новый приезжий и хочет снять номер. Интересно, что теперь его можно разместить в отеле. Ни он, ни один из жильцов отеля не желает делить свой номер с другим человеком, но каждый жилец отеля согласен поменять свой номер на другой, если его об этом попросят.

2

Как разместить в отеле нового жильца?

— Теперь перейдем к другой задаче, — продолжил Волшебник после обсуждения решения предыдущей задачи. — Рассмотрим тот же отель. Однако теперь вместо одного человека приезжает бесконечное число новых гостей: по одному на каждое целое положительное число n. Назовем старых жильцов отеля P_1, P_2... P_n... а новых приезжих Q_1 , Q_2... Q_n... Все Q-персоны желают, чтобы их разместили в отеле. Необычно то, что это возможно!

3

Как это сделать?

А теперь рассмотрим еще более интересную задачу. Возьмем бесконечное число отелей: по одному на каждое целое положительное число. Отели расположены на прямоугольной площади:

Отель 1	1	2	3	4	5	6	7	...
Отель 2	1	2	3	4	5	6	7	...
Отель 3	1	2	3	4	5	6	7	...
.	.							
.	.							
.	.							
Отель *n*	1	2	3	4	5	6	7	...
.	.							
.	.							
.	.							

Вся цепь отелей управляется одной администрацией. Все номера во всех отелях заняты. Однажды в целях экономии энергии администрация решает закрыть все отели, кроме одного. Однако для этого нужно разместить всех жильцов всех отелей в единственном отеле — по одному жильцу в одном номере.

4

Возможно ли это?

— Вы видите, что открывают нам эти задачи, — продолжал Волшебник. — Они показывают, что бесконечное множество имеет странное свойство: его можно поставить в 1-1-значное соответствие с его собственной частью. Давайте определим это более точно.

Множество A называется *подмножеством* множества B, если каждый элемент A является элементом B. Например, если A — множество чисел от 1 до 100, B — множество чисел от 1 до 200, то A есть подмножество B. Если E — множество четных чисел, а N — множество всех чисел, то E есть подмножество N. Подмножество A множества B называется *собственным* подмножеством B, если A есть подмножество B, но не содержит *все* элементы B. Другими словами, A есть собственное подмножество B, если A есть подмножество B, но B не является подмножеством A. Пусть P — это множество всех целых положительных чисел {1, 2, 3... n...}, P- — это множество всех целых положительных чисел без единицы {2, 3... n...}. В первой задаче про отель Гильберта мы видели, что между P и P- можно установить 1-1-значное соответствие, и все же P- является *собственным* подмножеством P! Да, бесконечное множество может иметь странное свойство: его можно поставить в 1-1-значное соответствие со своим *собственным* подмножеством! Это было известно давно. В 1638 г. Галилей показал, что *квадраты целых положительных чисел* можно поставить в 1-1-значное соответствие с самими этими числами.

$$\begin{array}{cccccccc} 1, & 4, & 9, & 16, & 25 & \dots & n^2 & \dots \\ \Updownarrow & \Updownarrow & \Updownarrow & \Updownarrow & \Updownarrow & & \Updownarrow & \\ 1, & 2, & 3, & 4, & 5 & \dots & n & \dots \end{array}$$

Казалось, это противоречит древней аксиоме о том, что целое больше любой из его частей.

— А разве нет? — спросил Александр.

— На самом деле противоречия нет, — ответил Волшебник. — Допустим, что A есть собственное подмножество B. Тогда в одном из смыслов слова «больше» — B больше A, а именно в том смысле, что B содержит все элементы A и еще те элементы, которых нет в A. Однако это не значит, что B *численно* превосходит A.

— Кажется, я не поняла, — сказала Аннабел. — Что вы имеете в виду под термином «численно превосходит»?

— Хороший вопрос! — сказал Волшебник. — Прежде всего, что, по вашему мнению, я имею в виду, говоря, что A имеет *ту же самую величину*, что и B?

— Я полагаю, это значит, что между A и B можно установить 1-1-значное соответствие, — ответила Аннабел.

— Правильно! А что, по вашему мнению, я имею в виду, говоря, что A по величине меньше B, или что число элементов A меньше числа элементов B?

— Я полагаю, это значит, что можно установить 1-1-значное соответствие между A и собственным подмножеством B.

— Неплохая попытка, — одобрил Волшебник, — но эта версия не подходит. Такое определение прекрасно подошло бы для конечных множеств. Беда в том, что в некоторых случаях можно установить 1-1-значное соответствие между A и собственным подмножеством B, а также можно установить 1-1-значное соответствие между B и собственным подмножеством A. В таком случае вы сможете сказать, что каждое из этих множеств меньше другого? Например, пусть O — множество нечетных чисел, а E — множество четных чисел. Очевидно, что между O и E можно установить 1-1-значное соответствие.

$$\begin{array}{cccccccc} 1, & 3, & 5, & 7, & 9 & \dots & 2n\text{-}1 & \dots \\ \Updownarrow & \Updownarrow & \Updownarrow & \Updownarrow & \Updownarrow & & \Updownarrow & \\ 2, & 4, & 6, & 8, & 10 & \dots & 2n & \dots \end{array}$$

Однако можно также установить 1-1-значное соответствие между O и *собственным* подмножеством E.

$$\begin{array}{cccccccc} 1, & 3, & 5, & 7, & 9 & \dots & 2n\text{-}1 & \dots \\ \Updownarrow & \Updownarrow & \Updownarrow & \Updownarrow & \Updownarrow & & \Updownarrow & \\ 4, & 6, & 8, & 10, & 12 & \dots & 2n+2 & \dots \end{array}$$

можно также установить 1-1-значное соответствие между E и собственным подмножеством O.

$$\begin{array}{cccccccc} 2, & 4, & 6, & 8, & 10 & \dots & 2n & \dots \\ \Updownarrow & \Updownarrow & \Updownarrow & \Updownarrow & \Updownarrow & & \Updownarrow & \\ 3, & 5, & 7, & 9, & 11 & \dots & 2n+1 & \dots \end{array}$$

Теперь вы, конечно, не скажете, что O и E имеют одну и ту же величину, и все же O меньше, чем E, а E меньше, чем O! Нет, такое определение не работает.

— Тогда какое же определение отношения «...меньше, чем...» подходит для множеств? — спросила Аннабел.

Корректное определение формулируется так. А *меньше, чем* В, или В *больше, чем* А, если выполняются следующие условия: (1) можно установить 1-1-значное соответствие между А и собственным подмножеством В; (2) невозможно установить 1-1-значное соответствие между А и всем множеством В.

Чтобы правильно сказать, что А меньше В, необходимо, чтобы выполнялись *оба* эти условия. Утверждение о том, что А меньше В, означает прежде всего что можно установить 1-1-значное соответствие между А и подмножеством В, а также, что *любое* 1-1-значное соответствие между А и подмножеством В не исчерпывает всех элементов В.

А сейчас возникает фундаментальный вопрос. Любые два бесконечных множества имеют одну и ту же величину, или есть бесконечные множества разной величины? Это первый вопрос, на который нужно ответить при построении теории бесконечности, и, к счастью, на него ответил Георг Кантор в конце позапрошлого века. Ответ вызвал бурю и породил целое новое направление в математике, ветви которого просто фантастичны!

Я сообщу вам ответ Кантора при следующей встрече. Пока что подумайте сами, в чем состоял этот ответ. Одинаковы ли по величине все бесконечные множества, или среди них есть разные?

Замечание. Я задавал этот вопрос студентам своего начального логического курса. Из тех, кто не знал ответа, примерно половина считала, что все бесконечные множества одинаковы по величине, а остальные думали иначе.

Тем, кто еще не знает ответа, предлагаю отважиться на самостоятельный его поиск, прежде чем переходить к следующей главе.

Решения

1. Сначала покажем, что при добавлении одного элемента к конечному множеству получается конечное множество. Допустим, что множество A конечно. По определению это значит, что для некоторого натурального числа n множество A имеет n элементов. Если добавить к A еще один элемент, получится множество, имеющее n+1 элементов, которое по определению конечно.

Из этого немедленно следует, что в результате удаления элемента из бесконечного множества B, должно получиться бесконечное множество, ибо, если бы оно было конечным, то, вернув удаленный элемент, мы получили бы исходное множество B, которое было бы конечным, а по условию оно бесконечно.

2. Администрации отеля нужно всего лишь попросить каждого из постояльцев переместиться на один номер вправо. Другими словами, обитатель номера 1 переходит в номер 2, обитатель номера 2 переходит в номер 3... обитатель номера n переходит в номер n+1. Поскольку в этом отеле нет последней комнаты (в отличие от более нормальных конечных отелей), ни один из постояльцев не окажется на улице. (В конечном отеле обитатель последнего номера оказался бы без места.) После такого перемещения номер 1 освобождается, и вновь прибывший может занять его.

Математически в данном случае нужно установить 1-1-значное соответствие между множеством всех целых положительных чисел с множеством целых положительных чисел, начинающимся с 2. Конечно, менеджер отеля мог бы поступить так же с сотней миллионов новых гостей, если бы они прибыли одновременно. Он просто попросил бы каждого постояльца переместиться на сто миллионов и одну комнату вправо (жилец номера 1 перешел бы в номер 100000001, жилец номера 2 — в номер 100000002 и так далее). Для любого натурального числа n отель мог принять n новых постояльцев, переместив обитателя каждого номера на n номеров вправо и тем самым освободив n первых номеров для новых гостей.

3. Если приезжает бесконечное множество новых гостей Q_1 , Q_2... Q_n... нужно действовать немного иначе. Одно из ложных решений состоит в следующем. Менеджер просит каждого из старых постояльцев переместиться на один номер вправо и вселяет одного из приезжих в пустой номер 1. Затем он опять просит каждого переместиться на один номер вправо и вселяет второго гостя в свободный номер 2. Затем эта процедура повторяется снова и снова бесконечное число раз, и раньше или позже все новые гости вселяются в отель.

Ох, какое же хлопотное это решение! Ни один человек не занимает номер постоянно, и всех гостей невозможно разместить ни за какой конечный отрезок времени: требуется бесконечное число перемещений. Нет, все можно уладить с помощью единственного перемещения. Можете сказать какого?

Это перемещение состоит в том, что каждый из старых постояльцев удваивает номер своей комнаты, то есть обитатель номера 1 переходит в номер 2, обитатель номера 2 переходит в номер 4, обитатель номера 3 переходит в номер 6... обитатель номера n переходит в номер 2n. Разумеется, все это делается одновременно, и после такого перемещения все четные номера заняты, а бесконечное число нечетных номеров свободно. Итак, первый новый гость Q_1 идет в номер 1, Q_2 идет в номер 3, Q_3 — в номер 5 и так далее (Q_n идет в номер 2n-1).

4. Сначала «пронумеруем» всех постояльцев всех номеров во всех отелях в соответствии со следующим планом:

1		4		9		16	...
⇩		⇧		⇧		⇧	
2	⇨	3		8	⇨	15	...
				⇧		⇧	
5	⇨	6	⇨	7		14	...
						⇧	
10	⇨	11	⇨	12	⇨	13	...

.
.
.

Итак, каждый постоялец «помечен» целым положительным числом. Затем всех просят выйти из номеров и немного подождать на улице. После этого администрация закрывает все отели, кроме одного, и просит каждого из гостей занять тот номер отеля, который был ему предназначен: постоялец с номером n идет в номер n.

19
Фундаментальное открытие Кантора

— Подумали ли вы о том, на чем мы остановились в прошлый раз? — спросил Волшебник при следующей встрече. — Есть ли у вас какие-нибудь соображения по поводу существования более чем одной бесконечности?

Один из двух молодых людей (не помню, кто) утверждал одно, а второй — другое.

— Курьез в том, — сказал Волшебник, — что Кантор сначала считал, что любые два бесконечных множества должны иметь одну и ту же величину, и, насколько я понимаю, двенадцать лет пытался доказать это предположение. На тринадцатом году он нашел контрпример, который мне нравится называть «Кантор-примером». Да, существует более одной бесконечности, — фактически их бесконечно много. Это базисное открытие принадлежит Кантору.

Вот, что делал Кантор. Множество называется *счетно-бесконечным* (короче — *счетным*), если его можно поставить в 1-1-значное соответствие с множеством целых положительных чисел. Значит, Кантора интересовал вопрос: является ли любое бесконечное множество счетным? Как я уже сказал, сначала он предполагал, что любое бесконечное множество счетно, и только позже открыл истину. В начале своих исследований он рассматривал множества, которые казались слишком большими, чтобы быть счетными, но потом он находил способ их перечисления.

— Что вы имеете в виду под *перечислением* множества? — спросила Аннабел.

— *Перечислить* множество означает поставить его в 1-1-значное соответствие с множеством целых положительных чисел. Фактически слово «перечислимое» употребляется как синоним слова «счетное». Как бы то ни было, Кантор, как я сказал, рассматривал одно за другим множества, которые, на первый взгляд, казались несчетными — то есть бесконечными, но не счетными, — и находил умный способ их перечисления.

Для иллюстрации его метода представьте себе, что я -- Дьявол, а вы — мои жертвы в аду. Это не очень трудно вообразить, не так ли?

Аннабел и Александр рассмеялись.

— Теперь, — продолжал Волшебник, — я предлагаю вам тест. Я говорю: «Я задумал целое положительное число и записал его на этом согнутом пополам листе бумаги. Каждый день вы можете один и только один раз отгадывать, какое это число. Когда вы его отгадаете, вы можете быть свободны, но не раньше того». Существует ли стратегия, с помощью которой вы можете раньше или позже обрести свободу?

— Конечно, — ответил Александр. — В первый день я назову 1, во второй день — 2 и так далее. Раньше или позже я обязательно угадаю ваше число.

— Верно, — сказал Волшебник. — Следующий мой тест чуточку сложнее. Теперь я загадал или целое положительное, или целое отрицательное число, то есть я записал одно из чисел 1, 2, 3, 4... или одно из чисел -1, -2, -3, -4... и опять каждый день вы можете отгадывать только один раз. Теперь у вас есть стратегия освобождения?

— Разумеется, — сказала Аннабел. — В первый день я назову 1, на следующий день назову -1, а затем продолжу 2, -2, 3 -3, 4, -4... и так далее. Раньше или позже я должна угадать ваше число.

— Правильно, — сказал Волшебник, — и вы понимаете, что это значит. На поверхностный взгляд, множество всех положительных и отрицательных чисел, вместе взятых, должно превосходить по величине множество одних положительных чисел по крайней мере в два раза. И все же вы только что видели, что между этими множествами можно установить 1-1-значное соответствие и поэтому они на самом деле имеют одинаковую величину. Множество всех положительных и отрицательных чисел, вместе взятых, счетно. Задача, которую вы только что решили, по существу совпадает со второй задачей об отеле Гильберта. Как вы помните, там было счетное число людей в счетном множестве комнат, затем появилось второе счетное число людей, и требовалось объединить эти два множества и разместить по номерам все их элементы.

Следующий тест, который я предлагаю своим жертвам, намного труднее. Теперь я записал на листе бумаги *два* числа, а может быть, записал одно и то же число дважды. Например, я мог написать 3 и 57, или 17 и 206, или 23 и 23. Каждый день вы можете только один раз угадывать, какие это числа. Не разрешается в один день угадывать одно число, а в другой — второе; оба числа нужно угадать в один день. Есть ли стратегия, которая наверняка позволит вам раньше или позже обрести свободу?

— Я в этом сомневаюсь, — сказала Аннабел. — Существует бесконечное число возможностей для первого числа, и с каждой из них связано бесконечное число возможностей для второго числа; поэтому кажется, что бесконечность, взятая бесконечное число раз, должна быть больше исходной бесконечности.

— Так может *казаться*, — сказал Волшебник. — Многим во времена Кантора именно так и казалось, но видимость порой бывает обманчива. Да, стратегия, позволяющая обрести свободу, существует. Помимо всего прочего, множество возможностей, с которым вы имеете дело, на самом деле является счетным. Вы можете найти нужную стратегию?

— Поразительно! — воскликнул Александр, и Аннабел согласилась с ним.

Объединив свои интеллектуальные усилия, молодые люди нашли простую и эффективную стратегию.

1

Какая стратегия подходит?

Допустим, я немного усложняю задачу, требуя, чтобы вы не просто угадали оба числа, но и сказали, в каком порядке они записаны: скажем, одно из них записано слева от другого. В этом случае вы можете наверняка рассчитывать на свободу?

— Конечно, — сказала Аннабел, — эта легкая задача после того, как решена предыдущая.

2

Каково же ее решение?

— Теперь позвольте мне спросить вас вот о чем, — сказал Волшебник. — Что вы скажете о множестве положительных дробей? Оно счетное или нет? У вас сейчас хорошие шансы ответить на такой вопрос. Под *положительной дробью* я понимаю просто делимое двух целых положительных чисел, например, 3/7 или 21/13.

3

Является ли множество положительных дробей счетным?

— Ответ на этот вопрос был шокирующим для многих математиков времен Кантора, — сказал Волшебник. — А сейчас у меня есть для вас более трудная задача. Я записал некоторое *конечное* множество целых положительных чисел и при этом не говорю вам, сколько чисел в этом множестве и какое в нем самое большое число. Ежедневно вы можете один и только один раз угадывать, какое это множество. Как только угадаете — вы свободны. В этом случае, по вашему мнению, можно найти метод освобождения?

Молодым людям показалось, что это невозможно.

— Такой метод *есть,* — объявил Волшебник, — множество всех *конечных* множеств целых положительных чисел является счетным.

4

Как перечислить множество всех конечных множеств целых положительных чисел? Какую стратегию вы применили бы для своего освобождения?

— А как насчет множества *всех* множеств целых положительных чисел — всех бесконечных и всех конечных множеств таких чисел? — спросила Аннабел. — Оно счетное или нет? Или ответ на этот вопрос неизвестен?

— О! — сказал Волшебник. — Это множество является несчетным, — вот в чем заключается великое открытие Кантора!

— И никто до сих пор не нашел способа пересчета этого множества? — спросил Александр.

— Никто не нашел, и никто никогда не найдет, так как пересчитать это множество логически невозможно.

— Откуда это известно? — спросила Аннабел.

— Ну давайте начнем вот с чего. Представьте себе книгу со счетным числом страниц: стр.1, стр.2, стр.3... стр.n... На каждой странице дано описание множества целых положительных чисел. Эта книга принадлежит вам. Если в вашей книге есть описание *каждого* множества целых положительных чисел, то вы получаете высшую награду. Но уверяю вас, награду эту вы получить не можете, потому что я могу сформулировать такое описание множества целых положительных чисел, которого не может быть на страницах вашей книги.

5

Дайте такое описание множества целых положительных чисел, которого заведомо не может быть ни на одной странице упомянутой книги.

— Итак, вы видите, — сказал Волшебник, объяснив решение задачи, — что множество всех множеств целых положительных чисел является несчетным. Оно больше множества целых положительных чисел.

— Вы не показали нам такое множество, — сказала Аннабел. — Вы показали множество всех множеств целых положительных чисел. У него есть свое имя?

— Да, — ответил Волшебник. — Для любого множества A множество всех подмножеств A называется *мощность-множеством* (мощностью) A и обозначается P(A). Можно использовать N для обозначения множества целых положительных чисел, и тогда множество всех подмножеств N, то есть множество всех множеств целых положительных чисел, суть мощность-множество N и обозначается P(N).

— Хорошо, — сказала Аннабел, — как бы то ни было, вы, конечно, доказали, что P(N) невозможно поставить в 1-1-значное соответствие с N, и, разумеется, множество P(N) бесконечно, но из этого неправомерно заключать, что P(N) *больше*, чем N; значит, вы не доказали, что между N и некоторым *подмножеством* P(N) можно установить 1-1-значное соответствие. Не будете ли вы любезны сделать это, чтобы завершить свое доказательство?

— А мы уже установили 1-1-значное соответствие между N и подмножеством множества P(N), — ответил Волшебник.

6

Когда же это было сделано?

После того как Волшебник напомнил Аннабел задачу 4, кто-то из молодых людей (запамятовал: Аннабел или Александр) задал вопрос: «Мы поняли, что множество всех *конечных* множеств целых положительных чисел счетно; значит, его элементы можно пронумеровать некоторой бесконечной последовательностью S_1 , S_2, S_n... Разве в этом нет парадокса?

7

Есть ли в этом парадокс?

— У меня еще есть вопрос, — сказал Александр, когда был найден ответ на предыдущую головоломку. — Мы знаем, что множество всех *конечных* множеств целых положительных чисел бесконечно. А что с множеством всех *бесконечных* множеств целых положительных чисел? Оно счетное или нет?

8

Ответьте на вопрос Александра.

— Еще один вопрос, — сказала Аннабел. — Мы поняли, что P(N) больше, чем N. Есть ли множество, которое больше множества P(N)?

— Ну конечно же есть, — ответил Волшебник. — То, что P(N) больше, чем N, — лишь частный случай теоремы Кантора.

Теорема С (Теорема Кантора). Для *любого* множества A множество P(A) всех подмножеств множества A больше, чем A.

Доказательство теоремы Кантора несущественно отличается от доказательства представленного вам мною отдельного случая, когда A — это множество целых положительных чисел N. Лежащую в основе этого доказательства идею хорошо проиллюстрировал Смаллиан в следующей задаче. В некоторой вселенной каждое множество ее обитателей объединено в один клуб. Регистратор этой вселенной хотел бы назвать каждый клуб именем местного жителя, но так, чтобы никакие два клуба не были названы одним именем, и для каждого местного жителя нашелся бы клуб, названный его именем. Человеку не обязательно быть членом именно того клуба, который назван его именем. Ясно, что для вселенной с конечным числом обитателей такая процедура невозможна, поскольку в этом случае клубов больше, чем людей (если n число жителей, то число клубов — 2^n). Однако в этой вселенной число жителей бесконечно, и регистратор не видит, по какой причине его замысел невозможно осуществить. Между тем ни одна из схем действий до сих пор не принесла результата: всегда остаются лишние клубы без имени. Почему замысел регистратора неосуществим?

8

Объясните, почему желание регистратора невыполнимо и какое это имеет отношение к теореме Кантора.

— Из теоремы Кантора следует, — подытожил Волшебник, когда Аннабел и Александр поняли предыдущее доказательство, — что должно быть бесконечное число бесконечностей различной величины. Ведь можно начать с множества всех целых положительных чисел N, и тогда его мощность-множество P(N) — множество всех подмножеств N — будет больше, чем N. Однако по теореме Кантора мощность-множество *этого* множества — то есть P(P(N)) — больше, чем P(N), а значит, P(P(P(N))) больше, чем P(P(N)) и так далее. Следовательно, для *любого* множества существует большее множество, и получается, что величины множеств бесконечны.

Решения

1. Для любого n существует только конечное число возможностей для формирования пары, в которой большее число равно n; фактически таких возможностей в точности n. Значит, возможна всего одна пара, в которой большее число равно 1, а именно (1, 1). Возможны всего две пары, в которых большее число равно 2, а именно: (1, 2) и (2, 2). Следовательно, возможны всего три пары, в которых большее число равно 3, а именно: (1, 3) и (2, 3) и (3, 3) и так далее. Поэтому мы нумеруем их в следующем порядке: (1, 1), (1, 2), (2, 2), (1, 3), (2, 3), (3, 3), (1, 4), (2, 4), (3, 4), (4, 4)... (1, n), (2, n)... (n-1, n), (n, n)...

2. В этом случае для освобождения может понадобиться ровно вдвое больше времени, чем в предыдущем. Но раньше или позже это можно сделать, нумеруя упорядоченные пары в следующем порядке: (1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (1, 3), (2, 3), (3, 3), (3, 2), (3, 1)... (1, n), (2, n)... (n-1, n), (n, n), (n, n-1)... (n, 2), (n, 1), (1, n+1)...

3. Эта задача отличается от предыдущей задачи только тем, что одно число стоит не слева от другого числа, а *над* ним (в виде числителя дроби). Значит, можно пронумеровать положительные дроби в следующем порядке: 1/1, ½, 2/2, 1/3, 2/3, 3/3, 3/,2, 3/1, ¼, 2/4, ¾, 4/4, 4/3, 4/2, 4/1 и т.д. Разумеется, цели можно достигнуть немного раньше, пропуская дубликаты, такие как 2/2 и 3/3 (что на самом деле равно 1/1), и 2/4 (что на самом деле равно 1/2).

4. Множество, содержащее элементы a_1, a_2... a_n, записано как {a_1, a_2... a_n}. Есть только одно множество, наибольший элемент которого равен 1, а именно {1}. Есть только два множества, наибольший элемент которых равен 2, а именно, {1, 2} и {2}. Есть только четыре множества, наибольший элемент которых равен 3, а именно, {3}, {1, 3} {2, 3} и {1, 2, 3}. В общем случае для любого целого положительного числа n, существует 2^{n-1} множеств, наибольший элемент которых равен n. Основание для такого утверждения следующее. Для любого n существует 2^n подмножеств множества целых положительных чисел от 1 до n (включая пустое множество!). Значит, любое множество, наибольший элемент которого равен n, состоит из некоторого подмножества целых положительных чисел от 1 до n-1, а таких подмножеств именно 2^{n-1}.

Как бы то ни было, важно то, для любого n существует лишь *конечное* число множеств целых положительных чисел, наибольший элемент которых равен n. Итак, я сначала именую пустое множество. Затем я именую множество, наибольший элемент которого равен 1. После этого я фиксирую множества, наибольший элемент которых равен 2 (порядок здесь не имеет значения), затем множества, наибольший элемент которых равен 3 и так далее.

5. Для любого данного числа n либо n принадлежит к множеству, записанному на странице n, либо не принадлежит. Пусть S — множество всех таких чисел n, что n *не* принадлежит к множеству, записанному на странице n. Для каждого n пусть S_n — множество, записанное на странице n. Наше определение таково, что для любого n множество S должно отличаться от S_n, так как n принадлежит S, если и только если n *не* принадлежит S_n. Это значит, что n входит в S, но не входит в S_n, либо n не входит в S, а входит в S_n. В любом случае S должно отличаться от S_n, так как одно из этих множеств содержит n, а другое — нет.

Для конкретизации идеи построения множества S предположим, что на первых десяти страницах записаны следующие множества:

Страница 1 — множество всех четных чисел

Страница 2 — множество всех (целых положительных) чисел

Страница 3 — пустое множество

Страница 4- множество всех чисел, которые больше 100

Страница 5 — множество всех чисел, которые меньше 58

Страница 6 — множество всех простых чисел

Страница 7 — множество всех чисел, не являющихся простыми

Страница 8 — множество всех чисел, которые делятся на 4

Страница 9 — множество всех чисел, которые делятся на 7

Страница 10 — множество всех чисел, которые делятся на 5

Здесь я перечислил первые десять множеств наугад. Как же будет выглядеть S, если рассматриваются первые десять чисел? Начинаем с 1. Должно ли S содержать 1? Является ли 1 элементом множества, записанного на странице 1, то есть является ли 1 четным числом? Нет, и, значит, 1 не принадлежит множеству S_1; поэтому мы включаем 1 в S. Как насчет 2? Конечно 2 входит в множество S_2 (2 — целое положительное число), поэтому мы *не* включаем 2 в множество S. Разумеется, число 3 не входит в S_3 (в пустом множестве нет чисел), поэтому мы включаем 3 в S. Число 4 не входит в S_4 (4 не больше 100), поэтому мы включаем 4 в S. Предоставляем читателю проверку остальных шести случаев: 5 не входит в S, так как 5 входит в S_5; 6 входит в S, так как 6 не входит в S_6 (6 не является простым числом); 7 не входит в S_6, значит, 7 входит в S; 8 входит в S_8, значит, 8 не входит в S; 9 не входит в S_9, значит, 9 входит в S; 10 входит в S_{10} (10 делится на 5), значит, 10 не входит в S. Перечисляя таким способом элементы множества S, давайте поставим число n на n-е место, если оно входит в S и поставим пробел на n-ом месте, если n точно не входит в S. Тогда первые десять мест нашего списка будут выглядеть так: 1, , 3, 4, , 6, 7, , 9, ... Теперь мы видим, что S отличается от S_1, так как S содержит 1, а S_1 нет. S отличается и от S_2, так как оно *не* содержит 2, а S_2 содержит это число. Итак, вы видите, что для любого n либо S содержит n и S_n не содержит n, либо S не содержит n и S_n содержит n; значит, S не может быть равным S_n. Таким образом, S отличается от каждого из множеств, записанных в книге.

Конечно, для данного доказательства не нужна никакая книга. Все дело в том, что для *любого* перечисления S_1, S_2... S_n... множеств целых положительных чисел, существует множество S целых положительных чисел, отличающееся от каждой из S_n -ок, а именно — множество всех таких n, что n не принадлежит S_n. Таким образом, бесконечная последовательность S_1, S_2... S_n... не может включить в себя *каждое* множество целых положительных чисел, так как множество S из нее исключено. Следовательно, множество всех множеств целых положительных чисел несчетно.

6. В задаче 4 мы показали, что множество всех *конечных* подмножеств N счетно, и, значит, можно установить 1-1-значное соответствие между N и множеством всех конечных подмножеств N. Очевидно, что множество F всех конечных подмножеств множества N является подмножеством множества *всех* подмножеств множества N; значит, F является подмножеством множества $P(N)$, и между N и F можно установить 1-1-значное соответствие.

7. Конечно нет! Несомненно, что S отличается от любого конечного множества S_n, но этот факт означает лишь то, что S не является конечным.

8. Мы знаем, что множество всех конечных множеств целых положительных чисел счетно; значит, его элементы можно пересчитать в некоторой бесконечной последовательности F_1, F_2... F_n... То есть каждому n можно поставить в соответствие некоторое конечное множество целых положительных чисел F_n, и это соответствие таково, что каждое конечное множество целых положительных чисел является тем или иным F_n. Теперь предположим, что множество всех *бесконечных* множеств целых положительных чисел счетно. Тогда его элементы можно пересчитать в некоторой бесконечной последовательности I_1, I_2... I_n... где для любого n, I_n есть бесконечное множество, соответствующее целому положительному числу n. Однако в таком случае можно пересчитать *все* множества целых положительных чисел — конечные и бесконечные — в последовательности F_1, I_1, F_2, I_2... F_n, I_n... а это противоречит тому факту, что множество всех множеств целых положительных чисел несчетно.

9. Предположим, что схема регистратора выполнима. Тогда противоречие получается следующим образом. Назовем обитателя вселенной *светским*, если он член клуба, названного его именем, и *несветским*, если он не член этого клуба. Поскольку в этой вселенной каждое множество обитателей является клубом, множество всех несветских обитателей тоже является клубом, который называется чьим-то именем, скажем *Джон*. Значит, каждый член клуба «Джон» является несветским человеком, и каждый несветский человек — член клуба «Джон». Является Джон светским человеком или нет? В любом случае мы приходим к противоречию. Допустим, что Джон — светский человек. Это значит, что Джон является членом клуба «Джон»; но в клуб входят только несветские люди, значит, Джон не может быть его членом. Теперь допустим, что Джон — несветский человек. Поскольку каждый несветский человек является членом клуба «Джон», сам Джон, будучи несветским человеком, должен входить в этот клуб, что делает Джона светским человеком. Итак, независимо от того, является Джон светским человеком или нет, получается противоречие. Следовательно, схема регистратора не выполнима.

Связь этой задачи с теоремой Кантора очевидна — задача представляет собой частный случай этой теоремы. Вместо универсума людей рассмотрим произвольное множество A. Допустим, что есть 1-1-соответствие между A и множеством P(A) всех подмножеств множества A. Тогда возникает следующее противоречие. Каждый элемент x множества A соответствует одному и только одному подмножеству множества A, которое можно назвать x–множеством. Теперь пусть S — множество всех таких элементов x множества A, что x *не* входит в x–множество. (Применительно к данной задаче, S — множество всех несветских обитателей.) Этому множеству S соответствует некоторый элемент b множества A, и поэтому b-множество есть множество всех x, имеющих свойство не принадлежать x-множеству. Если b принадлежит b-множеству, то b является одним из элементов, обладающих свойством не принадлежать b-множеству. Получается противоречие. Если b не принадлежит b-множеству, то b обладает свойством не принадлежать b-множеству; но каждый обладающий таким свойством элемент принадлежит b-множеству, и, значит, b должен принадлежать b-множеству. Опять получается противоречие. Тем самым доказано, что между множеством A и его мощностью P(A) нет 1-1-соответствия.

Конечно, 1-1-соответствие между A и некоторым *подмножеством* множества P(A) можно установить следующим образом. Для каждого элемента x {x} означает множество, единственным элементом которого является x. (Такое множество {x} называется *единичным* множеством или *синглетоном*. Оно содержит единственный элемент, независимо от того, сколько элементов входит в само x.) Тогда можно допустить, что каждый элемент множества x соответствует синглетону {x}. Очевидно, что это соответствие 1-1-значное, и, конечно, {x} является подмножеством множества A (поскольку каждый элемент множества {x}, в котором он только один — сам x, — является элементом множества A). Следовательно, A находится в 1-1-значном соответствии с множеством, состоящим из *некоторых* элементов множества P(A).

Поскольку можно установить 1-1-соответствие между A и некоторым подмножеством множества P(A), и, как мы показали, невозможно установить такое соответствие между A и всем множеством P(A), по определению P(A) больше, чем A. Теорема Кантора доказана.

20
Однако возникают некоторые парадоксы!

— Что-то все время не дает мне покоя, — сказал Александр во время следующего визита к Волшебнику. — Кантор доказал, что для любого множества A, существует множество, которое больше A, а именно — P(A). Не правда ли?

— Да, — подтвердил Волшебник.

— Хорошо, — сказал Александр, — допустим, что A есть множество *всех* множеств. Тогда, согласно теореме Кантора, существует множество, которое больше A; но как может быть множество, которое больше множества всех множеств? Мощность множества A – множество P(A) — является подмножеством множества A, так как A содержит *все* множества. Тогда как подмножество множества A может быть больше самого A? Я действительно не понимаю!

— О, ты заново открыл знаменитый парадокс, который сам Кантор обнаружил в 1897 г., — сказал Волшебник. — Позднее Бертран Рассел предложил упрощенный вариант парадокса Кантора, известный как *парадокс Рассела*. Для каждого множества x либо x является элементом самого себя, либо нет. Например, множество стульев не является стулом, поэтому ни одно множество стульев не является элементом самого себя. Однако множество всех постижимых человеческим разумом вещей является чем-то таким, что постижимо человеческим разумом; поэтому очевидно, что оно является элементом самого себя. Множества, не являющиеся элементами самих себя, называются *ординарными*, а множества, не являющиеся элементами самих себя, называются *неординарными*. Существуют ли в действительности неординарные множества — открытый вопрос, но ординарные множества действительно существуют. Почти все множества, с которыми мы сталкиваемся, являются ординарными. Значит, каждое ординарное множество является элементом B, и каждый элемент В является ординарным: в В нет неординарных множеств. Является В элементом самого себя или нет? В любом случае возникает противоречие. Допустим, что В является элементом самого себя. Тогда, поскольку элементами В являются только ординарные множества, В должно быть одним из ординарных множеств; но поскольку В является элементом самого себя, оно должно быть экстраординарным. Получается противоречие. Значит, допущение о том, что В экстраординарно, ведет к противоречию. Теперь допустим, что В ординарно. Поскольку все ординарные множества принадлежат В, само В будучи ординарным должно принадлежать В, что делает его экстраординарным (поскольку В принадлежит самому себе). Значит, допущение о том, что В ординарно, тоже ведет к противоречию. Это знаменитый парадокс Рассела. Это упрощенный вариант парадокса Кантора, в котором нет понятия *величины* множества. Возможные решения парадоксов Кантора и Рассела мы обсудим позже.

В 1919 г. Рассел популяризовал этот парадокс в словах о парикмахере одной деревни, который бреет тех и только тех жителей данной деревни, которые не бреются сами. Значит, парикмахер не бреет ни одного жителя деревни, который бреется сам, и любой, кто сам не бреется, брит этим парикмахером. Бреет он себя или нет? Если да, то он бреет того (а именно себя), кто бреется сам, нарушая условие, согласно которому он никогда не бреет того, кто бреется сам. Если нет, то он один из жителей деревни, которые не бреются сами; но он должен брить всех таких жителей, и, следовательно, себя тоже. Опять получается противоречие. Так бреется он сам или нет? Как вы решите этот парадокс?

— Возможно, этот парикмахер — женщина, — предположила Аннабел.

— Это не помогает, — сказал Волшебник. — Я не говорил, что парикмахер бреет всех *мужчин* в деревне, которые не бреются сами, а сказал, что он бреет всех *жителей* деревни, которые не бреются сами.

— В чем же тогда состоит решение? — спросила Аннабел.

— Это мы обсудим позже, — сказал Волшебник. — Сначала я хотел бы предложить вам некоторые варианты этого парадокса.

Есть парадокс Манноури о стране, в которой каждый муниципалитет должен иметь главу и ни один человек не возглавляет сразу два муниципалитета. Глава может быть или не быть лицом, постоянно проживающим в том муниципалитете, который он возглавляет. Для лиц, не проживающих постоянно в тех муниципалитетах, которые они возглавляют, законом учрежден отдельный муниципалитет Аркадия; и по закону в нем должно проживать каждое такое лицо. Аркадия, как и любой другой муниципалитет, должна иметь главу. Должен ли глава Аркадии постоянно проживать в Аркадии или нет?

Известна древняя дилемма крокодила. Один крокодил украл ребенка. Он обещал вернуть ребенка отцу, если и только если тот выскажет правильное предположение о том, вернет крокодил ребенка или нет. Что делать крокодилу, если отец скажет, что крокодил не вернет ребенка?

Я помню также парадоксальную ситуацию, в которую попал логик Смаллиан, когда однажды его перехитрил студент. В своих вводных логических курсах Смаллиан любил иллюстрировать существенную для доказательства Гёделя идею следующим образом. Он клал две монеты — пенни и четверть доллара — на стол и говорил студенту: «Вы должны произнести высказывание. Если оно истинно, я отдам вам одну из этих монет, но сейчас не скажу какую именно. Если же высказывание ложно, то вы не получите ничего». Задача состоит в том, чтобы найти высказывание, которое заставило бы Смаллиана отдать четверть доллара (конечно при условии, что он держит свое слово).

1

Тот, кому эта задача неизвестна, пусть попытается найти нужное высказывание. (Решение приведено ниже.)

2

После того как Аннабел с Александром решили задачу 1, Волшебник сказал:

— Умный студент произнес высказывание, которое лишило Смаллиана возможности сдержать свое слово. Что это за высказывание?

Решение задач 1 и 2

1. Подходит высказывание: «Вы не отдадите мне пенни». Если оно ложно, — ложно, что я не отдам вам пенни, — то это значит, что *на самом деле* я отдам вам пенни. Однако в таком случае я отдам вам пенни за ложное высказывание, чего я обещал не делать. Значит, это высказывание не может быть ложным; оно должно быть истинным. Его истинность означает, что я действительно не отдам вам пенни. Однако за истинное высказывание я должен отдать одну из монет. Следовательно, у меня нет иного выбора, кроме как отдать вам четверть доллара.

У читателя может возникнуть вопрос о том, как это связано с теоремой Гёделя. Смаллиан вообразил, что четверть доллара представляют собой истину, а пенни — доказуемость. Тогда утверждение «Вы не отдадите мне пенни» или «Вам не отдадут пенни» соответствует геделевскому предложению «А недоказуемо».

2. Высказывание, лишающее Смаллиана возможности сдержать свое слово: «Вы не отдадите мне ни одну из монет». Что бы я ни делал, я буду вынужден нарушить свое слово. (К счастью, эта история недостоверна! В действительности со мной такого никогда не случалось! Не понимаю, как такое могло прийти в голову Волшебнику, но я согласен, что история хороша.)

— Я знаю другой забавный случай со Смаллианом, — сказал Волшебник.

— Кажется, что у вас какая-то сверхъестественная связь с этим оригиналом Смаллианом, — заметила Аннабел. — Вы много раз упоминали его. Знакомы ли вы с ним лично?

— Нет, мы никогда не встречались. В некотором смысле, мы живем в разных реальностях. У меня есть основание полагать, что он считает, что я на самом деле не существую, — что я всего лишь вымышленный персонаж. Я полагаю, что он считает, что вы двое тоже не существуете. Насколько же глупым может быть человек!

— Может быть, сам Смаллиан реально не существует, — предположил Александр.

— Я тоже над этим размышлял, — сказал Волшебник. — Тогда истории, которые я читал о нем, — всего лишь легенды. Будь то легенда или правда, но я слышал, что однажды Смаллиан читал выпускникам университета курс по аксиоматической теории множеств. На середине одной из его лекций вошла студентка, извинилась за опоздание и спросила, может ли она получить экземпляр записи лекции. Смаллиан ответил: «Вы можете получить такой экземпляр, если только вы хорошая». «Что значит — быть хорошим человеком?» — спросила студентка. «Это значит не знать, что значит быть хорошим», — ответил Смаллиан, вызвав общий смех*.

— Забавно, — отметила Аннабел, — так как, согласно данному Смаллианом определению «хорошего», стоит человеку услышать это определение, и он никогда не сможет быть хорошим, так как он знает, что значит «хороший»: это значит не знать, что значит «хороший».

— Я в этом не уверен, — сказал Волшебник. — Как можно *знать*, что означает «хороший», не зная, что значит «хороший»? Это кажется мне противоречием. Как бы то ни было, вернемся к нашим парадоксам. Предлагаю вам ответить на следующие вопросы:

---

* Эта история действительно правдива. Но я не понимаю, как же Волшебник, который, как я *настаиваю*, является вымышленным персонажем, узнал о ней! Как несуществующая личность может разузнать что-то? — *Р. С.*

1. Парикмахер бреет самого себя или нет?

2. Глава Аркадии живет в Аркадии или нет?

3. Что делать крокодилу, когда ему скажут, что он не вернет ребенка?

4. Как освободиться от парадокса Кантора и парадокса Рассела?

3

Прежде чем читать дальше, попробуйте ответить на эти четыре вопроса.

Объяснения Волшебника.

— Я не могу справиться даже с первым вопросом, — сказала Аннабел. — Я не понимаю, как парикмахер может брить или не брить себя без противоречия, и в то же время он должен делать либо одно, либо другое. Я не знаю, что думать! Здесь что-то не так с логикой?

— Конечно, нет! — засмеялся Волшебник. — Решение парадокса парикмахера столь очевидно, что даже удивительно то, что он может ввести кого-то в заблуждение! Тем не менее такое случалось с некоторыми очень умными людьми. Это раскрывает интересное психологическое свойство, которое, к сожалению, является весьма распространенным.

— Не держите нас в неизвестности, — взмолился Александр. — Как решается парадокс парикмахера?

— Даю вам подсказку, — сказал Волшебник. — Допустим, я сказал вам, что некий человек больше 6 футов и меньше шести футов ростом. Как вы это объясните?

— Я сказал бы, что это невозможно, — ответил Александр.

— Ну, так разве это не подсказывает вам идею решения парадокса парикмахера?

— Не говорите мне, что решение состоит просто в том, — сказала Аннабел, — чтобы отрицать существование такого парикмахера?

— Конечно! — сказал Волшебник. — В чем же еще? Я дал вам противоречивую информацию о парикмахере и попросил объяснить противоречие. Единственное объяснение состоит в том, что сказанное мной — неправда!

— Я никогда об этом не думала! — сказала Аннабел.

— Я тоже, — согласился Александр.

— Именно! — подтвердил Волшебник. — И это негативное психологическое свойство, о котором я упоминал: верить в то, что сказано.

— Все другие парадоксы тоже решаются таким же способом? — спросила Аннабел.

— Более или менее, — ответил Волшебник. — Рассмотрим парадоксы один за другим. Что касается главы Аркадии, он не может соблюсти закон потому, что этот закон противоречив. Если глава решает жить в Аркадии, он нарушает закон, так как в Аркадии могут жить только те главы, которые не живут по месту своей службы. Если он живет вне Аркадии, то тоже нарушает закон, так как проживание делает его персоной, не проживающей по месту службы, а все такие люди должны проживать в Аркадии. Значит, для этого главы логически невозможно соблюдать закон. В этом нет парадокса; просто это значит, что закон противоречив. Что касается задачи крокодила, ответ состоит в том, что данное существо не способно сделать то, что, согласно сказанному, оно должно сделать.

Парадоксы Рассела и Кантора более серьезны и трудны, поскольку они показывают, что в нашем способе мышления есть что-то в корне неверное. Я имею в виду следующее. Не кажется ли очевидным, что если задано свойство, то существует множество всех вещей, обладающих этим свойством?

— Действительно, это выглядит именно так! — согласилась Аннабел.

— По-моему, это вполне очевидно, — подтвердил Александр.

— В этом-то и беда! — сказал Волшебник. — Этот принцип, называемый *принципом неограниченной абстракции,* согласно которому каждое свойство определяет множество вещей, обладающих данным свойством, кажется самоочевидным и, тем не менее, приводит к логическому противоречию!

— Как это? — спросила Аннабел.

— Он ведет к парадоксу Рассела и к парадоксу Кантора. Допустим, что на самом деле истинно то, что для любого свойства существует множество вещей, обладающих данным свойством. Возьмем свойство быть ординарным множеством. Тогда должно быть множество B всех ординарных множеств, и мы приходим к парадоксу Рассела. Множество B не может ни быть элементом самого себя, ни не быть таковым без противоречия. Значит, принцип неограниченной абстракции ведет к парадоксу Рассела. Он ведет также и к парадоксу Кантора. Ведь можно рассматривать свойство быть множеством. Тогда есть множество всех множеств, которое, с одной стороны, так же велико, как может быть любое из множеств, а, с другой стороны, для каждого множества существует множество большей величины (по теореме Кантора). Значит, должно существовать множество, которое больше множества всех множеств, что само по себе абсурдно. Следовательно, ошибочность парадокса Кантора в допущении существования множества всех множеств, а ошибочность парадокса Рассела в допущении существования множества всех ординарных множеств. Такие два множества просто не могут существовать. Принцип неограниченной абстракции, который выглядит столь очевидным, тем не менее ведет к парадоксам и не может быть истинным. Именно то, что он *кажется* истинным, я имел в виду, говоря, что есть что-то в корне неверное в нашем способе мышления о множествах.

Открытие этих парадоксов поначалу вызвало сильную тревогу, так как казалось, что они представляют собой угрозу несовместимости математики с логикой. Была необходима реконструкция оснований математики, о которой я расскажу вам в следующий раз.

21
Решения

— Вы хотели рассказать нам, как возникновение парадоксов привело к реконструкции оснований математики, — напомнил Александр во время следующего визита к Волшебнику.

— Да, — ответил Волшебник. — Наиболее обстоятельной из известных в то время систем оснований математики была система Готтлоба Фреге. Ее целью было выведение всей математики из немногих базовых принципов логики и множеств. В дополнение к определенным логическим аксиомам Фреге брал единственную аксиому для множеств — принцип неограниченной абстракции, согласно которому каждое свойство определяет множество вещей, обладающих данным свойством. Из этой единственной аксиомы теории множеств он выводил все нужные для математики множества. Для начала можно взять свойство, не присущее всему, чему угодно, например, свойство не быть равным самому себе. Тогда мы получим множество вещей, обладающих этим свойством, то есть пустое множество (поскольку ни одна вещь не обладает таким свойством), которое обозначается Ø. Затем для любых объектов x и y можно сформировать множество всех вещей, имеющих свойство быть идентичным x или идентичным y. Это свойство, обозначаемое {x, y}, имеют только два элемента x и y. Верно и то, что если x и y идентичны, множество {x, y} — это просто синглетон {x}, то есть множество с единственным элементом x.

Итак, теперь у нас есть пустое множество Ø, и при этом мы имеем множество {Ø}, единственным элементом которого является пустое множество Ø. Его не следует путать с самим пустым множеством, поскольку у пустого множества нет элементов, а в множестве {Ø} есть один элемент, а именно — Ø. Имея множество {Ø}, можно сформировать множество {{Ø}}, единственным элементом которого является {Ø}, затем множество {{{Ø}}}, затем множество {{{{Ø}}}} и так далее, получая тем самым бесконечное множество множеств! Эти множества могут служить в качестве натуральных чисел, что позже и реализовал Цермело. Он взял пустое множество в качестве 0, затем {Ø} — в качестве 1, {1} — в качестве 2 (то есть {{Ø}}), {2} — в качестве 3 и так далее. Из принципа неограниченной абстракции Фреге можно также вывести *множество* всех натуральных чисел, которое обычно обозначается символом ω.

Далее, при наличии множества A, можно говорить о свойстве быть *подмножеством* множества A, и, согласно принципу Фреге, существует множество всех вещей, обладающих этим свойством. Другими словами, существует множество всех подмножеств A – это *мощность* P(A) множества A, играющая фундаментальную роль в работе Кантора.

Затем можно говорить о свойстве быть элементом по крайней мере одного из элементов множества A. Тогда, согласно принципу Фреге, существует множество всех элементов всех элементов множества A, которое называется *объединение* A и обозначается UA. (Например, если A — множество клубов, то UA — множество всех *людей* в этих клубах.)

Да, из принципа неограниченной абстракции Фреге можно получить все множества, необходимые для построения классической математики. С системой Фреге связана только одна проблема: эта система противоречива! Из принципа неограниченной абстракции можно получить множество всех ординарных множеств, что приводит к парадоксу Рассела, и множество всех множеств, что приводит к парадоксу Кантора. Довольно печально то, что именно тогда, когда монументальная работа Фреге была готова к публикации, Фреге получил письмо от Рассела, в котором объяснялось, что система противоречива, и было дано доказательство этого факта с помощью парадокса Рассела. Фреге признал правильность доказательства Рассела и был крайне расстроен, чувствуя, что рухнуло дело всей его жизни. На самом деле огорчаться не стоило, так как противоречивость его системы можно было исправить, а его работа содержала огромное число фундаментальных идей, которые позднее использовались Расселом и другими учеными. Разумеется, Рассел испытывал чувство глубочайшего уважения к Фреге. В своей книге *Принципы математики*, написанной в 1902 г., Рассел говорит о Фреге так:

«Работа Фреге, оказавшаяся куда менее известной, чем она заслуживает, содержит множество доктрин, выдвинутых в I и II частях данной работы, а то, в чем они отличается от защищаемых мною идей, требует обсуждения. Работа Фреге изобилует тонкими различиями и лишена всех обычных ошибок, которые постоянно преследуют пишущих о Логике...

В дальнейшем я постараюсь кратко изложить теории Фреге в наиболее важных их пунктах и объяснить, на каких основаниях мои идеи отличаются от них там, где они действительно отличаются. Однако пунктов разногласия очень мало, и их число несравнимо с числом пунктов согласия».

— Вы сказали, что непротиворечивость системы Фреге можно исправить, — сказала Аннабел. — Как это сделать?

— Именно в этом заключалась реконструкция оснований математики, — ответил Волшебник, — и это делалась по двум главным направлениям. Первое было реализовано Уайтхедом и Расселом в их монументальном трехтомном труде *Principia Mathematica*. Второго направления придерживался Цермело, и оно выражено в том, что известно как *теория множеств Цермело*. Позднее она была развита Френкелем и получила название *теория множеств Цермело-Френкеля*, сокращенно: Z.F. Она является одной из главных математических систем, используемых в настоящее время. Система Уайтхеда и Рассела непротиворечива, но она достаточно сложна и сейчас широко не применяется. Я лучше расскажу вам о том направлении, которого придерживался Цермело.

Основная идея Цермело заключалась в том, чтобы заменить ведущий принцип неограниченной абстракции Фреге так называемым принципом *ограниченной* абстракции, или принципом *отделения*: для любого данного свойства *и любого данного множества А* существует множество всех элементов *множества А*, обладающих этим свойством. Значит, нельзя говорить о множестве *всех х,* обладающих данным свойством, как у Фреге, а можно говорить о множестве всех *х в А,* имеющих данное свойство. Такой принцип ограниченной абстракции иногда называется принципом *отделения* Цермело потому, что при наличии множества А он точно *отделяет* элементы А, обладающие данным свойством, от элементов А, не обладающих этим свойством. Неизвестны случаи, в которых этот принцип отделения вел бы к какому-либо противоречию, и, кажется, он не может привести к противоречию. Разумеется, его применяют все математики, говоря, например, о множестве всех *чисел*, обладающих данным свойством; или при построении геометрии говорят обо всех *точках поверхности*, имеющих заданное свойство. Они не говорят о множестве *всех* вещей; «вещи» происходят из множества А, существование которого уже установлено.

Если применить принцип отделения Цермело вместо принципа неограниченной абстракции Фреге, парадокс Рассела исчезает. Теперь невозможно сформировать множество *всех* ординарных множеств, но при наличии множества A можно выделить множество B всех ординарных элементов *множества A*. (Напоминаю, что ординарное множество — это множества, которое не является элементом самого себя.) Это ведет не к парадоксу, а просто к заключению, что B, хотя и является подмножеством множества A, не может быть членом A.

— Какая же разница между свойствами «быть подмножеством» и «быть членом»? — спросил Александр.

— Выражение «множество X является *членом* множества Y» означает, что Y — это группа вещей, а X — одна из этих вещей, — пояснил Вошебник. — Выражение «множество X является *подмножеством* множества Y» означает, не то что само X является членом Y, а то, что все *члены* X являются членами Y. Например, пусть X — множество мужчин на нашей планете, а Y — множество всех людей нашей планеты. Несомненно, что множество всех мужчин X не является членом Y: само X не является человеком, но все его *члены* являются членами Y: любой мужчина является человеком. Так же множество стульев в данном доме является *подмножеством* множества экземпляров обстановки этого дома, но вряд ли является *членом* этого множества: само оно не является экземпляром обстановки. Или же множество E всех *четных* целых положительных чисел является подмножеством множества N всех целых положительных чисел, но E, конечно же, не является *членом* N; само E не является четным числом.

— Я понял, — сказал Александр.

— Хорошо. Тогда скажите, почему множество B всех ординарных элементов множества A не может быть членом множества A, хотя очевидно, что B является подмножеством A?

1

Почему это так?

Итак, парадокс Рассела невозможно реконструировать в теории множеств Цермело. В ней невозможен и парадокс Кантора, так как здесь невозможно доказать существование множества всех множеств. Фактически, исходя из принципа отделения, можно доказать, что множество всех множеств не существует. Понимаете, как это можно сделать?

2

Как это можно доказать?

3

Есть аналогичная задача. Допустим, вам сказали, что некий парикмахер бреет всех жителей города Поданк, которые бреются сами, и никогда не бреет ни одного жителя этого города, который бреется сам. Ведет ли к противоречию такое условие?

— Теперь, — сказал Волшебник, — в виде расплаты за принцип *неограниченной* абстракции Фреге, Цермело должен был принять существование множеств Ø, {x, y}, P(A), UA в качестве отдельных аксиом, а также принять аксиому существования множества всех натуральных чисел — так называемую *аксиому бесконечности*. Поэтому аксиомами системы Цермело являются: (1) принцип отделения; (2) существование пустого множества Ø; (3) для любых множеств x и y существует множество {x, y}, членами которого являются в точности x и y; (4) для любого множества A существует его мощность-множество P(A); (5) для любого множества A существует его объединение UA; (6) аксиома бесконечности.

Это вся система Цермело. Намного позже Авраам Френкель добавил то, что оказалось чрезвычайно сильной аксиомой, называемой *аксиомой замены*. Грубо говоря, она означает, что при наличии множества A, можно сформировать новое множество, заменяя каждый элемент A вообще любым элементом, причем два или более элемента можно заменять одним и тем же элементом, но ни один элемент нельзя заменять более чем одним элементом (так что величина множества A не возрастает).

Это и есть знаменитая система Z.F — теория множеств Цермело-Френкеля. Она широко применяется в наши дни, и удивительно то, что всю классическую математику: теорию чисел, алгебру, исчисление, топологию и т. д. — можно доказать из этих нескольких аксиом теории множеств! Надеюсь, что когда-нибудь я сообщу вам идею такого доказательства.

Решения

1. Пусть B — множество всех ординарных элементов A. Значит, B состоит из всех таких и только таких x в A, что x — ординарно. Тогда для каждого x, *оказавшегося в A*, x находится в B, если и только если x ординарно. (Это совсем не то, что сказать, что для всех x *вообще*, x находится в B, если и только если x ординарно. Последнее означает, что B есть множество вообще всех таких x, что x ординарно, в то время как по нашему допущению B — множество только всех тех x *в A*, которые ординарны.) Теперь если бы B было бы элементом A, то B было бы одним из таких x, что x входит в B, если и только если x ординарно; иными словами, B входило бы в B, если и только если B было бы ординарным, что абсурдно, поскольку сказать, что B ординарно, значит сказать, что B *не входит в* B! Следовательно, допущение, что B является элементом A ведет к противоречию (аналогичному парадоксу Рассела), но это противоречие снимается тем, что В находится вне (а не является членом) А.

2. Это следует из задачи 1. Если дано множество А, то оно не содержит множество В всех ординарных элементов А; значит, некоторое множество находится вне А. Следовательно, не все множества являются членами А, и поэтому ни одно А не может быть множеством всех множеств.

3. Нет, это не ведет к противоречию, поскольку вам не говорили, что этот парикмахер сам является жителем Поданка! Заключение состоит просто в том, что этот парикмахер не является жителем Поданка. Если бы он был таковым, он не мог бы ни брить себя, ни не брить себя, не противореча заданным условиям. Живя вне Поданка, он может брить себя или не брить себя без противоречия, так как вам ничего не было сказано о людях, живущих *вне* Поданка, которых он брил или не брил! (Надеюсь, вы видите аналогию с задачей 1!)

22
Проблема континуума

— Хотела бы я знать вот что, — задумчиво заговорила Аннабел. — Известно, что множество P(N) всех множеств целых положительных чисел больше множества N целых положительных чисел. Есть ли множество A, которое больше N, но меньше P(N)? Другими словами, есть ли множество, которое по своей величине занимает место между N и P(N) или же P(N) — это множество, следующее по величине непосредственно за N?

— О! — сказал Волшебник. — Вам действительно хотелось бы это знать? Я тоже хотел бы это знать, и весь математический мир хотел бы это знать! Это основной вопрос, поставленный Кантором, и ответ на него не известен до сих пор! Кантор *предположил*, что нет множества, величина которого занимает среднее положение между N и P(N), и это предположение известно как *континуум-гипотеза*. Однако это только предположение, или гипотеза, которая не доказана и не опровергнута по сей день. Кантор выдвинул и более общую гипотезу, что *ни для одного* бесконечного множества A не существует множества, величина которого занимает среднее положение между A и P(A). Это предположение известно как *обобщенная континуум-гипотеза*. И вновь это лишь предположение, которое никто еще не доказал и не опровергнул. Я обоснованно считаю эту нерешенную проблему *великой* нерешенной задачей — наиболее интересной нерешенной задачей всей математики. Многие математики и логики придерживаются такого же мнения.

— Почему применяется слово «континуум»? — спросил Александр.

— Случилось так, что множество P(N) можно поставить в 1-1-значное соответствие с множеством точек бесконечной прямой, которую иногда называют континуумом. Поэтому говорится, что P(N) имеет величину, равную континууму. Значит, вопрос в том, есть ли множество, величина которого больше N, но меньше континуума.

— Каковы перспективы решения проблемы континуума? — спросила Аннабел.

— Очень трудно сказать, — ответил Волшебник. — В 1939 г. Гёдель доказал, что в системе Цермело-Френкеля — одной из самых мощных из всех известных систем математики — невозможно опровергнуть континуум-гипотезу. В 1963 г. Коэн доказал, что континуум-гипотезу никогда невозможно *доказать*, исходя из аксиом этой системы. Значит, континуум-гипотеза *не зависима* от сегодняшних аксиом теории множеств.

— Значит ли это, что континуум-гипотеза ни истинна, ни ложна, а зависит только от того, какая система аксиом выбрана? — спросила Аннабел.

— Это весьма спорный вопрос, — ответил Волшебник. — Есть люди, называемые *формалистами,* которые считают, что континуум-гипотеза ни истинна, ни ложна, а полностью зависит только от выбора аксиом, так как можно прибавить либо саму эту гипотезу, либо ее отрицание к аксиомам теории множеств и получить в обоих случаях непротиворечивую систему, разумеется, если сами аксиомы теории множеств непротиворечивы, что несколько сомнительно. Значит, формалисты считают, что континуум-гипотеза сама ни истинна, ни ложна, а просто зависит только от выбора системы аксиом. Другой крайности придерживаются так называемые математические *номиналисты*, или *платоники* — и я, определенно, один из них, — которые полагают, что континуум-гипотеза несомненно истинна или ложна, но мы не знаем, как именно обстоит дело. Мы считаем, что наших знаний о множествах пока не достаточно для ответа на данный вопрос, но это не значит, что вопрос не имеет ответа!

Позиция формалистов поражает меня как наиболее странная! Физики и инженеры так вовсе не мыслят. Допустим, что группа инженеров построила мост, и на следующий день его готова пересечь армия. Инженеры хотят знать, выдержит мост ее вес или рухнет. Вряд ли им поможет то, что им скажут: «В одной системе аксиом можно доказать, что мост выдержит, а в другой — что он рухнет». Инженеры желают знать, выдержит мост *на самом деле* или нет! Для меня (и других платоников) ситуация с континуум-гипотезой выглядит аналогично: есть ли множество, среднее по своей величине между N и P(N)? Если формалисты скажут, что в одной системе аксиом такое множество есть, а в другой — нет, я отвечу, что это для меня бесполезно, если я не знаю, какая из этих двух систем аксиом *корректна*! Однако для формалистов само понятие *корректности*, отличное от простой непротиворечивости, либо бессмысленно, либо зависит от выбранной системы аксиом. Так что «мертвая точка» между формалистом и платоником почти безнадежна! Я не думаю, что одна из сторон может сдвинуть другую хоть на йоту!

— Я не знала, — сказала Аннабел, — что в такой области, как математика, столько споров! Я думала, что эта область отшлифована и очищена, и в ней нет места для различия во мнениях.

— Различие мнений существуют не столько в математике, сколько в *основаниях* математики. Предмет математических оснований вплотную приближается к философии, где, конечно, существует большое различие мнений, — ответил Волшебник.

— А сами Гёдель и Коэн, — спросил Александр, — формалисты или платоники?

— Я не уверен насчет Коэна, — ответил Волшебник. — Фактически я не уверен, что он определился по данному вопросу, хотя и подозреваю, что он был близок формализму. Только, пожалуйста, не цитируйте эти мои слова, потому что я действительно не знаю. Что касается Гёделя, то он подчеркнуто выказывал себя платоником! Он явно утверждал, что нужно именно найти новые аксиомы теории множеств, которые так же самоочевидно истинны, как и существующие, и которые были бы достаточно сильными для того, чтобы определить статус континуум-гипотезы. Он предсказывал, что если бы однажды такие аксиомы были найдены, стало бы ясно, что континуум-гипотеза Кантора *ложна*! Да, Гёдель доказывал, что хотя континуум-гипотезу — даже обобщенную континуум-гипотезу — никогда не опровергнуть, исходя из нынешних аксиом теории множеств, она, несомненно, ложна.

Итак, пока что надежды Гёделя не оправдались. Новые самоочевидные аксиомы, которые могли разрешить вопрос, еще не открыты. Будут ли они когда-нибудь найдены? Кто знает? Если да, то день, когда это случится, будет воистину славным днем!

Часть VII

Гиперигра, парадоксы и одна история

23
Гиперигра

— Известен ли вам парадокс *гиперигры*? — спросил однажды Волшебник.

Ни Аннабел, ни Александр ничего не слышали о таком парадоксе.

— Это прекрасный парадокс, созданный в восьмидесятых годах математиком Вильямом Цвикером. Будучи по природе своей милым парадоксом, он приводит к абсолютно новому доказательству теоремы Кантора.

— Как интересно! — оживилась Аннабел.

— Сначала о парадоксе, — начал Волшебник. — Мы обсудим игры, в которые играют в точности два человека. Назовем игру *нормальной*, если она должна закончиться после конечного числа ходов. Очевидный пример — игра тик-так-той; она должна закончиться не более чем за девять ходов. Шахматы тоже нормальная игра; правило пятидесяти ходов гарантирует, что она не может продолжаться. Шашки тоже нормальная игра. Каждая из известных мне карточных игр тоже нормальна. Возможно, игра в шахматы на бесконечной доске могла бы быть ненормальной.

Теперь рассмотрим *гиперигру*. Первый ход гиперигры состоит в том, чтобы объявить, в какую *нормальную* игру нужно играть. Допустим, что один из вас играет против меня и мой ход первый. Тогда я должен объявить, в какую нормальную игру нужно играть. Я могу сказать: «Давайте играть в шахматы», — тогда вы делаете первый ход в шахматной партии, и мы играем до тех пор, пока она не заканчивается. Я мог бы сказать: «Давайте играть в шашки», — тогда вы сделали бы первый ход в шашечной партии, и мы играли бы до тех пор, пока она не закончилась бы. Или же я мог бы сказать: «Давайте играть в тик-так-той», — я могу выбрать *любую* нормальную игру. Однако мне запрещено выбирать не нормальную игру; я должен выбрать *нормальную* игру.

Теперь возникает вопрос: «Гиперигра нормальна или нет?»

Молодые люди подумали и пришли к заключению, что эта игра должна быть нормальной.

— Почему? — спросил Волшебник.

— Потому что какая бы игра ни была выбрана, она должна закончиться, так как она нормальна. Тем самым заканчивается начатая партия гиперигры. Независимо от того, какая нормальная игра выбрана, процесс должен закончиться. Следовательно, гиперигра должна быть нормальной.

— Пока все хорошо, — сказал Волшебник, — но теперь возникает проблема. Установлено, что гиперигра нормальна, и поскольку своим первым ходом я могу выбрать *любую* нормальную игру, я могу сказать: «Давайте сыграем в гиперигру». Вы отвечаете: «Хорошо, сыграем в гиперигру». Затем я говорю: «Окей, давайте сыграем в гиперигру». Этот процесс может продолжаться бесконечно. Следовательно, гиперигра *не должна* закончиться, а это значит, помимо всего прочего, что гиперигра не нормальна! Получается парадокс.

Ни Александр, ни Аннабел не могли найти решение этого парадокса.

— Все дело в том, что общее понятие игры точно не определено. При наличии множества S точно определенных игр можно определить гиперигру *для данного множества S*, но эта гиперигра сама не может быть одной из игр множества S.

Кто-то (я думаю, Гегель) определил парадокс как истину, стоящую на голове. Очень часто то, что сначала выглядит парадоксом, изменяется и ведет к важной истине. Так же обстоит дело с парадоксом гиперигры Цвикера. Модификация этого аргумента дает интересную теорему, из которой следует абсолютно новое доказательство теоремы Кантора.

Кратко напомню доказательство Кантора. Дано множество A, и с каждым элементом x множества A ассоциируется подмножество множества A, обозначаемое как S_x. Идея состоит в построении подмножества C множества A, которое отличается от S_x для любого x. Кантор принимал за C множество всех элементов x множества A, таких, что x не принадлежит S_x. Цвикер искал совершенно другое множество Z, отличающееся от любого из множеств S_x. Это, подобно рассуждению Кантора, показывает, что невозможно установить 1-1-значное соответствие между A и множеством всех подмножеств A, но новое множество Z, полученное Цвикером, полностью отличается от множества C, полученного Кантором. Именно это сделал Цвикер.

Когда установлено соответствие (приписывающее подмножество каждому x в A), мы определяем *путь* как любую такую конечную или бесконечную последовательность x, y, z... элементов A, что любой ее член w либо является последним членом, либо следующий за ним член есть элемент множества S_w. Значит, *путь* генерируется следующим образом. Начинаем с произвольного элемента x множества A. Если S_x пусто, то это конец последовательности. Если нет, то выбираем некоторый элемент y множества S_x. Теперь мы имеем двучленную последовательность (x, y). Если S_y пусто, то последовательность закончена. Если нет, то выбираем некоторый элемент z множества S_y. Теперь мы имеем трехчленную последовательность (x, y, z). Если S_z пусто, то последовательность закончена, если же S_z не пусто, то выбираем некоторый элемент z, делаем его четвертым элементом последовательности и продолжаем так до тех пор, пока не приходим к некоторому пустому S_v, тем самым заканчивая последовательность, либо продолжаем и генерируем бесконечный путь. [Например, если y — элемент S_x, а x — элемент S_y, то (x, y, x, y, x, y...) будет бесконечным путем. Или если x окажется элементом S_x, то бесконечным путем будет (x, x, x, x...).] Теперь для любого x либо существует, либо не существует бесконечный путь, начинающийся с x. Назовем x *нормальным*, если не существует бесконечного пути, начинающегося с x. Значит, если x нормален, то *любой* начинающийся с x путь должен закончиться. Пусть Z — множество всех нормальных элементов. Тогда мы имеем следующую теорему:

Теорема Z (теорема Цвикера). Для любого x множество Z отличается от множества S_x.

Доказательство теоремы — это очевидная модификация рассуждения, приводящего к парадоксу гиперигры.

1

Докажите теорему Цвикера.

— Заметьте, — сказал Волшебник, — что множество Z Цвикера не имеет никакого отношения к множеству Кантора C. Множество *нормальных* элементов не имеет никакого значительного отношения к множеству x-ов, не принадлежащих S_x.

Для доказательства Кантора существенно понятие отрицания. C — это множество всех таких x, что x *не* принадлежит S_x. Доказательство Цвикера не основано на отрицании, оно базируется на понятии *конечности*.

— Мне кажется, — сказала Аннабел, — что понятие отрицания замаскировано в доказательстве Цвикера. Он определяет x как нормальный, если *не* существует бесконечной ветви, которая начинается с x. Разве это не скрытое применение отрицания?

— Дельное замечание, — одобрил Волшебник, — но такое использование отрицания не существенно. Можно было бы определить x как нормальный, если *все* начинающиеся с x пути конечны.

Решения

1. Нужно показать, что для любого x множество Z нормальных элементов не может быть множеством S_x. Также нужно показать, что ни для одного x не верно, что S_x есть множество всех нормальных элементов. Поэтому допустим, что x является таким, что есть множество всех нормальных элементов. Тогда противоречие получается следующим образом:

Сначала покажем, что x должен быть нормальным. Рассмотрим любой путь, начинающийся с x. Если S_x окажется пустым, путь заканчивается именно на этом x (так как любой следующий член пути должен быть членом множества S_x). Поэтому допустим, что S_x не пусто. Тогда второй член этого пути y должен быть выбран из S_x и, следовательно, должен быть нормальным (поскольку в S_x входят только нормальные элементы). Поскольку y нормален, любой начинающийся с y путь должен закончиться. Следовательно, любой путь, начинающийся с (x, y...) должен закончиться, а значит x должен быть нормальным.

Поскольку x нормален, и есть множество *всех* нормальных элементов, x должен быть элементом S_x. Следовательно, есть бесконечный путь (x, x, x...), точно такой же, как бесконечная игра («Давайте сыграем в гиперигру», «Давайте сыграем в гиперигру», «Давайте сыграем в гиперигру»...), и таким образом мы приходим к противоречию.

Следовательно, множество Z нормальных элементов должно отличаться от каждого S_x.

24
Парадоксально?

— На днях я придумала парадокс, — объявила Аннабел. — Он касается вашего объяснения парадокса Кантора в терминах книги перечисленных множеств. Помните? Вы описывали книгу со счетным множеством страниц, пронумерованных 1, 2... и так далее, и на каждой странице было дано описание множества целых положительных чисел. Задача состояла в том, чтобы описать множество, которое не описано ни на одной странице этой книги. Помните?

— Конечно, я помню, — ответил Волшебник.

— Очень хорошо. И, если помните, в качестве решения вы предложили описание: *«Множество всех таких n, что n не является членом множества, записанного на странице n»*.

— Правильно, — согласился Волшебник.

— Мой парадокс состоит в следующем. Допустим, что это самое описание дано на одной из страниц книги, скажем, на странице 13. Тогда является 13 членом этого множества или нет? Представим себе, что мы рассматриваем множество S всех чисел n, не принадлежащих множеству, описанному на странице n. Значит, для любого числа n верно, что n принадлежит S, если и только если n не принадлежит множеству, описанному на странице n. В частности 13 принадлежит S, если и только если 13 не принадлежит множеству, описанному на странице 13. Однако S *есть* множество, описанное на странице 13. В результате получается абсурд: 13 принадлежит S именно тогда, когда 13 не принадлежит S! Как такое может быть?

— Искусно сделано! — широко улыбнулся Волшебник, — мне очень нравится эта идея!

— Однако каково же решение? — умоляюще произнесла Аннабел.

1

Прежде чем читать дальше, попробуйте самостоятельно решить этот парадокс.

Решение задачи 1

— Объяснение может быть таким, — сказал Волшебник. — Рассмотрим следующее выражение:

(1) Множество всех таких n, что n не принадлежит множеству, описанному на странице n.

Если (1) появляется на одной из страниц, скажем, на странице 13, то это не настоящее описание какого-либо множества, а *псевдоописание*.

— Почему? — спросила Аннабел.

— Потому что если бы оно было настоящим, оно вело бы к противоречию — к тому самому противоречию, которое ты так удачно описала.

— Я не уверена, что это объяснение вполне удовлетворительно, — усомнилась Аннабел.

— Посмотрим на него следующим образом, — предложил Волшебник. — Чтобы быть настоящим, описание множества должно быть определенным правилом — определенным критерием, согласно которому одни числа являются членами множества, а другие — нет. Если выражение (1) появляется в книге на странице 13, то для любого n, *отличающегося от 13*, оно определяет, входить n в данное множество или нет. Однако в нем ничего *не* сказано о том, входит 13 в это множество или нет. Следующее выражение является настоящим, даже если оно появляется на странице 13.

(2) Множество всех таких n, отличающихся от 13, что n не принадлежит множеству, описанному на странице n.

Согласно такому описанию, 13 *не является* членом множества, описанного на странице 13. Следующее описание тоже является настоящим, если оно появляется на странице 13.

(3) Множество всех таких n, отличающихся от 13, что n не принадлежит множеству, описанному на странице n, вместе с числом 13.

Это настоящее описание, так как в нем говорится, что делать с числом 13:13 должно быть включено в указанное множество. Значит, (2) и (3) — настоящие описания, даже если одно из них появляется на странице 13, но если на этой странице появляется (1), оно не настоящее. Курьезно то, что (1) является настоящим описанием *при условии, что оно не появляется ни на одной из страниц книги*! Если оно записано вне книги, то оно настоящее, конечно, при условии, что все описания в книге настоящие.

В этот момент Волшебник на несколько минут задумался, устремив взгляд в пространство. Затем он снова заговорил:

— Знаете ли, вы только что навели меня на мысль об еще более трудном парадоксе! Рассмотрим другую книгу со счетным числом страниц, и на каждой ее странице записано либо настоящее описание, либо псевдоописание множества целых положительных чисел. В отличие от предыдущей книги теперь допустима запись псевдоописания на некоторых страницах. Тогда настоящим определенно является следующее описание:

Множество всех таких n, что описание на странице n является настоящим, и n не входит в множество, описанное на странице n.

Это описание должно быть настоящим, так как оно дает конкретное правило определения того, какие числа принадлежат множеству S, а какие нет. Рассмотрим произвольное число n. Описание, данное на странице n, либо настоящее, либо нет. Если нет, то n автоматически исключается из S. Если это настоящее описание, то описание на странице n действительно описывает множество; значит, реально определено, входит ли n в это множество, и, соответственно, определено, входит n в S или нет. Следовательно, данное описание действительно является настоящим.

Что же случится, если *это* настоящее описание записано на странице 13? Входит 13 во множество, описанное таким образом или нет? В любом случае получается противоречие, как показала Аннабел, и теперь мы не можем избавиться от противоречия, утверждая, что данное описание не настоящее, так как доказано, что оно настоящее! Как вам это нравится?

— Действительно, вы осложняете жизнь! — сказал Александр.

— Я это понимаю! — сказал Волшебник с озорной улыбкой.

2

Как избавиться от *этого* парадокса? (Решение дано в конце этой главы.)

Связь с парадоксом Бери

— Действительно, — сказал Волшебник, изложив ответ на заданный вопрос, — мой парадокс тесно связан с парадоксом Бери. Это одна из его канторовских версий.

— В чем заключается парадокс Бери? — спросила Аннабел.

— По мере того, как числа увеличиваются, требуется все больше и больше слов для их описания.

— Это кажется приемлемым, — заметил Александр.

— Фактически для любого целого положительного числа n должны существовать числа, которые нельзя описать с помощью менее чем n слов.

— Я верю этому, — согласился Александр. — Тогда для любого n, должно существовать *наименьшее* число, которое нельзя описать с помощью менее чем n слов. Правильно?

— Конечно, — подтвердила Аннабел.

— Хорошо, посмотрим на следующее описание:

НАИМЕНЬШЕЕ ЧИСЛО, КОТОРОЕ НЕЛЬЗЯ ОПИСАТЬ С ПОМОЩЬЮ МЕНЕЕ ОДИННАДЦАТИ СЛОВ

Оно описывает определенное число, не так ли?

Молодые люди согласились.

— Сосчитайте, пожалуйста, число слов в этом описании, — попросил Волшебник.

Они сосчитали и к своему ужасу поняли, что слов всего десять.

— Итак, наименьшее число, которое нельзя описать с помощью менее 11 слов, описано с помощью 10 слов. Теперь, пожалуйста, объясните мне, как такое может быть? — спросил Волшебник.

3

О, нет! Как же *такое* может быть?

— Все эти парадоксы, — сказал Волшебник, — напоминают мне восхитительную историю о том, как однажды умный студент Георга Кантора перехитрил Сатану. Знаете ли вы историю о Сатане, Канторе и бесконечности?

Ни Аннабел, ни Александр не знали такой истории.

Тогда я расскажу ее, когда вы придете в следующий раз.

Решения

1. Решение дано непосредственно за формулировкой задачи.

2. Объяснение заключается в том, что само понятие настоящего описания точно не определено. Настоящее описание можно определить только внутри точно сформулированного языка, а русский таким языком не является. Положение дел аналогично ситуации с *истиной*. Как показал логик Альфред Тарский, для достаточно богатых языков истинность предложений данного языка не определима в этом языке. Например, *истинность* русских предложений не определима в русском языке; в противном случае получилось бы парадоксальное предложение: «Это предложение не истинно».

3. Решение такое же, как и решение предыдущей задачи. Понятие описания точно не определено.

25
Сатана, Кантор и бесконечность

Вот история, рассказанная Волшебником;

— Я от души посмеялся над некоторыми нашими жертвами, — сказал Сатана Вельзевулу, весело потирая руки. — Каждый раз я говорил жертве, что я задумал один и только один объект из бесконечного множества объектов. Ежедневно жертве разрешено высказать одну и только одну догадку о том, какой это объект. В тот день, когда жертва угадает, она свободна. Это общая форма испытаний. В некоторых случаях жертва была достаточно умной, чтобы разработать стратегию своего освобождения; в остальных случаях это не удавалось. Завтра я жду новую жертву и сделаю так, что она *никогда* не освободится!

— Что же ты сделаешь? — спросил Вельзевул.

— Я записал имя *множества* целых положительных чисел. Каждый день жертве позволено называть одно и только одно множество, и если она назовет мое множество, она свободна. Однако она *никогда* не получит свободу!

— Почему? — спросил Вельзевул.

— Да посмотри, что я написал!

Множество всех таких чисел n, что n не принадлежит множеству, названному в n-ый день.

— Не понимаю, — сказал Вельзевул.

— Я так и думал, что ты не поймешь, болван! — разозлился Сатана. — Невозможно, чтобы жертва назвала мое множество в любой день, поскольку для любого целого положительного числа n множество, названное жертвой в n-ый день, отличается от моего множества, так как одно из этих двух множеств содержит n, а другое — нет! Это проще простого!

— Остроумно! — заметил Вельзевул.

Случилось так, что следующей жертвой стал награжденный премией студент Георга Кантора! Он не только прекрасно знал математику бесконечности, но и был специалистом в области семантики и закона. Фактически он планировал пойти в юриспруденцию, но попал под магнетическое влияние Кантора и решил заниматься логикой и математикой.

— Прежде чем подписать какой-либо договор, — сказал студент Сатане, — я хочу быть уверенным в том, что мне абсолютно ясны условия.

— Я уже сказал тебе, — заявил Сатана, — что я записал имя некоторого множества целых положительных чисел и вложил запись в этот конверт с моей королевской печатью. Ежедневно тебе позволено называть имя одного и только одного множества. Когда ты назовешь записанное мною множество, ты будешь свободен. Это проще простого!

— Все это я уже понял, — ответил студент, — но есть несколько вопросов, требующих ответов. Прежде всего, допустим, что в один из дней я называю записанное тобой множество, но мое *описание* этого множества отличается от твоего описания. Любое множество можно описать многими различными способами. Например, допустим, что ты написал: «Множество, единственным элементом которого является число 2». В один из дней я говорю: «Множество всех простых четных чисел». Это одно и то же множество, поскольку 2 — *единственное* простое число; тем не менее описания даны различные. Что будет в таком случае?

— О, в таком случае ты выиграл, — ответил Сатана. — Я не требую, чтобы наши *описания* полностью совпадали, но требую, чтобы в них было описано одно и то же множество.

— Однако тогда возникает серьезная проблема! — возразил студент. — Не всегда просто установить, что два описания именуют одно и то же множество. Допустим, что в один из дней я описываю множество, а ты говоришь: «Нет, это не то множество, которое я имел в виду». У меня же есть основание считать, что это действительно *то самое* множество, только ты описал его иначе. Что тогда?

— В таком случае, — заметил Сатана, — ты можешь бросить мне вызов. Вызов — очень серьезная вещь, и ты должен хорошо подумать, прежде чем его сделать. Это может мгновенно освободить тебя или оставить здесь навсегда!

— Что именно ты понимаешь под «вызовом»? — спросил студент.

— Ты требуешь, чтобы я открыл конверт и показал, что я записал. Если ты можешь доказать, что два описания — твое и мое — действительно именуют одно и то же множество, ты выиграл и получаешь свободу. Однако если я смогу доказать, что описания именуют разные множества, то ты проиграл и теряешь право впредь называть какие-либо множества. Ты навсегда теряешь возможность освободиться. Хорошо запомни, что после вызова тебе запрещено называть другие множества.

— Это мне ясно, — сказал студент, — но теперь возникает другой вопрос. Откуда мне знать, что ты действительно записал имя множества в этом конверте?

— Ты сомневаешься в **моих** словах? — спросил Сатана.

— О, вовсе нет; я ни на секунду не сомневаюсь, что в этом конверте записано то, что, *по твоему мнению*, является настоящим описанием множества. Однако в истории математики бывало, что описание, которое, на первый взгляд, казалось настоящим, не описывает вообще никакого множества — иными словами, на самом деле не существует множества, отвечающего такому описанию. Такие «описания» логики называют *псевдоописаниями*. Кажется, что они описывают множество, но на самом деле это не так. Теперь допустим, что на определенном этапе у меня есть основания подозревать, что твоя запись в конверте — это не описание, а только псевдоописание. Что тогда?

— Если в любой день у тебя возникнет подозрение, что я записал всего лишь псевдоописание, — ответил Сатана — ты тоже можешь бросить мне вызов. Я открою конверт и покажу, что я записал. Если ты сможешь доказать, что это всего лишь псевдоописание, ты выиграл и получаешь свободу. Однако если я смогу доказать, что это действительно настоящее описание, то ты проиграл и теряешь право впредь называть какие-либо множества. Я должен серьезно на-помнить тебе, что *после вызова ты не можешь далее называть какие-либо множества.*

— Теперь этот пункт ясен, — сказал студент. — Осталось последнее: хочешь ли ты записать в договоре, что в любой момент, когда ты нарушишь одно из его условий, я свободен?

— Да, — ответил Сатана, — при условии, что ты хочешь записать в договоре, что с любого момента, когда ты нарушишь одно из его условий, ты останешься здесь навсегда.

— Согласен! — сказал студент.

Договор был составлен Вельзевулом и подписан обеими сторонами.

— Хорошо! — сказал Сатана. — Когда ты хочешь начать?

— Сегодняшний день не хуже любого другого, — ответил студент. — Пусть он будет первым днем испытания.

— Очень хорошо, тогда назови множество целых положительных чисел.

— Множество всех таких чисел n, что n не принадлежит множеству, названному мною в n-ый день, — сказал студент. — А теперь я требую, чтобы ты открыл конверт.

— Горе мне! — простонал Сатана. — Об этом я не подумал!

— Открой конверт! — требовал студент.

Сатана был вынужден вскрыть конверт, в котором, разумеется, было записано то же самое.

— Итак, я свободен! — сказал студент.

— Не спеши, юноша! — предостерег Сатана. — На самом деле, ты не назвал имя множества, а сделал именно то, что ставил мне в вину в качестве моего возможного действия: дал всего лишь *псевдоописание*, а не настоящее описание!

— Почему? — удивился студент.

— Потому что допущение о том, что ты *назвал* имя множества, ведет к логическому противоречию. Допустим, что ты назвал имя множества. Тогда это множество, которое ты именовал в первый день. Число 1 входит в это множество, если и только если оно не входит во множество, именованное в первый день; но поскольку это множество *есть* множество, именованное в первый день, 1 входит в это множество, если и только если 1 не входит в него. Это явное противоречие, и единственный способ его избежать — признать, что ты на самом деле не назвал имени множества.

— Я рад, что ты это понял, — сказал студент, — потому что, согласно этому же самому рассуждению, *ты* не назвал имени множества.

— Погоди-ка! — остановил его Сатана. — Свойство *моего* описания быть настоящим обосновано тем, что ты называешь имя одного и только одного множества каждый день. Сегодня ты пока что не назвал имени множества, поэтому сейчас я приказываю тебе назвать множество.

— Но я не намерен сегодня именовать какие-либо множества.

— Что? — вскричал Сатана, не веря своим ушам.

— В договоре нигде не сказано, что я *должен* каждый день именовать какое-то множество; там сказано только то, что мне *позволено* назвать имя множества

— Ах, вот как! — возопил Сатана. — Ты отказываешься называть имя множества сегодня, да? Хорошо, я *заставлю* тебя именовать множество сегодня и завтра, и послезавтра, и послепослезавтра, и так до бесконечности. Ты не представляешь себе, насколько ужасны мои методы!

— А ты не сможешь этого сделать, — сказал студент. — Я уже бросил тебе вызов, в договоре ясно сказано, что после вызова мне больше не позволено называть имена каких-либо множеств.

Эпилог

Разумеется, Сатана был вынужден освободить студента. Тот немедленно попал в рай и обнял своего любимого учителя Георга Кантора. Оба с удовольствием посмеялись над тем, что произошло.

— Понимаешь ли, — сказал Кантор, — тебе не нужно было столько трудиться; тебе не нужно было начинать процедуру с формулировки псевдоописания. Ты мог начать просто с высказывания: «Я бросаю тебе вызов!» После вызова тебе было бы запрещено именовать какие-либо множества, что автоматически сделало бы «описание» Сатаны простым псевдоописанием.

— Разумеется, я понимал это, — ответил студент. — Просто я хотел немножко посмеяться над ним.

— До вас дошло, — обратился Волшебник к Аннабел и Александру, — что Сатана применил знаменитый диагональный метод Кантора для доказательства того, что мощность множества n превосходит n по кардинальности. Студент правильно угадал, что Сатана постарается привлечь этот трюк Кантора. Многие спрашивали меня, является выражение «Множество всех таких n, что n не принадлежит множеству, именованному в день n» настоящим описанием или нет. Ответ в том, что это настоящее определение, если только каждый день существует одно и только одно множество, именуемое в этот день. Если бы студент не смог назвать имени множества за один день, этого было бы достаточно для того, чтобы лишить смысла описание Сатаны. Или если бы студент в данный день назвал имена более чем одного множества, это тоже свело бы на нет описание Сатаны. А вот если бы студент каждый день называл имя одного и только одного множества, описание Сатаны было бы абсолютно точно определенным. Однако курьез с этим описанием в том, что после любого конечного числа дней нельзя было бы *узнать*, что Сатана записал настоящее описание, если только каким-то образом не стало бы известно, что студент *будет* ежедневно называть имя одного и только одного множества.

Сатана действительно составил очень плохой договор! Если бы он *потребовал*, а не *раз-*

решил, чтобы студент ежедневно называл имя одного и только одного множества, и убрал бы пункт о том, что студенту не позволено именовать какие-либо множества после вызова, он явно выиграл бы. Если бы он сделал это, для студента было бы логически невозможно даже назвать имя множества Сатаны. Однако согласно контракту просто вызов со стороны студента запрещает ему далее именовать множества, что, в свою очередь, лишает «описание» Сатаны свойства быть настоящим.

Мораль истории в том, что даже падшие ангелы могут извлечь пользу из хорошего курса математической логики.

Рэймонд Смаллиан

Сатана, Кантор и бесконечность,

а также другие головоломки

Ничто не будоражит человеческое воображение так сильно, как бесконечность! Ей присущи все странные свойства, которые сначала кажутся парадоксальными, а затем оказываются вовсе не такими. Бесконечность сама по себе — идеальный материал для книги загадок.

Как и прежние книги загадок автора, эта книга начинается новыми загадками о людях, говорящих правду, и лжецах, но в ней появляется важный персонаж — Волшебник. Окружающие считают его чародеем, хотя на самом деле он логик, применяющий логику так умно, что несведущим людям она кажется волшебством. Многократно продемонстрировав свое «логическое волшебство», он сопровождает нас во множестве необычайных приключений, включая посещение острова, на котором разумные роботы создают других роботов, наделяя их интеллектом, достаточным для создания других разумных роботов, которые в свою очередь создают других разумных роботов, и так до бесконечности. После нескольких особых загадок, связанных со знаменитой теоремой Гёделя, и парадоксов о вероятности, времени и изменении, Волшебник сопровождает нас в бесконечность, объясняя пионерские открытия великого математика Георга Кантора, который первым подвел под тему бесконечности логически обоснованный базис. С присущим ему юмором Волшебник завершает дело замечательным рассказом о том, как сам Сатана был побежден в состязании умным учеником Кантора.

ISBN 978-5-85582-334-9

9 785855 823349

Об авторе. Рэймонд Меррилл Смаллиан, известный специалист в области математической логики и теории множеств, член Американского Музыкального общества (Нью-Йорк), профессиональный иллюзионист, профессор философии и математики (на пенсии), автор более 20 книг по математике и философии. На многих языках мира опубликованы его книги логико-математических загадок и книги по ретроспективному анализу в шахматах. На русском языке изданы его книги загадок «Как же называется эта книга?», «Принцесса или тигр?», «Алиса в стране загадок», «Шахматные тайны Шерлока Холмса», «Шахматные тайны арабских коней», «Загадка Шахразады и другие древние и современные головоломки», «Вовеки неразрешимо», «Передразнить пересмешника» и сборник философских эссе «Молчаливое Дао» .

Издательство
"ЛОРИ"
www.lory-press.ru