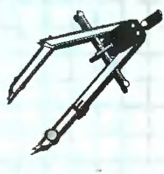
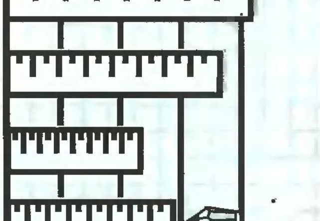
ЄВРОПЕЙСЬКИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ФІНАНСІВ, ІНФОРМАЦІЙНИХ СИСТЕМ,
МЕНЕДЖМЕНТУ І БІЗНЕСУ

С.В. РЖЕВСКИЙ

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ РАЗВЛЕЧЕНИЯ





ЕВРОПЕЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ФИНАНСОВ,
ИНФОРМАЦИОННЫХ СИСТЕМ, МЕНЕДЖМЕНТА И БИЗНЕСА

С.В. Ржевский

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ РАЗВЛЕЧЕНИЯ

Киев
Издательство Европейского университета финансов, информационных систем, менеджмента и бизнеса
1999

ББК 22.Iя92
Р48

Р48 Ржевский С В
Математические развлечения.— К.: ЕУФИМБ, 1999 — 124 с.

ISBN 966-7508-32-3

Сборник содержит более 250 занимательных задач, головоломок, логических задач, задач-шуток, большинство из которых не публиковались в нашей стране

Для широкого круга читателей

Рецензенты:
член-корреспондент НАН Украины *А А Чикрий,*
доктор технических наук, профессор *В.М Михайленко*

ISBN 966-7508-32-3 **ББК 22.Iя92**

Предисловие

Даже те, кто не особенно интересуется математикой, обычно обращают внимание на всевозможные головоломки, хитрые задачи, задачи-шутки, а также разные психологические тесты, с помощью которых можно проверить свою сообразительность. Пример такой задачи: «Как сделать из трех спичек «четыре», не ломая при этом ни одной ?». Не правда ли, ответ: «Сложить из имеющихся спичек цифру «четыре» — не сразу приходит в голову ?

Большинство подобных задач построено на простом умении замечать общее и особенное, повторяющееся и единичное, закономерное и случайное. Причем не только в числах, но и в событиях, словах, рисунках. Развивать такие способности полезно всем. Искушенным математикам такие задачи также интересны, поскольку для их решения обычно недостаточно известных вызубренных правил и доведенных до автоматизма действий. Нетривиальные задачи не позволяют уму закостенеть, попытки их решить развивают творческие способности.

Для решения логических задач не нужны никакие специальные математические знания. Чаще всего такие задачи выглядят как проблемы из повседневной жизни, в которых требуется определить имя, профессию и возраст нескольких людей на основе отрывочных и разрозненных сведений о них, или, сопоставив показания нескольких подозреваемых, найти преступника. Именно мастерством распутывания логических задач прославились Шерлок Холмс, Мегрэ и Коломбо. На самом деле, разгадывание таких «загадок» тренирует те же навыки, что и решение обыкновенных задач с числами, и в первую очередь — умение мыслить последовательно и системно.

Некоторые головоломки привлекают своей стариной. Например, задаче о переправе через реку отряда солдат около ста лет, а история о дедушке, переправлявшем через реку волка, козу и капусту, известна уже с семнадцатого века.

Наконец, когда человеку удается решить «хитрую» задачу, ему приятно лишний раз убедиться в возможностях своего ума.

Именно такие задачи, читатель, предлагаются Вашему вниманию. Большинство их не было опубликовано в сборниках занимательных задач, ранее издававшихся в нашей стране. При работе над книгой автор использовал свою коллекцию. Ее основные источники — научно-популярные журналы и «устное народное творчество». Постановки задач тщательно отредактированы, и к каждой из них прилагается подробное решение.

Автор выражает искреннюю признательность руководителям Европейского университета финансов, информационных систем, менеджмента и бизнеса Ивану Ивановичу и Зое Ивановне Тимошенко за проявленный к этой книге интерес и за содействие в ее издании.

Киев, 1999 г. *С.В. Ржевский*

ПОСТАНОВКИ ЗАДАЧ

Установить имеющуюся закономерность в числах

1. Какое число следует поместить в пустой квадратик ?

17	11	21	6	27
33	83	9	72	13
25	47	15	39	

2. Вставьте в пустой кружок пропущенное число

а)			б)		
19	64	13	164	225	286
17		21	224		476

3. Какое число поставить в центр правого треугольника ?

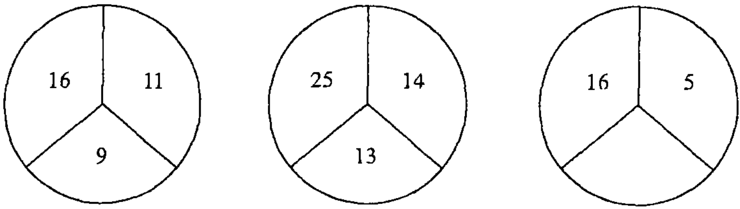
4. Из чисел: 837, 612, 549, 426, 342 исключить то, которое не обладает свойством, присущим остальным числам данного ряда.

5. Какая из табличек лишняя ?

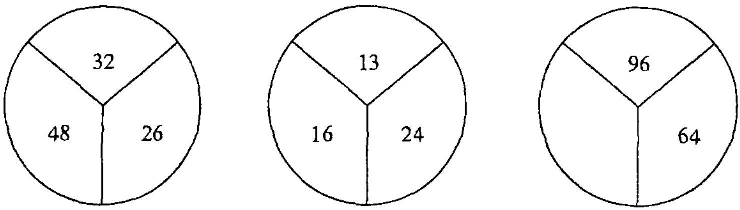
2	5	3	4	1
3	7	6	8	7

6. Вставьте в пустой сектор последнего круга число, которое соответствовало бы закономерности, объединяющей все остальные числа.

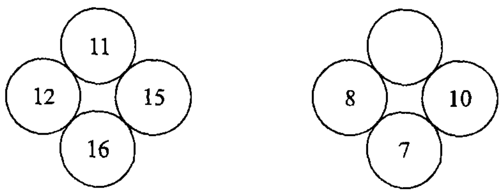
а)



б)



7. Вставьте в пустой кружок недостающее число



8. Вставьте недостающее число

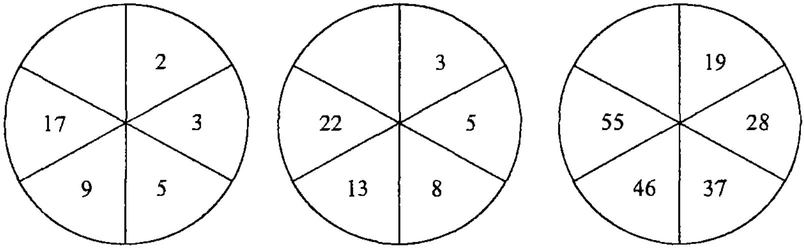
а) 1, ?, 9, 16, 25;

б) 18, 10, 6, 4, ?;

в) 1, 2, 2, 4, 16, 256, ?;

г) 8, 12, 10, 16, 12, ?.

9. Какое число следует поместить в пустой сектор круга ?



а) б) в)

10. Какое число было бы логично записать вместо многоточия ?

а) 285, 96, 33, 12, ... ;

б) 6, 10, 18, 34, ... ;

в) 0, 0, 2, 6, 12, ... ;

г) $\frac{5}{8}, \frac{10}{7}, \frac{10}{13}, \frac{17}{14}, \ldots$;

д) $\frac{16}{37}, \frac{28}{49}, \frac{41}{62}, \frac{58}{\ldots}$;

е) 2, 7, 24, 77, ... ;

ж) 6, 11, 18, 27, ...

11. Какое число было бы логично поместить в скобках ?

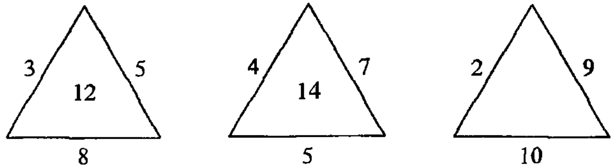
16 (14) 12 23 ( ) 7	143 (56) 255 218 ( ) 114	188 (300) 263 893 ( ) 915	182 (25) 374 625 ( ) 903	16 (27) 43 29 ( ) 56
а)	*б)*	*в)*	*г)*	*д)*

12. Какое число следует поставить вместо троеточия ?

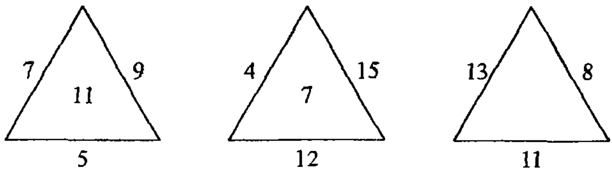
4 9 16 7 4 11 9 7 .	3 12 6 4 16 8 5 20 ...	18 25 4 16 20 3 6 15 .	14 9 5 21 8 13 28 9	6 8 7 36 64 49 24 48
а)	*б)*	*в)*	*г)*	*д)*

13 Какое число следует поставить в центре третьего треугольника ?

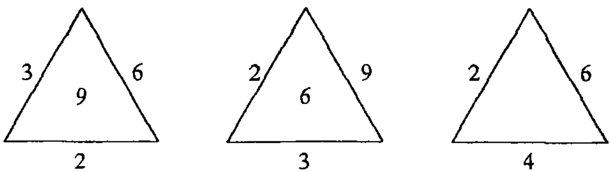
а)



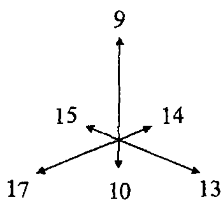
б)



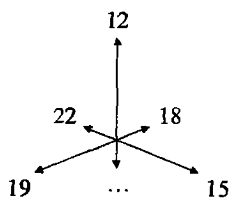
в)



14. Какое число следует поставить вместо троеточия ?



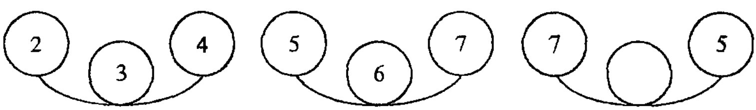
а)



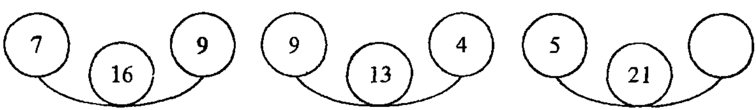
б)

15. Какое число следует вписать в пустой кружок ?

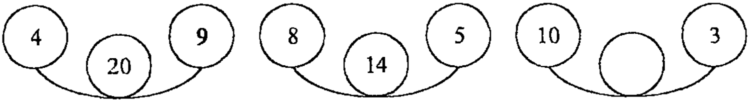
а)



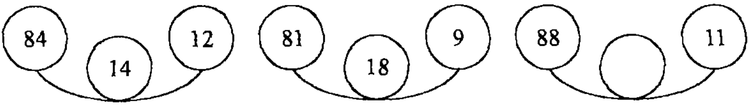
б)



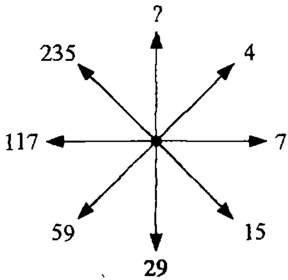
в)



г)



16. Какое число следует поставить вместо вопросительного знака ?



Установить имеющуюся закономерность в словах

17. Восстановите правильный порядок слов в следующих предложениях:

а) Весит 3 «Электроника» не телевизор более килограммов

б) Обратно периоду процесса пропорциональна частота периодического.

в) Пожалуй, не формой человека восхищался бы снежинок, который не изумительной найдется

г) Две цифры да единица счисления — всего нуль в двоичной системе.

д) Загрязнение растений и рек и морей делает рыб непригодными для их жизни.

е) Протяженность километров около кабельных тысяч составляет восьми линий и радиорелейных.

ж) В часы минуту карманные сутки на отставали.

з) Под наряд свой хранит зеленый брусника и снегом.

и) Не вы неужели еще кинолюбителем стали ?
к) В какие края теплые зимовать птицы улетают не ?
л) Работал волнах и транзисторный средних на приемник длинных.
м) Эта запомнилась картина ли вам ?
н) Два четырех из будет корень.
о) Какие тела постоянной не температуры имеют животные ?
п) Вашего деревьев во сколько собираетесь дома посадить дворе вы ?

18. Какое слово следует вписать в скобках ?

балык (блок) стекло **время ( ) рапорт**	**фляга (альт) жесть** **косяк ( ) мираж**	**багор (роса) тесак** **гараж ( ) табак**
а)	*б)*	*в)*
лоток (клад) лодка **олимп ( ) катер**	**книга (аист) салат** **порог ( ) омлет**	**пирог (поле) слеза** **рынок ( ) осада**
г)	*д)*	*е)*
байдарка (дача) очаг **корова ( ) пистон**	**бокс (кора) парк** **липа ( ) галс**	**18 (виза) 93** **81 ( ) 75**
ж)	*з)*	*и)*

19. Вставить в скобки такие трехбуквенные слова, чтобы они в сочетании с буквами слева от открывающей скобки довершали одно слово, а в сочетании с буквами справа от закрывающей скобки служили началом другого слова

ку [.. . ..] оса,	**ку [... ....] ал,**	**ку [........] аж,**
ку [.... ...] от,	**ку [.... ..] оед,**	**ку [.. .] ль,**
ку [......] ол,	**ку [.. ....] ет,**	**ку [.... . .] мус.**

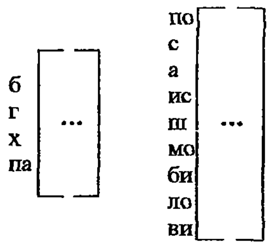
20 Какое из зашифрованных здесь слов лишнее ?
а) копес, харса, бонет, лигна;
б) качай, карай, лакай, сокай,
в) ликень, тольбак, вральфом, гермацан, тальцик,
г) аалтерк, ревод, дмончеа, каантс,

д) ниавд, аашпл, слот, лексор;
е) жаарб, тяха, нусск, кодал;
ж) атсен, тивонкр, ракыш, коон;
з) ТУКОВАР, ГОДОВАЛ, МАТРОКОС, КУСТЯК;
и) ЦОТРАМ, САТУРШ, КЛАНГИ, УРЕШБТ, КНУПИШ.

21. Вставьте в скобки такое трехбуквенное слово, чтобы оно заканчивало слово, начатое буквами, стоящими слева от открывающей скобки, и служило началом слова, заканчивающегося буквами, стоящими справа от закрывающей скобки

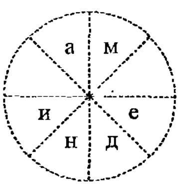
фор [...] ник	за [ ] ода	ме [...] олад	прик [..] ья	за [..] ка	та [...] ен
а)	*б)*	*в)*	*г)*	*д)*	*е)*

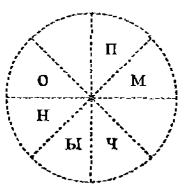
22. Найдите трехбуквенное слово, которое образует существительные со всеми приведенными сочетаниями букв:

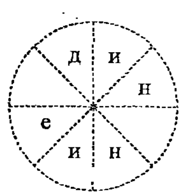


а) *б)*

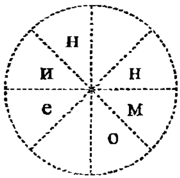
23. Вставьте пропущенные буквы



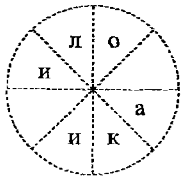




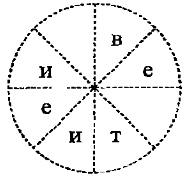
а) *б)* *в)*



г)



д)



е)

24. Какое из приведенных ниже слов нарушает закономерность, общую для всех остальных слов ?

а) дело, нотариус, турникет, клавиатура, адвокат, опись;
б) транзистор, артист, сатин, старт, роза, зима, трио;
в) араб, капитал, ребус, жаркое, драже;
г) падеж, кортик, сироп, полотно, балласт, паркет;
д) тачка, сани, телега, автобус, паровоз;
е) пеликан, клин, пила, пленка, калина, липа, пенка;
ж) муравей, паук, пчела, бабочка, комар;
з) абордаж, обводить, Новгород, всегда, надежный;
и) сельдь, кит, акула, тунец, треска;
к) Лондон, Париж, Нью-Йорк, Киев, Брюссель, Буэнос-Айрес, Оттава.

25. Какое слово, которое означает то же самое, что и слова, стоящие за скобками, следует поместить в скобках

оружие (...) овощ	**гримаса (. .) снаряд**	**родник (...) отмычка**	**рука (...) гроздь**
а)	*б)*	*в)*	*г)*

26. Расшифруйте названия животных: пират, лунка, шкала, накал, коран. Какое из этих животных самое маленькое ?

27. Слова **горн, арго** и **нега** зашифровали и получили слова **абвг, влца** и **гцвл**.

Как именно зашифровано каждое из указанных слов и как выглядят зашифрованные слова **рога** и **гангрена** ?

Анализ картинок

28. Сколько кубиков надо положить на весы, чтобы уравновесить один брусок ?

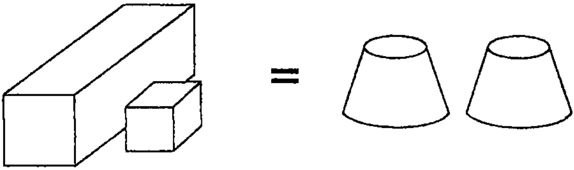


Рис 1

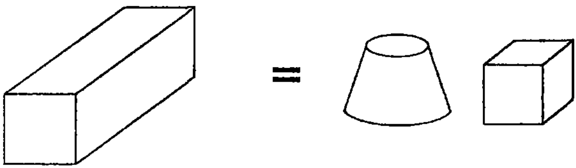
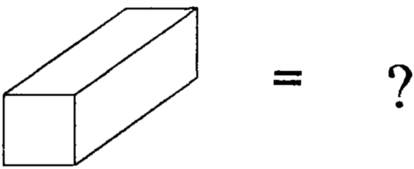
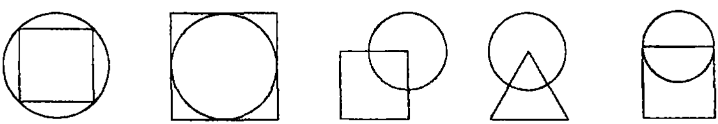


Рис 2



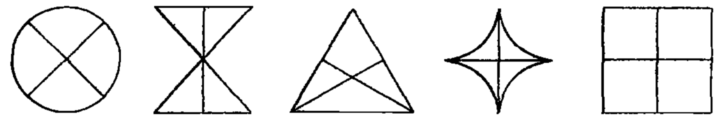
29. Какая из пяти следующих фигур нарушает закономерность, по которой построены остальные четыре ?



1 2 3 4 5

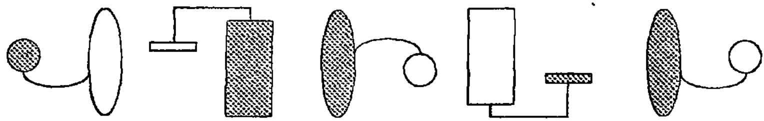
30. Какая фигурка «лишняя» ?

а)



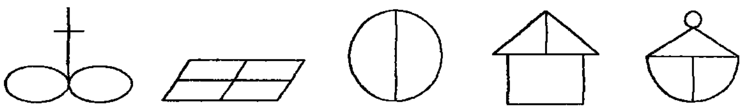
1 2 3 4 5

б)



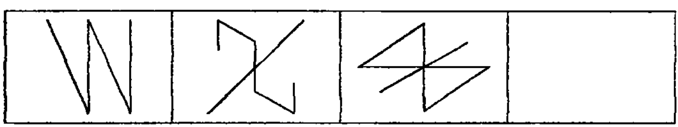
1 2 3 4 5

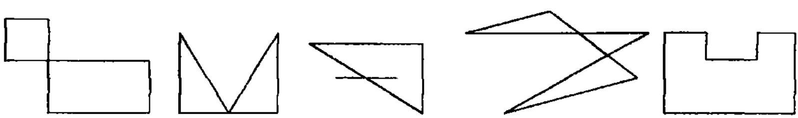
в)



1 2 3 4 5

31 Какую из пяти фигур, изображенных внизу, следует поместить в пустую клетку таблички ?

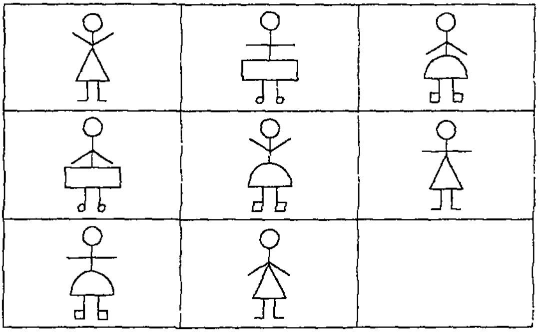


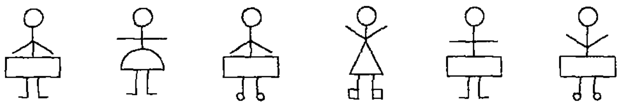


1 2 3 4 5

32. Какую из шести фигур следует вставить в пустую клетку таблицы ?

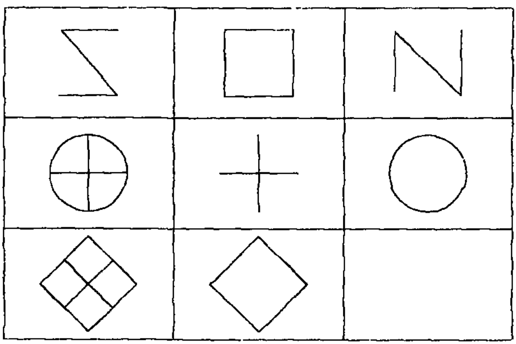
а)

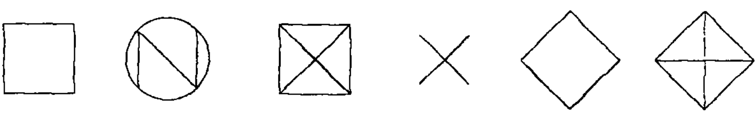




1 2 3 4 5 6

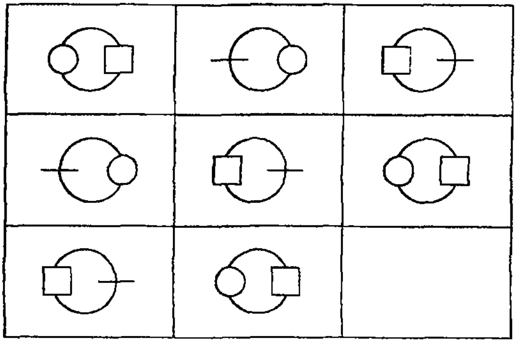
б)

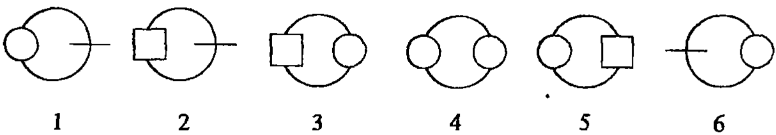




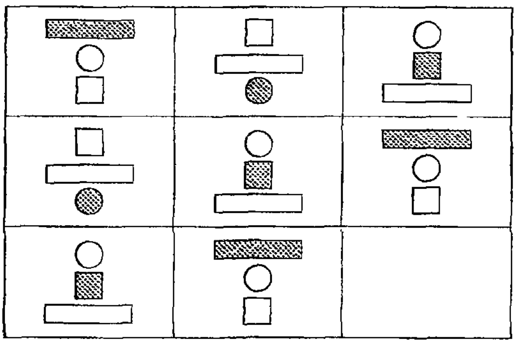
1 2 3 4 5 6

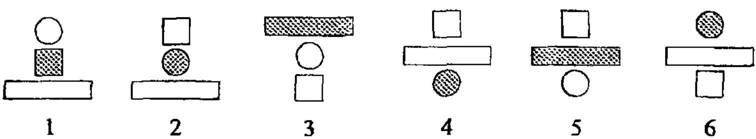
в)



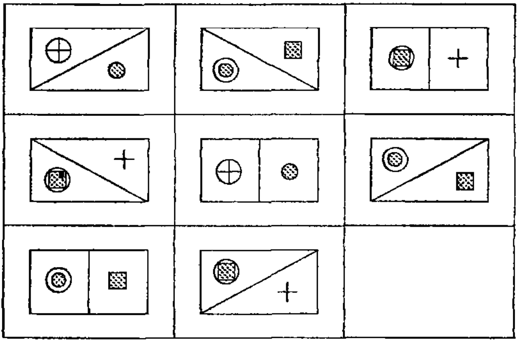


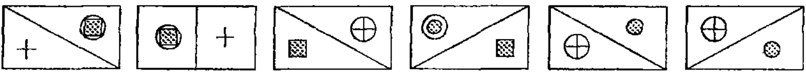
г)





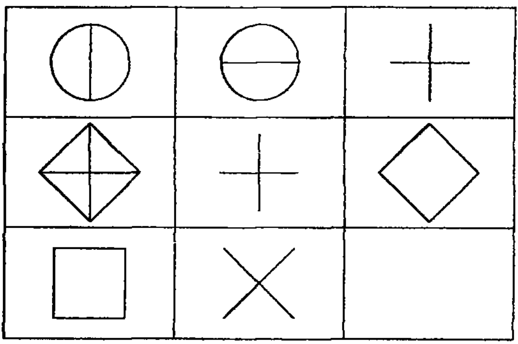
д)

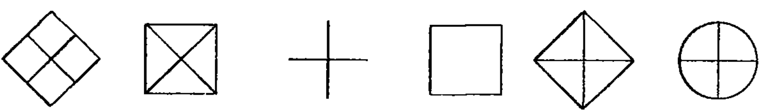




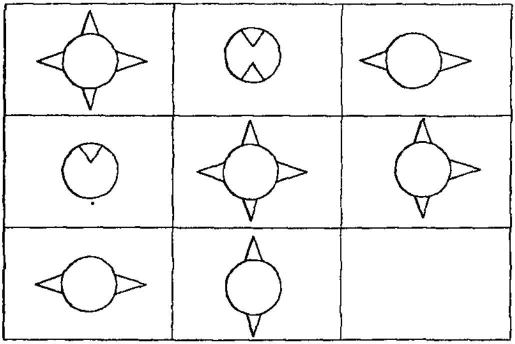
1 2 3 4 5 6

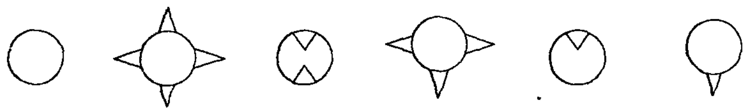
е)





1 2 3 4 5 6

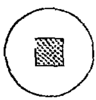
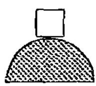
ж) 

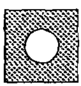


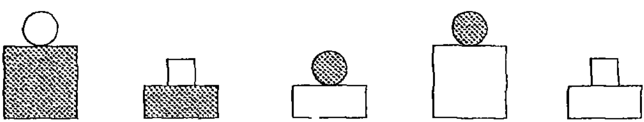
1 2 3 4 5 6

33. Определите правило, по которому в утверждении 1 из посылки получено следствие. Используя это правило, подберите следствие для посылки утверждения 2.

а)

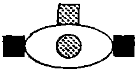
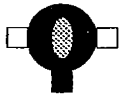
1. Из  следует 

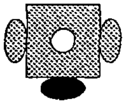
2 Из  следует . . .

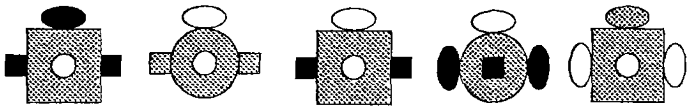


1 2 3 4 5

б)

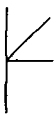
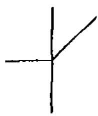
1. Из  следует 

2. Из  следует ...

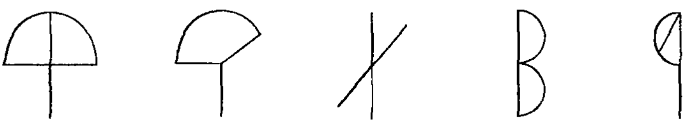


1 2 3 4 5

в)

1. Из  следует 

2. Из  следует ...



1 2 3 4 5

Задачи на взвешивание

34. Имеются 10 металлических кубиков, одинаковых по внешнему виду. Некоторые из них алюминиевые, а остальные — железные (более тяжелые). Требуется определить число железных кубиков, произведя не более 6 взвешиваний на чашечных весах.

35. Имеются 10 мешков со старинными монетами, в одном из которых находятся фальшивые монеты, а в остальных мешках — настоящие. Вес настоящей монеты — 10 г, а фальшивой — 9 г. Как на рычажных весах, снабженных шкалой и указателем величины разновеса, при помощи одного взвешивания определить мешок с фальшивыми монетами ? (Монеты из мешков можно доставать).

36. Имеются три сосуда вместимостью 8, 5 и 3 литров. Первый из них заполнен молоком. Как отлить точно 4 литра молока ?

37. Имеется бочонок, наполненный 10 литрами вина Как при помощи двух ведерок емкостью 7 и 3 литров отлить 5 литров вина ?

38. Имеются два ведра, емкостью 9 и 4 литров. Как с их помощью принести из колодца ровно 6 литров воды ?

39. Имеющиеся 9 кг крупы только за 3 взвешивания при помощи чашечных весов с гирями в 50 и 200 г распределить по двум пакетам: в один — 2 кг, а в другой — 7 кг.

40. Даны две бочки бесконечно большой емкости. Можно ли, пользуясь двумя ковшами емкостью $(2-\sqrt{2})$л и $\sqrt{2}$л, перелить из одной бочки в другую ровно 1 л жидкости ?

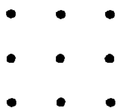
41. а) Цепочка с незамкнутыми концами состоит из 13 звеньев. Каждое звено имеет массу 1 грамм и может быть разомкнуто.

Какое минимальное количество звеньев цепочки нужно разомкнуть, чтобы, пользуясь образовавшимися частями цепочки как разновесами, можно было бы на чашечных весах уравновесить груз, масса которого в граммах выражается любым целым числом от 1 до 13 ?

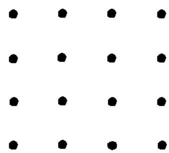
б) Если цепочка с незамкнутыми концами состоит из N однограммовых звеньев, то какое их минимальное количество достаточно разомкнуть, чтобы, используя полученные части цепочки как разновесы, можно было бы на чашечных весах уравновесить груз, масса которого в граммах выражается любым целым числом от 1 до N?

Задачи на построение

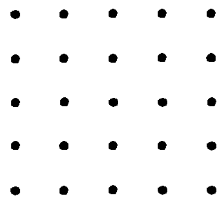
42. Как четырьмя (шестью, восемью) прямыми линиями, не отрывая карандаша от бумаги и не проводя одну и ту же линию дважды, перечеркнуть 9 (соответственно 16, 25) указанных точек



а)



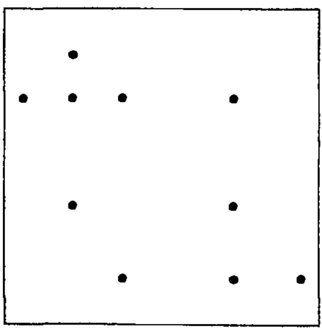
б)



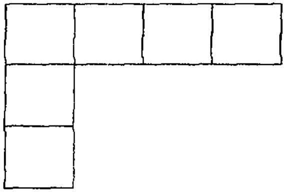
в)

43. Из 6 одинаковых палочек, например спичек, построить 4 одинаковых правильных треугольника.

44. Провести четыре параллельные прямые так, чтобы в каждой из пяти получившихся частей прямоугольника оказалось по две точки.



45. При помощи карандаша и линейки без делений найти центр тяжести фигуры, состоящей из 6 одинаковых клеток.



46. Построить многоугольник и указать внутри него такую точку, из которой ни одна сторона многоугольника не видна целиком. (Если соединить указанную точку с концами любой стороны многоугольника отрезками прямых, то по крайней мере один отрезок пересечет другую сторону многоугольника).

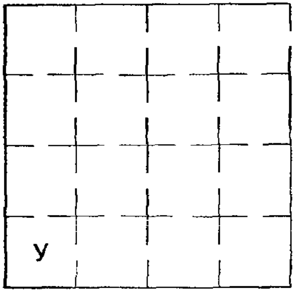
47. В квадратную таблицу, состоящую из 16 клеток (4 × 4), так расставить 7 точек (по одной точке в клетку), чтобы при вычеркивании любых двух строк и любых двух столбцов оставалась не зачеркнутой хотя бы одна точка.

Доказать, что при любом размещении в указанной таблице 6 точек всегда можно вычеркнуть две строки и два столбца, в которых находятся все точки.

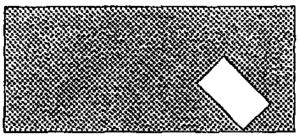
48. В подземелье крепости, план которого представлен на рисунке, в одной из камер томится узник. Из каждой камеры в каждую смежную с ней камеру ведет дверь, за которой находится стражник. У каждого стражника имеется один из 15 ключей, которыми отпирается дверь, ведущая на свободу.

У узника есть ключ от внутренней двери каждой камеры. При этом, если он впервые заходит в камеру со стражником, последний от неожиданности цепенеет и у него беспрепятственно можно взять ключ от двери, ведущей из подземелья. Однако, если узник второй раз входит в камеру со стражником, стражник оживает и поднимает тревогу — побег срывается.

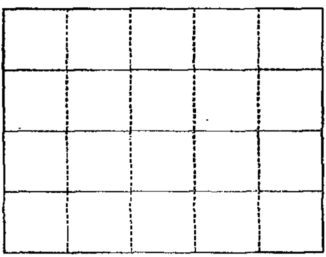
Может ли узник, знающий план подземелья и находящийся в камере, помеченной буквой У, выйти на свободу ?



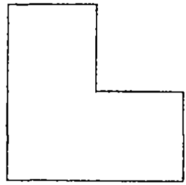
49. В прямоугольной пластинке прорезано прямоугольное отверстие. Разрезать эту пластинку по прямой линии на две части, имеющие равные площади.



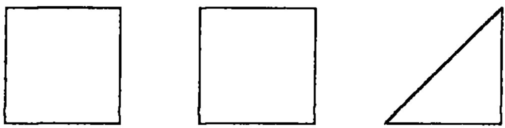
50. Разрезать прямоугольник на четыре фигуры одинаковой формы, состоящие из пяти квадратиков каждая.



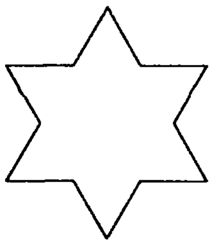
51. Фигуру, состоящую из трех равных квадратов, разрезать на две части так, чтобы из образовавшихся частей можно было бы составить квадратную рамку. При этом отверстие внутри рамки должно иметь квадратную форму, а его площадь должна быть равной 1/3 исходной фигуры.



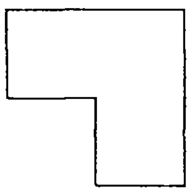
52. Среди фигур, согнутых из проволоки и имеющих три проекции заданных размеров, найти такую, на изготовление которой требуется проволока наименьшей длины.



53. Разрежьте правильную шестиконечную звезду на 4 части так, чтобы из них можно было сложить параллелограмм.



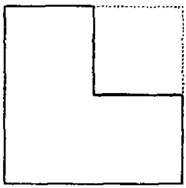
54. На изготовление какой фигуры, все три проекции которой одинаковы и имеют вид, изображенный на рисунке, требуется наименьшее количество проволоки ?



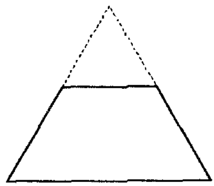
55. Как на треугольной клумбе вырастить 16 роз, расположив их в 12-ти прямолинейных рядах по 4 розы в каждом ряду ?

56 а) Разделить квадрат, от которого отрезана одна четверть (см. рис. 3), на 4 части, одинаковые по форме и размерам.

б) Разделить на 4 одинаковые части равносторонний треугольник, у которого срезана верхняя часть, равная по площади 1/4 площади треугольника



а)



б)

Рис 3

57. Разрезать произвольный треугольник на три части, из которых можно сложить прямоугольник.

58. Разрезать квадратный лист бумаги тремя прямыми линиями на четыре части так, чтобы из них можно было сложить тетраэдр, у которого не было бы равных ребер.

59. Фигуру, составленную из 5 равных квадратов (см. рис 4), разрезать вдоль двух прямых на 3 части таким образом, чтобы из них можно было бы сложить прямоугольник, большая сторона которого в 2 раза превосходит меньшую.

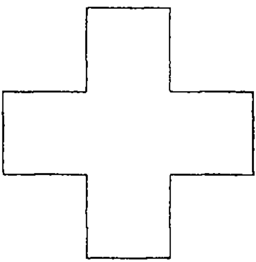


Рис. 4

60. Если известна сторона квадрата, то как, пользуясь лишь циркулем, определить его вершины ?

61. Фигуру, изображенную на рис. 5, разрезать по двум прямым линиям на такие 3 части, из которых можно сложить квадрат.

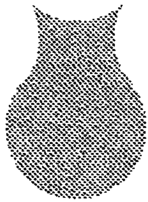
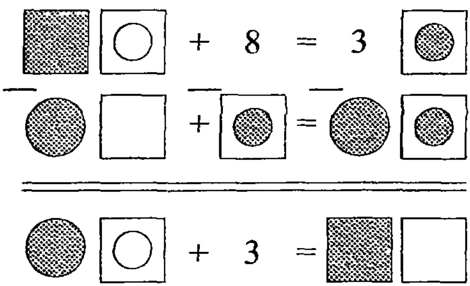


Рис 5

Числовые ребусы

62. Подберите вместо символов цифры (одинаковые символы означают одинаковые цифры) так, чтобы были верными результаты указанных арифметических действий — сложения и вычитания.



63. Расшифровать числовые ребусы, в которых одинаковые буквы означают одинаковые цифры:

$$\begin{array}{r} \text{АБВГ} \\ +\ \text{ФГЕТ} \\ \hline \text{АБЕГР} \end{array}$$

а)

$$\begin{array}{r} A \\ +\ AB \\ ABC \\ \hline BCB \end{array}$$

б)

$$\begin{array}{ccccc} ABB & : & KB & = & DL \\ - & & \times & & + \\ LPB & + & LD & = & KRA \\ \hline MMR & - & DLK & = & KDC \end{array}$$

в)

$$\begin{array}{ccccc} ABK & : & NK & = & NK \\ - & & \times & & + \\ VUE & + & KN & = & VEL \\ \hline ELP & - & PLN & = & NLK \end{array}$$

г)

$$\begin{array}{r} \times \begin{array}{r} CDE \\ AB \end{array} \\ \hline FEG \\ CDE \\ \hline BBCG \end{array}$$

д)

$$\begin{array}{r} + \begin{array}{r} ABCD \\ CBCA \end{array} \\ \hline DCEAE \end{array}$$

е)

64. Какие цифры надо поставить вместо звездочек в следующем арифметическом примере, чтобы в расшифрованной записи не было ошибок ?

$$\begin{array}{r} \times \begin{array}{r} 39* \\ 3* \end{array} \\ \hline + \begin{array}{r} **8* \\ 1191 \end{array} \\ \hline 1**98 \end{array}$$

65. Решить числовой ребус, в котором одинаковые буквы означают одинаковые цифры, а запись числа не может начинаться нулем.

$$\begin{array}{ccccc} \alpha\beta\delta & + & \pi\varphi & = & \alpha\varphi\alpha \\ : & & - & & - \\ \sigma\alpha & \times & \rho\lambda & = & \alpha\beta\delta \\ \hline \rho\lambda & + & \alpha\alpha & = & \pi\varphi \end{array}.$$

66. Если АБ×ВГ=ДДД, а Д×ВГ-АБ=ВВ, то чему равно произведение АБ×Г ?

67. Расшифруйте пример, в котором буквы заменяют цифры: (одинаковыми буквами *А, О* и *Х* зашифрованы одинаковые цифры).

$$\begin{array}{r} + \begin{array}{r} OXOXO \\ AXAXA \end{array} \\ \hline AXAXAX \end{array}$$

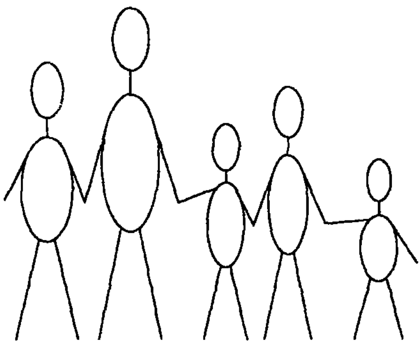
68. Расшифровать пример на деление, в котором одинаковыми буквами обозначены одинаковые цифры:

$$\begin{array}{r|l}
-ABCD & CD \\ \cline{2-2}
\underline{CD} & BCD \\
-EC & \\
\underline{DF} & \\
-BCD & \\
\underline{BCD} & \\
0 &
\end{array}$$

Логические задачи

69. Продавец получил для продажи несколько пачек конвертов по 100 конвертов в пачке. 10 конвертов он отсчитывает за 10 секунд. Сколько времени ему потребуется, чтобы отсчитать 70 конвертов ? А 90 ?

70. На рисунке самого младшего из пяти братьев изображены: Коля, Олег, Миша, Гена и Боря.



Известно, что Миша не самый высокий, но он выше Гены, Олега и Коли. Олег стоит рядом с Колей и меньше его. Гене, чтобы дотянуться до выключателя, приходится подставлять скамеечку или просить помощи у Олега. В каком порядке стоят мальчики ?

71. К реке подошел дедушка, у которого были качан капусты, коза и волк. Переправиться на противоположный берег реки можно было только в лодке, в которую дедушка за один раз мог взять либо только

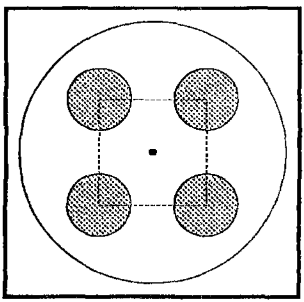
капусту, либо козу, либо волка. Значит, подумал дедушка, переправляться через реку надо будет несколько раз. Однако, вот незадача, если оставить волка с козой или козу с капустой без присмотра, то обязательно чего-то потом не досчитаешься: либо волк съест козу, либо коза — капусту.

Помогите дедушке переправиться через реку и сохранить в целости и сохранности его живность и капусту.

72. Небольшой воинский отряд подошел к реке, по которой на небольшой лодке плавали два мальчика. Лодка была настолько мала, что могла выдержать вес либо двух мальчиков, либо одного взрослого. Была поздняя осень, вода в реке — очень холодной, а на противоположный берег отряду нужно было обязательно переправиться.

Командир отряда сообразил, как можно всем перебраться на другою сторону реки. Какое решение он принял ?

73 Оригинальный замок придумали юные изобретатели Он имеет форму цилиндра, вдоль оси которого проделаны 4 круглых отверстия (на рисунке изображен вид замка сверху).



В каждом отверстии замка встроен специальный выключатель, который может находиться в одном из двух положений: «В» или «Н» Открыть замок можно только в том случае, если все выключатели установить одинаково — в положение «В» или «Н».

Поскольку все отверстия с выключателями закрыты, невозможно увидеть, в каком именно положении находится каждый выключатель. Можно лишь просунуть руки в любые два отверстия, на ощупь определить попожение выключателей и, по своему желанию, их изменить. Изменять положение можно как у одного выключателя, так и у обоих

Однако после того, как руки из отверстий убраны, центральная часть замка с отверстиями начинает очень быстро вращаться (продолжительность вращения — случайна) и после ее остановки невозможно определить, в каких именно отверстиях уже предпринималась попытка изменить положения выключателей, а в каких — нет.

Как же все-таки открывается этот замок ?

74. Группу солдат построили в колонну. В каждой шеренге колонны отметили самого высокого солдата и из этих «самых высоких» солдат выбрали самого низкого (солдата А).

Потом в каждом ряду колонны нашли самого низкорослого солдата и из этих «самых низкорослых» солдат выбрали самого высокого (Б)

Какой солдат выше: А или Б ?

75. После окончания одновременного опроса трех свидетелей автомобильной аварии ими были сделаны следующие заявления:

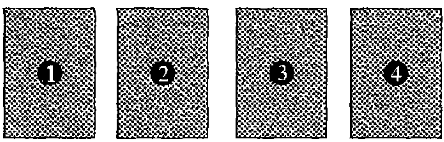
А.: «Б лжет»;

Б.: «В лжет»;

В.: «Ни А, ни Б верить нельзя».

Кто же из свидетелей говорил правду ?

76. Определить карты, обозначенные номерами по следующей информации:



а) справа от некоторой дамы рядом по меньшей мере один король;

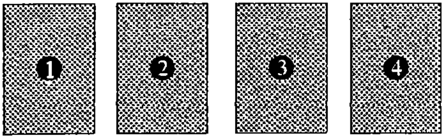
б) справа от некоторого короля рядом по меньшей мере одна дама;

в) справа от некоторого короля рядом по меньшей мере один король;

г) справа от некоторой карты пиковой масти рядом по меньшей мере одна карта той же масти;

д) справа от некоторой карты бубновой масти рядом по меньшей мере одна карта пиковой масти.

77. На столе лежат четыре карты о которых известно:



а) король находится дальше от валета, чем валет от дамы;

б) туз ближе к валету, чем дама;

в) от карты пиковой масти до карты трефовой масти расстояние меньше, чем от карты бубновой масти до карты пиковой масти;

г) карта трефовой масти лежит дальше от карты пиковой масти, нежели карта червонной масти;

д) карта червонной масти лежит рядом с королем слева.

Какие карты и в каком порядке лежат на столе ?

78. Андреев, Борисов и Владимиров хотели поехать отдыхать вместе и подали заявление директору с просьбой предоставить им отпуск в июле месяце. Через несколько дней они обратились к секретарю, чтобы узнать решение директора.

— Ваши заявления уже переданы в отдел кадров, — сказала секретарь.

— Отдыхать вам, к сожалению, придется в разные месяцы: в июне, июле и августе. Я точно не помню, но Андрееву разрешили уйти в отпуск не в августе, Борисову — не в июле, а вот Владимирову — в июле.

В отделе кадров выяснилось, что только одному из друзей секретарь правильно сообщила решение директора.

В каком месяце предстоит отдыхать каждому ?

79. Установить взаимно однозначное соответствие, которое имеется между двумя группами символов A, B, C, D и X, Y, Z, W, если известно, что

если $A \neq X$, то $C \neq Y$; (1)

если $B = Y$ или $B = Z$, то $A = X$; (2)

если $C \neq W$, то $B = Z$; (3)

если $D = Y$, то $B \neq X$; (4)

если $D \neq X$, то $B = X$. (5)

80. Все жители деревни Правдинка всегда на любой вопрос отвечают правильно, в отличие от жителей деревни Врунцы, которые всегда лгут.

Расположены эти деревни недалеко одна от другой, так что житель любой из них может прийти в гости в другую. Путешественник знал все это и поэтому, попав в одну из деревень, ему оказалось достаточным задать единственный вопрос первому встреченному им прохожему, чтобы определить в какой именно деревне он находится.

Какой это вопрос ?

81. На конгрессе встретились четверо ученых: физик, биолог, историк и математик. Каждый из них владел только двумя языками из четырех (русский, английский, французский, испанский), причем не было такого языка, на котором они могли бы разговаривать вчетвером. Был только один язык, который знали трое. Никто из ученых не владеет одновременно французским и русским языками. Физик не говорит по-английски, но он может служить переводчиком в беседе биолога и историка. Историк говорит по-русски и может разговаривать с математиком, который русского языка не знает. Оказалось, что физик, биолог и математик не могут беседовать втроем на одном языке.

Какими двумя языками владеет каждый из ученых ?

82. Студенты разных факультетов университета организовали эстрадный квартет. Михаил в нем играет на саксофоне. Пианист учится на физическом факультете. Ударника зовут не Валерием, а студента географического факультета зовут не Леонидом. Михаил учится не на историческом факультете. Андрей не пианист и не биолог. Валерий учится не на физическом факультете, а ударник — не на историческом. Леонид играет не на контрабасе.

На каком инструменте играет Валерий и на каком факультете он учится ?

83. В течение последних четырех лет Барков, Демин, Еремин и Фомин получали отпуск в мае, июне, июле или августе. Причем в каждом месяце в отпуске находился только один из них, а за четыре года всем довелось побывать в отпуске в каждом из указанных месяцев.

В первый год Демин отдыхал в июле, а во второй год — в августе. Еремин же во второй год отдыхал в мае. На третий год Барков получил отпуск в июне, а Фомин на четвертый год — в июле.

В каком месяце был в отпуске Еремин в первый год ?

84. На работу в одно из учреждений были приняты новые сотрудники. Среди них: Богданов — опытный специалист, одессит Смелов и киевлянин Суров — юристы-международники, недавно окончившая экономический факультет университета девушка по имени Нина — жена одного из новых сотрудников по имени Валентин. Другую принятую на работу девушку звали так же, как и Сурова, а фамилия у нее была такая же как и у Михаила. Оказалось, что Лазарев — киевлянин, а Василий — из Боярки. Кроме того, в фамилии Валентина — три гласных буквы, а Валерий очень любит классическую музыку.

Попробуйте установить фамилии и имена новых сотрудников учреждения.

85. Журналист прибыл на аэродром, чтобы побеседовать с Дубовым, Гришиным и Федотовым — летчиком, бортинженером и штурманом одного самолета. Пока он разыскивал экипаж, расспрашивая встречавшихся людей, ему довелось услышать, что: «Дубов — не летчик», «Федотов — не бортинженер», «Дубов — бортинженер», «Федотов — не летчик».

Во время же беседы с экипажем журналист выяснил, что из всех четырех «фактов» соответствует действительности только один.

Какая специальность у каждого из членов экипажа ?

86. Четыре шахматиста: Антонюк, Григоров, Даринцев и Маричев решили устроить между собой шахматный турнир. По условиям соревнования предполагалось, что каждому из них предстоит состязаться по очереди с другими тремя. Состязание каждой пары шахматистов продолжается до первой победы одного из соперников (ничьи не считаются).

Очки участники турнира решили подсчитывать таким способом: каждый получает по одному очку за каждую победу побежденного им соперника.

Распределение мест в турнире было решено производить традиционным способом: победителем будет считаться участник состязания, у которого окажется наибольшее число очков (если таковых окажется несколько, то все они будут признаны чемпионами).

После завершения турнира оказалось, что Григоров проиграл встречу Маричеву, но все же оказался единственным победителем соревнования. Даринцев же занял последнее место.

Каков был результат трех встреч, проведенных Антонюком ?

Задачи, решение которых предполагает составление уравнений

87. В пустые клетки вставить такие целые числа, чтобы выполнялись равенства:

2	+		+		=	4
+		-		+		+
1	-	3	+		=	
+		+		-		+
	+	5	-	5	=	
=		=		=		=
4	+		+	2	=	9

88. У Нади было орехов в 3 раза меньше, чем у Алеши. Если Наде дать еще столько же орехов, взяв их у Алеши, то у обоих будет орехов поровну.

Сколько орехов было у Алеши ?

89. Четыре коровы черной масти и три — коричневой дают за пять дней столько же молока, сколько три черных коровы и пять коричневых дают за четыре дня.

У каких коров выше удои: у черных или у коричневых ?

90. Старший брат идет от дома до школы 30 минут, а его младшая сестра — 40. Через какое время брат догонит сестру, если она вышла в школу на 5 минут раньше его ?

91. Две лестницы имеют одинаковую высоту h и одинаковое основание l, однако — разное число ступенек: у одной лестницы m ступенек, а у другой — n (рис. 6).

Как соотносятся между собой длины ковровых дорожек, которыми покрыты обе эти лестницы ?

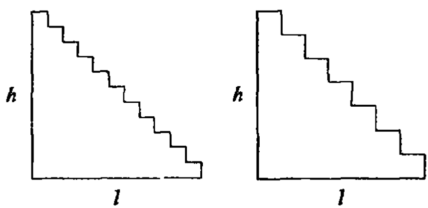


Рис. 6

92. Если некоторое количество монет расположить в виде квадрата, заполнив его внутренность, то 5 монет останутся лишними; если же сторону этого квадрата увеличить на одну монету, то не хватит 8 монет.

Сколько всего имеется монет ?

93. Человек поднимался в гору со скоростью 2 км/час, а затем, не останавливаясь на вершине, спустился с горы по той же дороге со скоростью 6 км/час.

С какой средней скоростью шел человек.

94 Сто деталей разложены на пять кучек. В первой и второй кучках — 52 детали, во второй и третьей — 43, в третьей и четвертой — 34, в четвертой и пятой — 30

Сколько деталей в каждой кучке ?

95. Если цены на товары снизить (увеличить) на 20 %, а заработную плату оставить без изменения, то на сколько процентов больше (меньше) можно будет купить товаров ?

96 Готовя суп, повар положил в него мало соли, и затем, суп пришлось досолить. Учтя это, в следующий раз повар положил в такое же количество супа в 2 раза больше соли. Этого тоже оказалось мало, но добавить соли пришлось вдвое меньшим ее количеством.

Какую часть нужного количества соли повар положил в суп в первый раз ?

97 Найти правильную дробь, большую 1/2, если известно, что от увеличения ее числителя на некоторое целое число и умножения знаменателя на то же самое число величина дроби не изменится (напомним, правильной называется дробь, у которой числитель меньше знаменателя).

98. Если переписать в обратном порядке цифры некоторого пятизначного числа, то в результате получится число, вчетверо большее первоначального. Найти это число.

99. Найти все такие четырехзначные числа, в которых цифра сотен — ноль, при вычеркивании которого число уменьшается в девять раз.

100. Если цифру 9, с которой начинается трехзначное число, перенести в конец этого числа, то в результате получится новое число, на 216 меньшее первоначального. Какого ?

101. Рыбаки выловили сетью из пруда 60 рыб, пометили их и снова бросили в воду. На следующий день рыбаки выловили в этом же пруду 80 рыб, и среди них — 5 меченых. Сколько рыб было в пруду ?

102 Рыбак плыл по озеру на байдарке и увидел, как прямо перед ним из воды выпрыгнул крупный лещ. 12 ударов весла насчитал рыбак до того момента, когда его байдарка пересекла круговую волну, вызванную «игрой» леща, и еще 12 ударов веслом он сделал, прежде чем байдарка во второй раз пересекла ту же круговую волну. Сколько ударов весла отделяло рыбака в первый момент времени от места, где выпрыгнул лещ ?

103. Марии сейчас 24 года. Анне было в два раза меньше лет, чем сейчас Марии, когда Марии было столько же лет, сколько сейчас Анне.

Сколько же лет Анне сейчас ?

104. Василию, Петру, Семену и их женам Наталье, Ирине и Анне вместе 151 год. Каждый муж старше своей жены на 5 лет. Василий на 1 год старше Ирины. Наталье и Василию вместе 48 лет, Семену и Наталье вместе 52 года.

Кто на ком женат и кому сколько лет ? (Возраст каждого супруга — целое число).

105. В классе 25 учеников. Из них 17 умеют ездить на велосипеде, 8 — бегать на лыжах, а 13 — плавать. Ни один из учеников не владеет всеми указанными видами спорта. Велосипедисты, лыжники и пловцы имеют хорошие или удовлетворительные оценки по математике, 6 же учеников класса по этому предмету не успевают.

Сколько учеников имеют отличные оценки по математике ? Сколько пловцов умеют бегать на лыжах ?

106. Какое одно и то же число нужно прибавить к числам 100 и 164, чтобы обе полученные суммы были квадратами целых чнсел ?

107. На склад привезли шесть ящиков, в каждом из которых оказалось разное количество гвоздей Ящики весили 15, 16, 18, 19, 20 и 31 кг. В

тот же день два магазина забрали пять ящиков, причем первый магазин получил по весу в два раза больше гвоздей, чем второй.

Каков вес ящика, который остался на складе ?

108. У какого трехзначного числа изображение в плоском зеркале в 89/12 раза больше самого числа ?

109. Сколько одинаковых членов в двух арифметических прогрессиях:

$$2, 7, 12, 17, 22, 27, \ldots$$
$$2, 5, 8, 11, 14, 17, \ldots,$$

каждая из которых состоит из 60 чисел ?

110. Некоторый участок земли с трех сторон нужно огородить забором, длиной 70 *м* (с четвертой стороны находится канал, так что там забор не требуется). Огороженный участок должен иметь прямоугольную форму и иметь наибольшую площадь. Найти длины сторон такого участка.

111 Саше и его сестре Леночкс купили пальто, ботинки и шапочки За все уплачено 75 рублей, причем каждая вещь для Саши стоит в полтора раза дороже такой же вещи для Леночки.

Сколько стоит каждая вещь, если Леночкино пальто стоит в 10 раз дороже ее шапочки, а ее ботинки и шапочка вместе стоят в 3 раза дешевле, чем Сашино пальто ?

112. В селе A живут 300 школьников, в селе B — 200 и в селе C — 100. Расстояния между селами: $AB = 4$ км, $BC = 3$ км и $AC = 5$ км.

Где надо построить школу, чтобы общее число «человеко-километров», проходимых школьниками, было наименьшим ?

113 Шестизначное число начинается с единицы Если ее перенести в конец числа, оно увеличится в три раза. Какое это число ?

114. Найти целое трехзначное число, которое в 11 раз больше суммы своих цифр.

115. Имеется 10 ящиков. В некоторых из них лежат еще по 10 ящиков меньшего размера. В некоторых из меньших ящиков лежат еще по 10 ящиков.

Сколько всего ящиков, если всего заполнено 54 ящика ?

116. При делении числа *n* на 2 в остатке получается 1, а при делении на 3 остаток равен 2.

Какой будет остаток, если число *n* разделить на 6 ?

117. У Андрея и его отца сегодня день рождения. Отец стал старше сына ровно в 11 раз Однако через 6 лет он будет старше в пять раз, через 16 лет — в 3 раза, а через 36 лет — всего лишь в 2 раза.

Сколько лет сегодня исполнилось Андрею и его отцу ?

118. Папа сказал Вите: «Забавно, произведение моего и твоего возраста не изменится, если в каждом из чисел порядок цифр поменять на обратный. А ведь ни мой, ни твой возраст не делится на 11».

«Между прочим, — заметил Витин дедушка, — произведение моего и Витиного возраста тоже не изменится, если цифры поменять местами».

«В этом конечно же что-то есть, — сказал Витин прадедушка, — но и у меня с Витей такая же зависимость между возрастами !»

Достаточно ли этого, чтобы определить, сколько лет Вите и его прадедушке?

119. На складе имеется 100 кг ягод Проведенный анализ ягод показал, что в них содержится 99% воды.

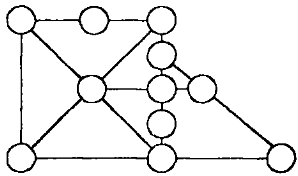
Повторный анализ ягод, проведенный через некоторое время, показал, что содержание воды в ягодах снизилось до 98%.

Сколько теперь весят ягоды ?

120. Найти трехзначное число, которое при делении на 11 давало бы частное, равное сумме квадратов цифр делимого.

121. Найти трехзначное число, для возведения в квадрат которого достаточно приписать к нему слева три цифры.

122. В одиннадцати кружках фигуры расставить одиннадцать чисел: 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 и 13 так, чтобы сумма чисел, расположенных на прямых линиях, равнялась 25.



123. Лена, Саша и Толя написали по двухзначному числу. Оказалось, что число, написанное Толей, составляет 2/9 суммы чисел Лены и Саши, а число, которое написала Лена, равно 5/6 суммы чисел Саши и Толи. Кроме того, при записи числа Саши используются те же цифры, что и при записи суммы чисел Лены и Толи, но в обратном порядке.

Какие числа были написаны, если известно, что их сумма является трехзначным числом ?

Разные задачи

124. Как при помощи пяти двоек получить число семь ?

125. Возможно ли, используя все 10 цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, получить число 9?

126 При делении какого минимального натурального числа на 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9 в остатке будет соответственно 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 и 8?

127. При делении какого наименьшего натурального числа на 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9 в остатке будет 1?

128. Найти минимальное натуральное число, оканчивающееся цифрой 2, переставив которую из конца записи этого числа в начало будет получено число, в 2 раза большее первоначального.

129. Каков остаток от деления числа 598726^{1998} на 9?

130. Леня, Дима, Коля и Алик подсчитывали свой улов после рыбалки. Выяснилось, что Алик поймал больше рыбы, чем Коля, общий улов Лени и Димы оказался таким же, как у Коли и Алика, однако Леня и Алик вместе поймали меньше рыбы, чем Дима и Коля.

Как распределились между мальчиками места по количеству выловленной рыбы ?

131. Сколько дней потребуется человеку, чтобы пересечь пустыню шириной 100 километров, если он может пройти в день только 20 километров и нести с собой трехдневный запас пищи и воды ? (Предполагать, что склады продуктов и воды можно устраивать в конце дневного перехода)

132. У одного из двух случайно встретившихся путешественников и решивших погреться у одного костра оказалось в два раза больше дров, чем у другого. Не успели еще путешественники разжечь костер, как к ним попросился присоединиться третий путешественник, у которого дров вообще не было.

После того, как все дрова были сожжены, путешественники стали прощаться и тот, который в костер не положил ни одного своего полена, оставил другим 12 рублей, предложив разделить их между собой по справедливости

Помогите путешественникам разделить эти деньги.

133. На сковороде можно одновременно поджаривать 4 котлеты На поджаривание одной стороны котлеты требуется 1 минута.

За какое минимальное время можно поджарить 6 котлет ?

134. У мальчика столько же сестер, сколько и братьев, а у его сестры вдвое меньше сестер, чем братьев.

Сколько в этой семье мальчиков и девочек ?

135. Во сколько раз путь по лестнице на шестой этаж дома длиннее, чем путь по той же лестнице на третий этаж, если пролеты между этажами имеют по одинаковому числу ступенек ?

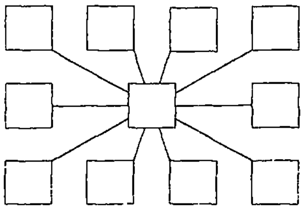
136. За борт корабля, стоящего у берега в океане, спущена веревочная лестница, нижняя ступенька которой касается воды Начался прилив, во время которого уровень воды стал подниматься каждый час на 15 сантиметров.

Через какое время покроется водой третья ступенька лестницы, если расстояние между ступеньками 30 сантиметров ?

137. Расположить 12 шашек вдоль сторон квадрата так, чтобы у каждой стороны их было по 5.

138. В квадратной комнате расставить вдоль стен 10 кресел так, чтобы у каждой стены их оказались равные количества.

139. Расставьте в пустых квадратиках числа от 1 до 11 так, чтобы сумма чисел в квадратиках, соединенных прямой линией, была равна 18



140 Квадрат какого двузначного числа равен кубу суммы его цифр ?

141. Какое шестизначное число, оканчивающееся цифрами 543, делится без остатка на 7, 11 и 13 ?

142. Директор завода, находящегося за городом, ежедневно приезжает поездом на одну станцию в одно и то же время. В это же время за ним приезжает легковой автомобиль, и он вовремя попадает на завод.

Однажды директор приехал на станцию на полтора часа раньше и, не дожидаясь автомобиля, пошел на завод пешком. Встретив на пути свой автомобиль, он сел в него и приехал на завод на 10 минут раньше обычного.

Во сколько раз скорость директора меньше скорости автомобиля ?

143. Две школьницы зашли в магазин канцелярских принадлежностей. Оказалось, что одной из них на покупку карандаша не хватает 25 копеек, другой — 1 копейки Кроме того, всех имеющихся у школьниц денег оказалось недостаточно, чтобы купить один карандаш.

Сколько стоит карандаш и сколько денег было у каждой из школьниц?

144. Шестизначное число делится на 7. Если последнюю его цифру перенести в начало, то будет ли полученное число делиться на 7 ?

145. Может ли сумма N первых n натуральных чисел при каком-либо значении n оканчиваться цифрой 7 ?

146. Известно, что в семье все девять братьев рождались через равные промежутки времени, а сумма квадратов их лет равна квадрату возраста отца.

Сколько лет каждому из братьев и их отцу ?

147. Найти двузначное число, равное сумме числа его десятков и квадрата числа единиц

148. Возраст пенсионера равен сумме возрастов его сына и внука или произведению возрастов другого внука и правнука

Сколько лет каждому из них, если все возрасты — квадраты целых чисел ?

149. Найти четырехзначное число $abcd$, если известно, что оно точный квадрат и что $c = 0$, а $a = b+d$.

150. Пусть A — 1998-значное число, делящееся на 9, B — сумма цифр числа A, C —сумма цифр числа B.

Чему равна сумма цифр числа C ?

151. Подставить вместо точки $\circ$ один из знаков + или - так, чтобы после выполнения соответствующих действий сложения и вычитания примеры были решены правильно

$$2 \circ 6 \circ 3 \circ 4 \circ 5 \circ 8 = 12,$$
$$9 \circ 8 \circ 1 \circ 3 \circ 5 \circ 2 = 12,$$
$$8 \circ 6 \circ 1 \circ 7 \circ 9 \circ 5 = 12,$$
$$3 \circ 2 \circ 1 \circ 4 \circ 5 \circ 3 = 12,$$
$$7 \circ 9 \circ 8 \circ 4 \circ 3 \circ 5 = 12$$

152 В следующих записях вместо точки $\circ$ подставьте один из знаков: +, -, $\times$ или :, чтобы после выполнения соответствующих арифметических действий были справедливы равенства

$$\circ\ 9 \circ 10 \circ 1 \circ 11 \circ 8 = 0,$$
$$\circ\ 4 \circ 5 \circ 2 \circ 6 \circ 4 = 0,$$
$$\circ\ 5 \circ 4 \circ 8 \circ 4 \circ 10 \circ 7 = 0,$$

$$\circ 10 \circ 1 \circ 6 \circ 7 \circ 3 \circ 7 = 0,$$
$$\circ 5 \circ 4 \circ 15 \circ 12 \circ 4 \circ 6 \circ 4 = 0,$$
$$\circ 2 \circ 5 \circ 6 \circ 1 \circ 16 \circ 5 \circ 4 = 0,$$
$$\circ 10 \circ 11 \circ 1 \circ 8 \circ 6 \circ 14 \circ 3 \circ 7 = 0$$

153. Может ли число, в десятичной записи которого имеется 300 единиц, а остальные цифры — нули, быть точным квадратом ?

154. Какое минимальное целое положительное число при делении на 3, 4, 5 и 6 дает в остатке соответственно 1, 2, 3 и 4 ?

155 За покупку конфет четырех различных сортов «Белочка» — 15 штук по 24 копейки за одну конфету, «Мишка на севере» — 7 штук по 28 копеек, «Маугли» — 12 штук и «Чебурашка» — 16 штук — в магазине был выписан чек на сумму 12 гривень 58 копеек. Однако покупатель сразу же обнаружил ошибку в чеке Как он рассуждал ?

156. Если в 12 часов ночи идет дождь, то можно ли надеяться на то, что через 72 часа будет солнечная погода ?

157. Определите номер автомашины, выраженный четырьмя разными цифрами Известно, что среди этих цифр нет нуля, а сумма третьей и четвертой цифр номера в полтора раза больше цифры, стоящей на втором месте Кроме того, вторая цифра наибольшая из цифр номера, а число, выраженное второй, третьей и четвертой цифрами, кратно сумме этих цифр, причем среди цифр частного есть первая цифра номера автомашины.

158 Два приятеля, Иванов и Петров, договорились встретиться в условленный час в месте, находящемся в двух километрах от дома Иванова Так как Петров жил дальше от места встречи, чем Иванов, ему, несмотря на то, что он ходит в полтора раза быстрее Иванова, надо было выйти из дому на 40 мин раньше своего приятеля. Но Петров задержался и вышел на 25 мин позже намеченного времени.

Пройдя три четверти пути, Петров вспомнил, что оставил дома обещанную Иванову книжку, и решил вернуться домой. Но, пройдя половину пройденного ранее пути, он понял, что все равно опоздал к месту встречи, и направился по прямой тропинке к дому Иванова.

Иванов, придя к месту встречи и не застав там приятеля, вернулся домой, где застал Петрова, поджидавшего его уже 15 мин.

Сколько километров прошел Петров ?

159. Велосипедист ездит на работу по шоссе, которое вначале идет параллельно железной дороге, а затем поворачивает и пересекает ее. Велосипедист выезжает каждое утро в одно и то же время. Как только он подъезжает к переезду, его догоняет поезд.

Однажды велосипедист выехал из дома на 15 минут позже обычного и поезд, который всегда следует точно по расписанию, нагнал его в 6 км от переезда.

Какова скорость поезда, если известно, что скорость велосипедиста равна 18 км/час ?

160. Взяли 12 листов бумаги. Некоторые из них разорвали на 4 части каждый, а потом какие-то из получившихся листков также разорвали на 4 части, и так — несколько раз. Наконец, число получившихся кусков бумаги сосчитали. Возможно ли, чтобы после подсчетов их оказалось 97?

161. Математик обратил внимание на то, что двузначный номер его квартиры есть разность квадратов двух чисел, причем меньшее из этих чисел равно числу десятков номера квартиры, которое вдвое больше числа единиц.

Какой номер квартиры математика ?

162. Группу из 39 рабочих распределили на несколько основных бригад с равным количеством человек. Из оставшихся рабочих сформировали 4 вспомогательные бригады, количество человек в каждой из которых равно числу основных бригад.

Сколько рабочих в каждой основной и вспомогательной бригаде ?

163. Дата 9 сентября 1999 года может быть записана так: 9.9.99.

Сколько раз в течение одного столетия дата, состоящая из числа, месяца и двух последних цифр года, может быть записана при помощи только одной цифры ?

164. Найти все натуральные числа, перестановка начальных цифр записи которых приводит к пятикратному увеличению этих чисел ?

165. В зале, где предполагалось провести научную конференцию, было около 100 кресел, но участников на конференцию пригласили значительно больше. Пришлось внести дополнительно еще столько же стульев, сколько было кресел, но тогда 1/12 часть всех мест осталась незанятой

Сколько человек приехало на конференцию ?

166 Найти трехзначное число, которое при делении на сумму его цифр дает число, первая цифра которого на 3 меньше первой цифры, а последняя — на 4 больше последней цифры искомого числа. Кроме того предполагается, что первая цифра искомого числа и последняя цифра суммы его цифр — одна и та же

167 В корзине лежат 120 шаров различного цвета: 32 — синих, 26 — красных, 14 — зеленых, 28 — белых; остальные 20 шаров окрашены в желтый, черный и коричневый цвета.

Какое минимальное количество шаров нужно вытащить, не заглядывая в корзину, чтобы среди них обязательно оказалось 20 шаров одного цвета?

168. Пираты, не сумев поделить добычу, затеяли драку В результате у 95 % из них оказался синяк под левым глазом, у 90 % — под правым глазом, у 80 % пиратов был выбит зуб, а у 75 % была вывихнута рука

Какое минимальное число пиратов (в процентах) получило сразу все вышеперечисленные «трофеи» ?

169 Доказать, что сумма кубов любого количества последовательных натуральных чисел, начиная с 1, является квадратом целого числа.

ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

Установить имеющуюся закономерность в числах

1 20 Число, находящееся в нижнем квадратике, является полусуммой чисел, записанных в двух верхних. □

2 а) 76 Число, находящееся в центральном кружке, равно удвоенной сумме чисел, находящихся в боковых кружках.

б) 350 Число, находящееся в центральном кружке, равно полусумме чисел, находящихся в боковых кружках. □

3. 4. Число, находящееся в треугольнике, равно частному от деления произведения чисел, находящихся у боковых сторон треугольника, на число, записанное у его основания □

4. 426. Остальные числа делятся на 9. □

5. Последняя. Разность чисел в нижних и верхних клетках всех остальных табличек образует натуральный ряд чисел: 1, 2, 3, 4, .. □

6. а) 7 Число, находящееся в нижнем секторе круга, составляет одну треть суммы чисел, находящихся в верхних секторах.

б) 52. Числа, находящиеся во втором и третьем кружке получены соответственно делением и умножением на 2 чисел, находящихся в первом кружке. □

7. 11. Число, находящееся в верхнем кружке, равно сумме чисел, записанных в два средних кружка, из которой вычитается число, помещенное в нижний кружок. □

8. а) 4. Число a_n, находящееся на n-м месте в указанной группе чисел, вычисляется по формуле $a_n = n \times n = n^2$.

б) 3. Каждое последующее число a_{n+1} вычисляется через предыдущее число a_n по формуле $a_{n+1} = (a_n + 2) / 2$.

в) 65 536. Каждое число, начиная с третьего, равно произведению всех предыдущих чисел (или, начиная с четвертого, равно квадрату предыдущего числа).

г) 20. Каждое последующее число a_{n+1} ряда вычисляется через предыдущее число a_n по формуле $a_{n+1} = 2a_n - 4$, если $n = 1$, $n = 3$ или $n = 5$, и по формуле $a_{n+1} = a_n \backslash 2 + 4$, если $n = 2$ или $n = 4$. □

9. а) 33. Каждое число, начиная со второго, образуется прибавлением к числу, помещенному в предыдущий сектор, степени двойки, определяемой уменьшенным на 2 порядковым номером n сектора: $a_n = a_{n-1} + 2^{n-2}$, $n = 2,3,...,6$ (или каждое последующее число равно удвоенному предыдущему минус 1: $a_n = 2a_{n-1} - 1$, $n = 2,3,..,6$).

б) 39. $a_n = 2a_{n-1} - n + 1$, $n = 2,3,...,6$.

в) 64. Порядковый номер n сектора определяет число десятков, а 10-n — число единиц в числе, помещенном в секторе. □

10. а) 5. Каждое последующее число a_{n+1} вычисляется через предыдущее a_n по формуле $a_{n+1} = (a_n + 3) / 3$.

б) 66. $a_{n+1} = 2a_n - 2$.

в) 20. $a_n = (n-2)(n-1)$, $n = 1, 2, 3,...$

г) $\frac{19}{22}$. Записаны две последовательности чисел, попеременно находящиеся в числителе и знаменателе. Каждый последующий член той a_{n+1} и другой последовательности образуется по формуле $a_{n+1} = a_n + n$

д) 79. В знаменателе находится сумма числителя и 21

е) 238. Число a_n, находящееся на n-м месте в указанной группе чисел, вычисляется по формуле: $a^n = 3^n - n$, в которой $n = 1,2,3..$

ж) 38 $a_n = (n+1)^2 + 2$, □

11 а) 15 Число в скобках — полусумма крайних чисел, находящихся в одной строке.

б) 52. Число в скобках равно абсолютной величине полуразности чисел, стоящих слева и справа от скобок.

в) 88. Число в скобках — учетверенная разность правого и левого чисел за скобками.

г) 25. Число в скобках равно сумме цифр чисел, находящихся вне скобок.

д) 27. Число в скобках равно разности чисел, находящихся вне скобок. □

12. а) 15 Каждое число третьей строки образуется по следующему правилу. к квадратному корню числа, находящемуся в первой строке прибавляется число, стоящее во второй строке (разумеется, все указанные числа находятся в одном и том же столбце).

б) 10. Число в третьей строке образуется в результате прибавления к числу, стоящему во второй строке, разности чисел во второй и первой строках

в) 3. В каждом столбце число, находящееся в третьей строке, образуется по правилу. из числа, находящегося в этом же столбце в первой строке, вычитается число второй строки и результат умножается на 3.

г) 19. Число, находящееся в третьем столбце, получается при вычитании из числа, находящегося в первом столбце, числа, находящегося в этой же строке — во втором столбце

д) 35. Число a_3, находящееся в третьей строчке таблицы вычисляется по формуле $a_3 = a_2 - 2 \cdot a_1$, в которой a_1 — число, записанное в первой строке данного столбца, а $a_2 = a_1 \times a_1$ — во второй. □

13 а) 18. Число, находящееся внутри треугольника, составляет одну десятую часть произведения чисел, находящихся вне треугольника.

б) 10. Внутри треугольника помещается разность двух чисел, из которых уменьшаемое — сумма чисел, находящихся у боковых сторон треугольника, а вычитаемое — число, находящееся у основания треугольника в) 3. Число, находящееся внутри треугольника, равно частному от деления произведения чисел, находящихся у боковых сторон треугольника, на число, находящееся у его основания □

14 6. На рисунке а) сумма чисел, находящихся у концов длинных стрелок, равна сумме чисел, находящихся у концов коротких Предполагая наличие этой же закономерности при подборе чисел для рисунка б), легко определить недостающее на этом рисунке число.*

15. а) 6 Число, находящееся в центральном кружке, равно полусумме чисел, находящихся в боковых кружках.

б) 16. Число, находящееся в центральном кружке, равно сумме чисел, находящихся в боковых кружках.

в) 11. Число, находящееся в центральном кружке, равно сумме половины числа, находящегося в левом кружке и удвоенного числа, находящегося в правом кружке.

г) 16. Число, находящееся в центральном кружке, равно удвоенному частному от деления числа, находящегося в левом кружке, на число, находящееся в правом кружке. □

16. 469. Число a_{n+1} , находящееся у конца n-й стрелки, вычисляется по формуле $a_{n+1} = 2a_n + (-1)^n$, где n = 1,2,.. ,7, а число 4 записано у конца первой стрелки. □

Установить имеющуюся закономерность в словах

17. а) Телевизор «Электроника» весит не более 3 килограммов.

б) Частота периодического процесса обратно пропорциональна периоду T.

в) Пожалуй, не найдется человека, который не восхищался бы изумительной формой снежинок.

г) В двоичной системе счисления всего две цифры — единица да нуль.

д) Загрязнение рек и морей делает их непригодными для жизни растений и рыб.

е) Протяженность кабельных и радиорелейных линий составляет около восьми тысяч километров.

ж) Карманные часы отставали на минуту в сутки.

з) Брусника и под снегом хранит свой зеленый наряд.

и) Неужели вы еще не стали кинолюбителем?

к) Какие птицы не улетают зимовать в теплые края?

л) Транзисторный приемник работал на длинных и средних волнах.

м) Запомнилась ли вам эта картина?

н) Корень из четырех будет два.

о) Какие животные не имеют постоянной температуры тела ?

п) Сколько деревьев вы собираетесь посадить во дворе вашего дома ? □

18. а) **вето.** «В» и «е» — соответственно первая и третья буквы слова «время», «т» и «о» — соответственно последняя и третья буквы с конца слова «рапорт» (по такому принципу образовано слово «блок» из слов «балык» и «стекло»).

б) **кожа.** Первая и вторая буквы слова в скобках — это соответственно пятая и вторая буквы первого слова, а третья и четвертая — соответственно последняя и предпоследняя буквы второго слова.

в) **жаба.** Первая и вторая буквы слова в скобках — это соответственно последняя и предпоследняя буквы первого слова, а третья и четвертая — третья и четвертая буквы второго слова.

г) **порт.** Первая и вторая буквы слова в скобках — это соответственно пятая и первая буквы первого слова, а третья и четвертая — последняя и третья буквы второго слова.

д) **грот.** Первая и вторая буквы слова в скобках — это соответственно пятая и третья буквы первого слова, третья и четвертая — первая и пятая буквы второго слова.

е) **роса.** Первая и вторая буквы слова в скобках — это соответственно первая и четвертая буквы первого слова, третья и четвертая буквы — вторая и третья буквы второго слова.

ж) **рост.** Слова в скобках образуются из двух букв, находящихся в середине слов, стоящих за скобками.

з) **пила.** Слова в скобках образуются из взятых в обратном порядке вторых и третьих букв слов, стоящих за скобками.

и) **джаз.** Цифры соответствуют порядковому номеру букв в алфавите: 1-а, 2-б, 3-в и т.д. Цифры заменить соответствующими буквами и записать получившееся слово справа налево. □

19. Ответ:

ку [пол] оса,	ку [бок] ал,	ку [мир] аж,
ку [рок] от,	ку [мир] оед,	ку [мыс] ль,
ку [сок] ол,	ку [пол] ет,	ку [лак] мус. □

20. а) **харса** (Зашифрованы: песок, сахар, бетон, глина. Расшифрованное слово «сахар» (харса) не означает строительный материал).

б) **лакай** (Зашифрованы чайка, кайра, лайка, сойка. Слово «лакай» — зашифрованное название животного, остальные слова — зашифрованные названия птиц)

в) **тальцик** (Зашифрованы никель, кобальт, вольфрам, марганец, кальцит. Из этих слов только кальцит (тальцик) не является названием химического элемента).

г) **дмончеа** (Зашифрованы тарелка, ведро, чемодан, стакан)

д) **аашпл** (Зашифрованы: диван, лапша, стол, кресло)

е) **нусск** (Зашифрованы баржа, яхта, скунс, лодка. Скунс — название млекопитающего).

ж) **тивонкр** (Зашифрованы стена, вторник, крыша, окно)

з) **КУСТЯК** (Зашифрованы ВОРКУТА, ВОЛОГДА, КОСТРОМА, ЯКУТСК. Только ЯКУТСК находится в Сибири)

и) **КНУПИШ** (Зашифрованы: МОЦАРТ, ШТРАУС, ГЛИНКА, ШУБЕРТ, ПУШКИН. Только ПУШКИН — фамилия поэта, остальные — фамилии композиторов) □

21. а) ель фор [ель] ник,

б) бор за [бор] ода;

в) шок ме [шок] олад,

г) лад прик [лад] ья,

д) кон. за [кон] ка,

е) бак. та [бак] ен □

22 а) ром,

б) ток. □

23. а) **Р** и **Т** Получится слово **ДЕРМАТИН**, если читать против часовой стрелки.

б) **Е** и **И** Слово **ЧЕМПИОНЫ** (читать против часовой стрелки).

в) **Е** и **Е**. Слово **ЕДИНЕНИЕ** (читать по часовой стрелке)

г) **С** и **Е**. Слово **СОМНЕНИЕ** (читать против часовой стрелки).

д) **П** и **Т**. Слово **ПОЛИТИКА** (читать против часовой стрелки)

е) **З** и **С** Слово **ИЗВЕСТИЕ** (читать по часовой стрелке) □

24. а) **адвокат** В остальных словах первые две буквы — две соседние буквы алфавита.

б) **зима** Это слово нельзя составить из букв, входящих в состав слова «транзистор».

в) **жаркое** Первая и последняя буквы остальных слов находятся рядом в алфавите.

г) **паркет**. В остальных словах последние две буквы соседствуют в алфавите.

д) **сани**. Это единственный из указанных бесколесный вид транспорта.

е) **калина**. Все остальные слова образованы из букв слова «пеликан».

ж) **паук**. Только у паука восемь ног, у всех остальных — по шесть.

з) **надежный**. В каждом из первых четырех слов имеется пара последовательных букв алфавита, которая смещается в каждом последующем слове на 1 позицию вправо: абордаж, обводить, Новгород, всегда.

и) **кит**. Кит — млекопитающее. Все остальные слова — названия рыб.

к) **Нью-Йорк**. Все остальные слова — названия столиц государств. □

25. а) лук,

б) *мина*,

в) ключ,

г) кисть. □

26. тапир, кулан, шакал, калан, норка. **Самое маленькое из перечисленных животных** — норка. □

27. **горн - влца, арго - гцвл, нега - абвг, рога - цлвг, гангрена - вгавцбаг**.

Только в слове **арго** вторая и последняя буквы такие же, как соответственно третья и вторая буквы в слове **горн**. Этим же свойством обладают лишь зашифрованные слова **гцвл** и **влца**. Значит, во-первых, слова **арго** и **горн** зашифрованы соответственно как **гцвл** и **влца** и поэтому **нега - абвг** и, во-вторых, правило шифрования состоит в замене: буквы а на г (а → г), р → ц, г → в, о → л, н → а, е → б.

Следовательно, зашифрованный вид слова **рога - цлвг**, а слова **гангрена - вгавцбаг**. □

Анализ картинок

28. 3 кубика.

Два бруска уравновешиваются двумя кубиками и двумя усеченными пирамидками (следует из рис. 2).

Две усеченные пирамидки заменим одним бруском и одним кубиком (см. рис.1). Тогда на одной чашке весов будут два бруска, а на другой — брусок и 3 кубика. Весы останутся в равновесии, если с обеих чашек весов снять по одному бруску. В результате на одной чашке весов останется один брусок, а на другой — 3 кубика. □

29. 4 Остальные фигуры построены из квадрата и кружочка. □

30. а) 3 Все остальные фигуры имеют горизонтальную ось симметрии (или состоят из четырех одинаковых частей)

б) 5. Первая и третья, а также вторая и четвертая фигурки составляют пару В каждой паре одна из фигурок повернута на 180°, а серые и белые части фигурок меняют цвет Фигурка 5 не подчиняется этим закономерностям.

в) 2 Все остальные фигуры имеют вертикальную ось симметрии (или имеют вертикальную линию). □

31 4. Эта фигура, так же как и фигуры изображенные в табличке, не имеет прямых углов. □

32 а) 6. Имеются всего лишь три человечка, отличающиеся между собой фасонами юбки и типом обуви В каждой строке таблицы должен быть каждый из этих человечков, положение рук которого должно измениться и отличаться от положения рук других человечков (руки могут либо быть подняты, либо опущены, либо расположены горизонтально).

б) 4. Каждая фигура, находящаяся в третьем столбце, образуется путем наложения фигур из первого и второго столбцов соответствующей строки и удаления линий, которые у обеих фигур совпадают.

в) 6. В этом случае каждая строка таблицы содержит перестановку трех фигур, находящихся в ее первой строке.

г) 4 В каждом ряду в каждой группе фигурок круг, квадрат и прямоугольник встречаются в разных комбинациях, причем один элемент закрашенный, а два остальных — нет

д) 5. В каждой клетке первой строки таблицы представлена фигура, которая находится в каждой последующей строке таблицы При этом положение разделительной линии внутри каждой фигуры не должно повторяться.

е) 2. Фигура в третьем столбце таблицы состоит из элементов, которые не являются общими для фигур, находящихся в соответствующей строке в предыдущих столбцах таблицы.

ж) 2 Припишем шипу, направленному вовнутрь круга –1, а наружу — 1 Тогда количество шипов и их ориентация, изображенных на круге в третьем столбце таблицы, определится суммой чисел, приписанных шипам у кругов, находящихся в первом и втором столбце этой же строки таблицы □

33. а) 3. Внешняя фигурка посылки в следствии заменяется верхней половинкой, на которую сверху помещается внутренняя фигурка посылки. Цвет фрагментов при этом изменяется по правилу: белый на серый, а серый на белый

б) 4. При переходе от посылки к следствию цвета фрагментов фигурки меняются по правилу: белый на серый, серый на черный, черный на белый.

Внешние фрагменты в посылке и следствии одни и те же, однако верхние и нижние внешние фрагменты меняют свои местоположения на противоположные.

Внутренний фрагмент посылки определяет основной фрагмент в следствии. Основной фрагмент посылки является внутренним фрагментом в следствии, повернутым на 90° по отношению к его ориентации в посылке.

в) 2. Верхняя половинка фигурки поворачивается против часовой стрелки на 45°. После этого угловые размеры части полученной фигурки, находящейся в верхнем левом квадранте, увеличиваются в два раза. □

Задачи на взвешивание

34. Возьмем два любых кубика и сравним их на весах. Возможны такие два случая:

1) кубики имеют разный вес;
2) кубики имеют одинаковый вес.

В первом случае сразу же становится известным один железный кубик — тот, который тяжелее. Далее разделим оставшиеся 8 кубиков на 4 пары и вес каждой из них сравним с весом двух первых кубиков. Если выбранная пара кубиков окажется тяжелее, то в ней оба кубика железные, если она такого же веса, то в ней один кубик железный, а второй — алюминиевый, и наконец, если — легче, то в рассматриваемой паре оба кубика алюминиевые. По результатам проведенных взвешиваний уже будет нетрудно подсчитать число как железных, так и алюминиевых кубиков. Заметим, что в этом случае для решения задачи потребуется лишь 5 взвешиваний.

Рассмотрим теперь второй случай. Будем последовательно сравнивать вес первой пары кубиков с весом каждой из оставшихся четырех пар кубиков до тех пор, пока не будет найдена пара кубиков другого веса (такая пара обязательно найдется, поскольку среди имеющихся 10 кубиков есть как железные, так и алюминиевые кубики). Если новая пара окажется тяжелее, то первые кубики — алюминиевые, а если легче, то — железные Поиск указанной пары кубиков потребует от одного до четырех взвешиваний

Сравним на весах между собой вес кубиков новой пары (еще одно взвешивание) и возьмем тот из них, который отличается по весу от кубиков первой пары

Составим пару из кубиков разного веса и сравним с ней все остальные пары (если такие еще есть). Нетрудно подсчитать, что для выполнения указанных действий достаточно произвести 6 взвешиваний □

35. На одну чашу весов положить 2 монеты из второго мешка, 3 монеты — из третьего, . , 7 монет — из седьмого мешка, а на вторую чашу весов положить 8 монет из восьмого мешка, 9 монет — из девятого и 10 — из десятого

Если фальшивые монеты находятся в первом мешке, то чаши весов будут находиться в равновесии. указатель разновеса покажет 0, так как на каждую чашу положены монеты, общий вес которых составляет ровно по 270 граммов.

Если же первый мешок содержит настоящие монеты, то указатель разновеса укажет на ненулевую величину разности весов монет, находящихся на чашах весов. При этом на более легкой чаше весов находятся фальшивые монеты, порядковый номер мешка, из которого они взяты, равен показанию разновеса □

36 Последовательность операций по переливанию молока между имеющимися емкостями представлена в следующей табличке

	8	5	3
0	8	0	0
1	3	5	0
2	3	2	3
3	6	2	0
4	6	0	2
5	1	5	2
6	1	4	3
7	4	4	0

37 Последовательность операций по переливанию вина между имеющимися емкостями представлена в табличке, в верхней строке которой указаны эти емкости, а в последующих строках — порядковый номер операции и количество вина в каждой емкости.

	10	7	3
0	10	0	0
1	7	0	3
2	7	3	0
3	4	3	3
4	4	6	0
5	1	6	3
6	1	7	2
7	8	0	2
8	8	2	0
9	5	2	3
10	5	5	0

□

38. Последовательность операций по заполнению ведер водой и их опорожнению представлена в табличке:

	9	4
0	0	0
1	9	0
2	5	4
3	5	0
4	1	4
5	1	0
6	0	1
7	9	1
8	6	4
9	6	0

□

39. Первое взвешивание (без гирь): разделить крупу на две равные части по 4.5 кг.

Второе взвешивание (без гирь): одну из получившихся частей разделить пополам — по 2 кг 250 г.

Третье взвешивание: от одной из частей весом в 2 кг 250 г при помощи двух имеющихся гирь отвесить 250 г. □

40. Нельзя.

В результате всех переливаний из одной бочки в другую будет перелито $v=m(2-\sqrt{2})+n\sqrt{2}$ литров жидкости, где m и n — целые числа. Если $m = n$, то $v = 2m$ — четное число, а если $m \neq n$, то v — иррациональное число. Поэтому в любом случае значение ие может быть равно 1. □

41. а) 1 звено Следует разомкнуть четвертое звено цепочки. Образуются разновесы в 1, 3 и 9 граммов.

Действительно, любое целое число отрезка [1,13] можно представить в виде алгебраической суммы чисел 1, 3 и 9 (знак минус означает, что соответствующий разновес помещается на ту же чашку весов, что и взвешиваемый груз)·

1 =1, 2 = 3-1; 3 = 3; 4 = 3+1, 5 = 9-3-1, 6 = 9-3, 7 = 9-3+1,
8 = 9-1, 9 = 9, 10 = 9+1; 11 = 9+3+1, 12 = 9+3, 13 = 9+3+1

б) Наименьшее количество звеньев цепочки длины N, размыкания которых достаточно для выполнения требования задачи, равно наименьшему натуральному числу, при котором выполняется неравенство

$$N \le \frac{(2m+1)\cdot 3^{m+1}-1}{2}. \qquad (1)$$

Доказательство. После размыкания цепочки в m местах, дополнительно к m раскрытым звеньям будут получены еще $m+1$ куска этой цепочки, состоящие из $n_1, n_2, .., n_m, n_{m+1}$ звеньев. Очевидно, если цепочка состояла из N звеньев, то

$$m + n_1 + n_2 + \quad + n_{m+1} = N, \qquad (2)$$

а порядковый номер t_i ее i-го размыкаемого звена можно вычислить по формуле

$$t_i = t_{i-1} + n_i + 1 \quad \text{для любого } i = 2,3,..., m, \qquad (3)$$

а $t_1 = n_1 + 1$. Поэтому, приняв во внимание равенство (2),

$$t_m + n_{m+1} = N \qquad (4)$$

Не ограничивая общности, можно считать, что

$$n_1 \le n_2 \le . \le n_m \qquad (5)$$

(длину (массу) n_{m+1} последнего куска N-звенной цепочки можно определить из равенства (2) или (4)).

Используя m разомкнутых звеньев цепочки на чашечных весах, можно уравновесить груз, выраженный в граммах любым целым числом от 1 до m

Если же использовать m разомкнутых звеньев цепочки и ее n_1-звенный кусок, то можно уравновесить груз, выраженный в граммах любым целым числом из интервала и $[1,m]$ и $[n_1-m,n_1+m]$ (здесь предполагается, что $n_1>m$). Если при этом $n_1=2m+1$, то, используя лишь указанные части цепочки, можно уравновесить груз, масса которого в граммах выражается любым целым числом из интервала $[1, 3m+1]$. Этот интервал представляет собой объединение непересекающихся интервалов $[1,m]$ и $[n_1-m,n_1+m]$ и имеет длину $m+n_1=3m+1$.

Руководствуясь аналогичным правилом, можно подобрать длину n_2 второго куска цепочки: значение n_2 должно быть таким, чтобы, во-первых, используя лишь m разомкнутых звеньев цепочки и ее n_1- и n_2-звенные куски можно было бы уравновесить груз, масса которого в граммах выражается любым целым числом из интервала $[1,n_2+n_1+m]$ и, во-вторых, чтобы интервал $[n_2-n_1-m,n_2+n_1+m]$ не имел общих точек с непересекающимися интервалами $[1,m]$ и $[n_1-m,n_1+m]$. Эти условия, очевидно, выполняются в том и только в том случае, когда $n_2-n_1-m=n_1+m+1$ т.е., если $n_2 =$ $= 2n_1+2m+1 = 3n_1$

В общем случае длина n_{i+1} $(i+1)$-го куска цепочки должна быть такой, чтобы, используя лишь m ее разомкнутых звеньев и куски длины $\{n_j\}$, $j=1,\dots, i$, можно было бы уравновесить груз, выраженный в граммах любым целым числом из интервала $[1,m+\sum\limits_{j=1}^{i+1} n_j]$, и чтобы интервал $[n_{i+1}-m-\sum\limits_{j=1}^{i} n_j, n_{i+1}+m+\sum\limits_{j=1}^{i} n_j]$ не имел общих точек с интервалом. $[1,m+\sum\limits_{j=1}^{i} n_j]$. Отсюда следует, что $n_{i+1}-m-\sum\limits_{j=1}^{i} n_j = m+\sum\limits_{j=1}^{i} n_j+1$

и поэтому

$$n_{i+1} = 2(m+\sum_{j=1}^{i} n_j)+1=2n_i+2(m+\sum_{j=1}^{i-1} n_j)+1=3n_i,\ i=1,2,\dots,m-1. \qquad (6)$$

Итак, используя m разомкнутых звеньев заданной цепочки и ее куски длиной n_1, n_2,..., n_m, на чашечных весах можно уравновесить груз, величина которого в граммах принимает любое целочисленное значение из интервала $[1,m+\sum\limits_{i=1}^{m} n_i]$. Учитывая соотношения (6) и то, что $n_1=2m+1$, максимальная масса P_m такого груза равна

$$P_m = m+\sum_{i=1}^{m} n_i = m+n_1+3n_1+3^2 n_1+\dots+3^{m-1} n_1 = m+(2m+1)\cdot\frac{3^m-1}{2} =$$

$$=\frac{(2m+1)\ 3^m-1}{2}. \qquad (7)$$

Пусть P — масса в граммах уравновешиваемого груза, выражаемая любым целым числом из интервала $[1, N]$ Достаточно рассмотреть лишь случай, когда $P > P_m$, т е. $P=P_m+p$, где p — произвольное целое число отрезка $[1, n_{m+1}]$.

Предположим для определенности, что на левую чашку весов поместили указанный груз P, а на правую, чтобы этот груз уравновесить, $(m+1)$-й кусок цепочки и некоторое сочетание разновесов общей массой, составленной из имеющихся разомкнутых звеньев и кусков цепочки. Чашки весов находятся в равновесии тогда и только тогда, когда выполняется равенство $P=n_{m+1}+x$, т е., если

$$x = P-n_{m+1} = P_m-n_{m+1}+p = N-2n_{m+1}+p \qquad (8)$$

Отсюда, так как $1\le p\le n_{m+1}$, имеем

$$P_m - n_{m+1} + 1\le x\le P_m \qquad (9)$$

Условие, выражающее возможность составить из имеющихся разновесов (без последнего $(m+1)$-го куска цепочки) массу x, состоит в выполнении неравенства

$$-P_m\le P_m - n_{m+1} + 1 \qquad (10)$$

(отрицательное значение x означает, что система разновесов размещается вместе с грузом P на левой чашке весов). Из этого неравенства следует требование $n_{m+1}\le 2P_m + 1$, которое, учитывая равенства $P_m + n_{m+1} = N$ и (7), эквивалентно неравенству (1)·

$$N - P_m = n_{m+1}\le 2P_m + 1$$

и, значит,

$$N\le 3P_m + 1=\frac{(2m+1)\cdot 3^{m+1}-1}{2}. \qquad (11)$$

Таким образом, для заданного N можно вычислить минимальное значение m, для которого выполняется неравенство (11), и затем уже по формуле (6) вычислить «длины» кусков $\{n_i\}$ требуемых разновесов, а по формуле (3) — порядковые иомера размыкаемых звеньев цепочки

Заметим, правая часть N_{max} неравенства (11) есть точная верхняя оценка максимального числа N звеньев у цепочки, размыкание m звеньев которой позволит выполнить требование задачи. Приведем значения N_{max} для нескольких значений m

m	1	2	3	4	5
N_{max}	13	67	283	1093	4009

Из этой таблички следует, что для изготовления указанных в задаче разиовесов из цепочек, состоящих, например, из 60 и 150 звеньев, достаточно разомкнуть не более двух и трех звеньев соответственно[1]. Соотношения (3) и (6) позволяют определить номера этих звеньев· в 60-звенной цепочке необходимо разомкнуть 6-е и 22-е звенья, а в 150-звенной - 8-е, 30-е и 94-е. При этом из 60-звенной цепочки будут получены 5 разновесов, состоящих из 1, 1, 5, 15 и 38 звеньев, а из 150-звенной цепочки - 7 разновесов, в которых соответственно 1, 1, 1, 7, 21, 63 и 56 звена.

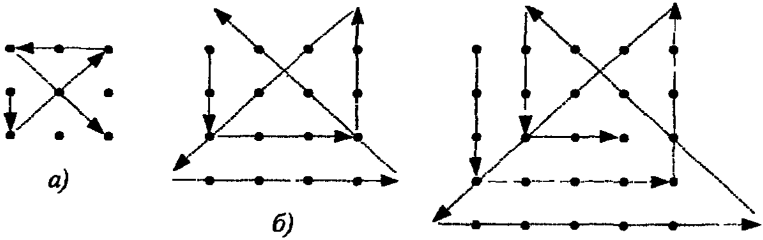
Покажем, как при помощи разновесов, изготовленных из 60-звенной цепочки, иа чашечных весах можно уравновесить груз, масса которого в граммах может принимать любое целочисленное значение между 22 и 38 (уравновешивание груза другой массы, допустимой в задаче, сложности не вызывает)

23 = 38-15; 24 = 38-15+1, 25 = 38-15+1+1;
26 = 38-15+5-1-1; 27 = 38-15+5-1, 28 = 38-15+5;
29 = 38-15+5+1; 30 = 38-15+5+1+1; 31 = 38-5-1-1;

32 = 38-5-1 33 = 38-5;
34 = 38-5+1; 35 = 38-5+1+1;
36 = 38-1-1, 37 = 38-1 □

[1]В книге Г.А.Гальперина и А.К.Толпыго «Московские математические олимпиады», изданной в 1986 году в издательстве «Просвещение», для указанных задач, предложенных в 1951 году на XIV олимпиаде, на стр. 163 указаны неправильные решения· 3 звена; 4 звена.

42. Ответ представлен на рис 1.



а) *б)* *в)*

Рис 1

43. Требуемые треугольники образуют ребра трехгранной правильной пирамиды, указанной на рис. 2.

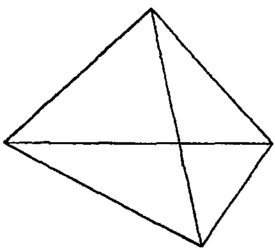


Рис. 2

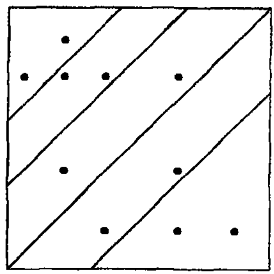


Рис. 3

44. Ответ см. на рис. 3.

45. Решение см. на рис. 4.

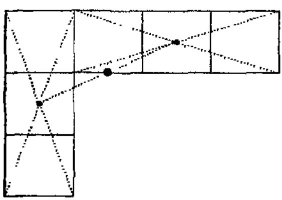


Рис 4

46. Ответ см. на рис. 5.

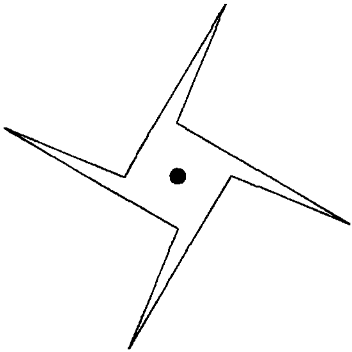


Рис. 5

47. Решение задачи (с точностью до перестановки строк и столбцов) показано на рис. 6.

●	●		
		●	
	●		●
●			●

Рис. 6

Если же в таблице разместить 6 точек, то обязательно найдется или один столбец с тремя точками, или два столбца, в каждом из которых — по две точки. Поэтому можно сначала вычеркнуть два столбца, в которых находятся 4 точки, а затем уже вычеркнуть две строки с оставшимися 2 точками. □

48. Может. Один из возможных маршрутов его побега показан на рис. 7.

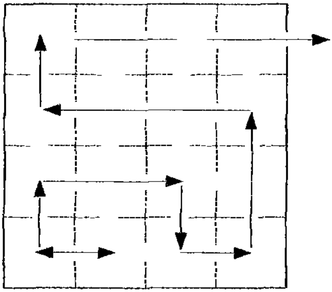


Рис. 7

(Узник сначала заходит в смежную камеру, берет у стражника первый ключ, возвращается в свою камеру и затем продолжает обход остальных камер подземелья в указанной последовательности). □

49. Ответ см. на рис. 8.

Прямая пиния, проходящая через центр прямоугольника, делит его на две части, имеющие равные площади. Значит, если разрезать прямоугольники по прямой линии, проходящей через их центры, каждый из них будет разделен на две равные по площади части.

Рис. 8

50. Задача имеет два решения, представленных на рис. 9 и рис. 10

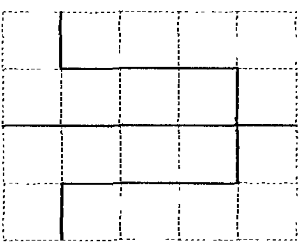


Рис 9

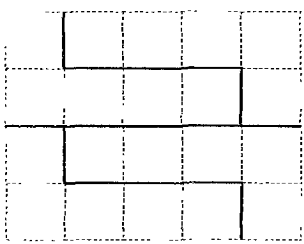


Рис. 10

51. Ответ дан на рис. 11.

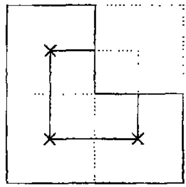


Рис. 11

52. Ответ см. на рис. 12

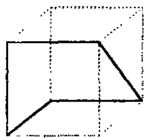


Рис 12

53. Решение см. на рис. 13

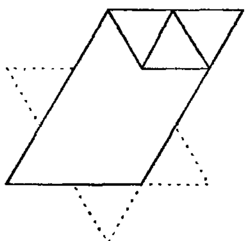


Рис. 13

54. Ответ см. на рис. 14

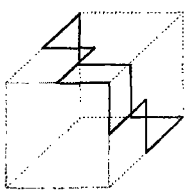


Рис. 14

55. Решение задачи показано на рис. 15.

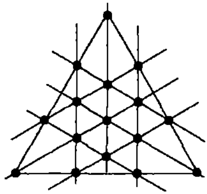
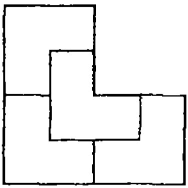


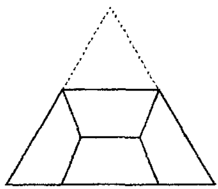
Рис 15

56. Решение задачи *а)* см. на рис. 16, а задачи *б)* — рис. 17.



а)

Рис 16.



б)

Рис 17

Вычисление размеров частей получившихся фигур представляет технически несложную задачу. □

57. На рис. 18 показаны: AB — средняя линия заданного треугольника, CO — высота треугольника ACB. □

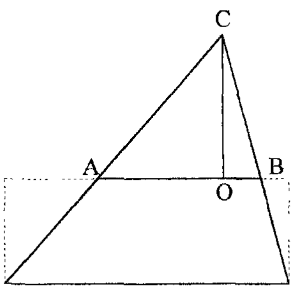


Рис 18

58. На рис. 19 показано следующее решение задачи:

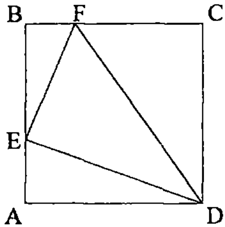


Рис. 19

Сначала квадратный лист ABCD разрезается по прямым линиям EF, FD и DE, причем точки E и F выбираются такими, что $AE < 0.5AB$ и $AE = BF$. Затем отрезанный треугольник EBF необходимо перевернуть и присоединить к треугольнику EFD так, чтобы точки E и F треугольника EBF совпали бы соответственно с точками F и E треугольника EFD. Наконец, поворотом треугольников FCD, DAE и FBE соответственно вокруг сторон FD, DE и FE все вершины C, A и B совмещаются в одну. Таким образом будет построен тетраэдр, обладающий требуемым свойством. □

59. Решение задачи показано на рис. 20.

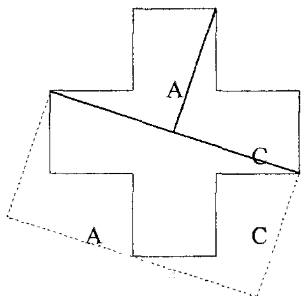


Рис 20

60 Решение. Пусть *a* — известная сторона квадрата. Поместив ножку циркуля в некоторую точку O, провести радиусом *a* дугу, на которой, выбрав произвольную точку A, отложить AB = BC = CD = (см. рис. 21).

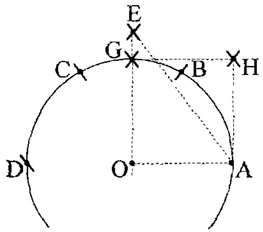


Рис 21

Точки A, B, C и D являются вершинами правильного шестиугольника, вписанного в окружность радиуса a. Расстояние между точками A и C равно $a\sqrt{3}$ — стороне вписанного в указанную окружность равностороннего треугольника. Из точек A и D описать дуги радиусом AC и отметить их точку пересечения — E.

Так как $AE^2 = OE^2 + OA^2$, то $OE = \sqrt{3a^2 - a^2} = a\sqrt{2}$. Значит, если из точек A и D описать дуги радиусом OE, то они пересекутся на дуге ABCD в точке G — вершине квадрата, вписанного в окружность радиуса a.

Определить местоположение четвертой вершины H искомого квадрата теперь уже легко: достаточно из точек A и G провести дуги радиуса a и найти их пересечение — точку H. □

61. Решение задачи показано на рис. 22.

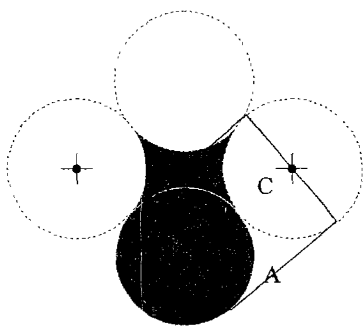


Рис 22

62.

$$\begin{array}{r} \_27 \pm 8 = 35 \\ 10 + 5 = 15 \\ \hline 17 + 3 = 20 \end{array}$$

В третьем столбце записано равенство 8 - $\boxed{●}$ = 3, из которого следует, что $\boxed{●}$ =5. С учетом этого из равенства, записанного в первой строке ребуса, нетрудно установить, что ■ $\boxed{○}$ = 27 и поэтому ■ =2 и $\boxed{○}$ =7.

Из равенства, записанного в третьем столбце, следует, что $\boxed{}$ =0. После чего уже легко доказать, почему ● =1. □

63.а).

$$\begin{array}{r} +\,1085 \\ 9567 \\ \hline 10652. \end{array}$$

Поскольку каждое из двух слагаемых меньше 10 000, то их сумма меньше 20 000 и, по условию задачи, — не меньше 10 000. Поэтому А = 1 и, значит, Б ≠ 1. Так как 1 + Ф + (0 или 1 — величина сноски из третьего столбца) = 10 + Б, то Б = 0 или Б = 1. Следовательно, Б = 0 и тогда либо Ф = 8 (если из третьего столбца в четвертый переносится 1), либо Ф = 9 (если указанного переноса нет) Но перенос 1 из третьего столбца возможен только если Г = 9 (поскольку Б = 0) и поэтому Е = 0 (в левый столбец либо ничего не переносится, либо переносится 1) Но так как Е ≠ 0 (поскольку Б = 0), то Г ≠ 9 и, значит, Ф = 9.

Так как Г ≠ Е, то Г + 1 = Е и либо В + Е = Г + 10, либо В + Е + 1 = = Г + 10. Однако из системы уравнений

Г + 1 = Е,
В + Е = Г + 10

следовало бы, что В = 9, что ввиду ранее установленного равенства Ф = 9 недопустимо. Значит, В + Е + 1 = Г + 10, откуда, с учетом Г + 1 = = Е, имеем В = 8.

Следовательно, Г + Т = 10 + Р, причем случаи, когда Г + Т = 4 + 6, Г + Т = 5 + 6 и Г + Т = 4 + 7 отпадают, поскольку Р не может быть ни 0, ни 1 (эти цифры уже заняты) Значит, Г + Т = 5 + 7 и поэтому Р = 2.

Наконец, так как $\Gamma + 1 = E \neq 8$, то $\Gamma = 5$, $E = 6$ и, следовательно, $T = 7$.

б).

$$\begin{array}{r} 6 \\ +\ 67 \\ \underline{674} \\ 747 \end{array}$$

Поскольку $A + C \neq 0$ и сумма $A + B + C$ меньше 30, то $A + B + C = 10 \cdot x + B$, где $x = 1$ или $x = 2$. Так как $A + C < 20$, то $x = 1$, т.е. $A + B + C = 10 + B$. Значит, во второй столбец при проведении сложения переносится $1 (A + B + 1 = 10y + C$, где $y = 0$ или $y = 1)$ и, кроме того, $A + C = 10$. Поскольку при проведении сложения в самый левый столбец переносится число (отличное от нуля), не большее чем 1, то $y = 1$ и поэтому $B = A + 1$.

Итак, расшифровка заданного примера на сложение сведена к отысканию решения системы уравнений

$$A + C = 10,$$
$$A + B = 9 + C,$$
$$B = A + 1.$$

Прибавив к сумме первых двух равенств удвоенное третье и приведя подобные члены, получим $B = 7$. Далее уже нетрудно установить, что $A = 6$ и что $C = 4$.

в).

$$\begin{array}{ccccc} 744 & & 24 & = & 31 \\ - & & \times & & + \\ 194 & + & 13 & = & 207 \\ \hline 550 & - & 312 & = & 238 \end{array}$$

Перенумеруем уравнения, определяющие кроссворд, следующим образом:

$ABB : KB = DL,$ (1)
$LPB + LD = KRA,$ (2)
$MMR - DLK = KDC,$ (3)
$ABB - LPB = MMR,$ (4)
$KB \times LD = DLK,$ (5)
$DL + KRA = KDC.$ (6)

Из равенства (1), которое можно переписать в виде $ABB = DL \times KB$, сразу следует, что $L = 1$, а из равенства (4) — $R = 0$.

Из равенства (2) имеем:

$$B + D = A + x \cdot 10, \qquad (7)$$

$$P + 1 + x = y \cdot 10, \qquad (8)$$

$$1 + y = K, \qquad (9)$$

где значением x и y может быть либо 0, либо 1 (так как каждое неотрицательное число B, D, P не превосходит 9).

Поскольку $L = 1$ и $L \neq K$, из равенства (9) следует, что $y = 1$ и $K = 2$.

Из равенства (3) следует, что $K + C = 10$ и поэтому C=8 Значит, так как при условии R= 0, равенство (6) влечет $L + A = C$, $A = 7$.

Подставим в равенство (2) значения уже определенных неизвестных. Получим

$$1PB + 1D = 207. \qquad (10)$$

Значит, $B + D = 7$ или $B + D = 17$. Однако второй случай следует исключить, поскольку тогда либо значеине B, либо D было бы равно 8, что невозможно ввиду установленного равенства $C = 8$. Поэтому

$$B + D = 7 \qquad (11)$$

и тогда из равенства (10) следует, что $P = 9$.

С учетом равенства (11) и уже определенных значений букв следует, что B и D могут принимать лишь значения 3 и 4. Однако при $B = 3$ следовало бы, что D=4 и, из равенства (4), $M = 4$. Значит, $B = 4$ и $D = 3$.

Наконец, из равенства (4) получаем $M = 5$.

г).

$$\begin{array}{ccccc} 961 & : & 31 & = & 31 \\ - & & \times & & + \\ 257 & + & 13 & = & 270 \\ \hline 704 & - & 403 & = & 301 \end{array}$$

Поскольку NK+VEL=NLK, то сумма K+L оканчивается на K и поэтому L=0.

Из равенства ABK:NK=NK следует, что $ABK=NK^2$ и поэтому $K = 1$ или K=5.

Из равенства же $NK \times KN = PLN$ следует, что произведение $K \times N$ оканчивается на N и поэтому либо $K = N = 5$, либо $K = 1$. Но поскольку произведение $NK \times KN$ — трехзначное число, то $K = 1$.

Равенство $NK \times KN = PLN$ можно переписать в виде

$$N1 \times 1N = (10N + 1) \times (10 + N) = 100N + 10 + N + 10N^2 =$$

$$= N1N + 10N^2 = P0N.$$

Из последнего равенства следует, что число N^2 должно оканчиваться на 9 и поэтому либо N=3, либо N=7. Однако при N=7 число $N1N + 10N^2$ =1207 четырехзначное. Значит, N=3 и поэтому P=4.

Из равенства $NK + VEL = NLK$, то есть 31+VE0=301, имеем V=2 и E=7.

Так как NK=31, то ABK=NK^2=961 (A=9, B=6).

Наконец, поскольку $ABK - VUE = ELP$ (961-2U7=704), то U=5

д).

```
   256
 ×  13
   768
  256
  3328.
```

Поскольку $CDE \times A = CDE$, то A=1.

Так как сумма двух положительных однозначных чисел (в данном случае сумма F и D) меньше 20 и больше 9, то B=C+1.

Ввиду того, что произведение $C \times B = C \times (C+1)$ не превосходит однозначное число F, то либо C=1, либо C=2. Поскольку A=1, то C=2 и поэтому B=3

Поскольку сумма $E+E$ оканчивается на 2 и $E \neq 1$ (A=1), то E=6 и, значит, G=8.

Наконец, из соотношений

$$D \times B+1 = 10X+E,$$
$$C \times B+X = F,$$

которые с учетом уже определенных значений неизвестных могут быть переписаны в виде

$$D \times 3+1 = 10X+6,$$
$$6+X = F,$$

и равенства

$$F + D=12,$$

следует, что $D = 5$ и $F = 7$.

е)

```
  9541
+ 4549
 14090.
```

Заметим, сумма двух целых положительиых однозначных чисел не может превосходить 18. Значит, при поразрядном сложении двух указанных в примере чисел в высший разряд может быть перенесена лишь 1.

Из анализа сложения чисел четвертого разряда в примере легко понять, почему $D = 1$ и $A = 9$. Поэтому $E = 0$ (см. сложение чисел первого разряда), $C = 4$ и $B = 5$. □

64.

$$\begin{array}{r} \times\; 397 \\ \underline{34} \\ +\; 1588 \\ \underline{1191} \\ 13498. \end{array}$$

Для того, чтобы звездочки различать, обозначим их буквами. Тогда пример можно переписать в следующем виде

$$\begin{array}{r} \times\; 39A \\ \underline{3B} \\ +\; ED8C \\ \underline{1191} \\ 1GF98. \end{array}$$

Легко заметить, что $C = 8$, а из равенства $(390 + A) \times 3 = 1191$ вычислить $A = 7$. Далее, поскольку $397 \times B = ED88$, то $B = 4$ (единственное однозначное число, произведение которого и 7 оканчивается цифрой 8) и, значит, $D = 5$, $E = 1$. После этого нетрудно уже подсчитать, что $F = 4$ и $G = 3$. □

65.

$$\begin{array}{ccccc} 408 & + & 56 & = & 464 \\ \cdot & & - & & - \\ 34 & \times & 12 & = & 408 \\ \hline 12 & + & 44 & = & 56 \end{array}.$$

Задача состоит в отыскании таких отличающихся между собой целочисленных значений α, β, δ, π, φ, σ, ρ, λ из множества чисел 0, 1, 2, ..., 9, при которых выполняются равеиства

$$\alpha\beta\delta + \pi\varphi = \alpha\varphi\alpha, \qquad (1)$$

$$\sigma\alpha \times \rho\lambda = \alpha\beta\delta, \qquad (2)$$

$$\rho\lambda + \alpha\alpha = \pi\varphi. \qquad (3)$$

Поскольку $\rho\lambda \geq 10$ и $\pi\varphi \leq 99$, то из равенства (3) следует, что $\alpha < 9$. Кроме того, если бы $\alpha = 1$, то из равенства (2) следовало бы, что $\delta = \lambda$. Значит, $\alpha > 1$.

Из равенства (1) следует, что $\beta\delta + \pi\varphi = \varphi\alpha$ и поэтому, учитывая равенство (3), $\beta\delta + \rho\lambda + \alpha\alpha = \varphi\alpha$. Отсюда имеем $\delta + \lambda + \alpha = x0 + \alpha$ и, значит, $\delta + \lambda = x0$, где $x = 1$ или $x = 2$ (значения α, δ, λ не превосходят 9, неотрицательны и $\delta \quad \lambda$). Следовательно, $x = 1$ и поэтому

$$\delta + \lambda = 10. \tag{4}$$

Необходимо также отметить, что $\lambda \neq 1$ (в противном случае из равенства (2) следовало бы, что $\delta = \alpha$) и что $\lambda \neq 5$ (в противном случае из (4) следовало бы, что $\delta = \lambda$).

Составим табличку, в которой отметим возможные значения. α, λ, вычисленное с учетом равенства (4) δ (записано в круглых скобках рядом со значением λ), произведение $\alpha\lambda$

$\alpha \backslash \lambda$	2(8)	3(7)	4(6)	6(4)	7(3)	8(2)	9(1)
2		6	8	12	14		18
3	6		12	18		24	27
4	8	12			28	32	36
5	10		20	30		40	
6	12	18			42	48	54
7	14		28	42		56	63
8		24	32	48	56		72

(в тех случаях, когда $\alpha = \lambda$ или $\alpha = \delta$, произведение $\alpha\lambda$ вычислять не надо и поэтому соответствующие клетки этой таблички пустые)

В соответствии с равенством (2), произведение $\alpha\lambda$ должно заканчиваться на δ Анализируя содержимое таблички, нетрудно заметить, что это возможно лишь при $\alpha = 4$ и если при этом либо $\lambda = 2$, $\delta = 8$, либо $\lambda = 8$, $\delta = 2$. Однако, если бы $\lambda = 8$, $\delta = 2$, то из равенства (3) следовало бы, что также $\varphi = 2$. Значит, остается единственно возможный случай — $\lambda = 2$, $\delta = 8$.

Тогда из равенства (3) получаем $\varphi = 6$ и

$$\pi = \rho + 4. \tag{5}$$

Из равенства (1) следует, что $\beta + \pi + 1 = 6$ и поэтому $\beta + \pi = 5$. Отсюда, учитывая равенство (5), $\beta + \rho = 1$ и, значит, $\beta = 0$, $\rho = 1$.

Наконец, из равенства (2) следует, что $\sigma 4 = 408/12 = 34$ и поэтому $\sigma = 3$. □

66. БД.

Заметим, что ДДД = Д $\times$ 111 = Д $\times$ 3 $\times$ 37. Поскольку ни А, ни В не равны нулю (числа АБ и ВГ двузначные), а Д может принимать лишь целочисленные значения от 1 до 9, то равенство АБ $\times$ ВГ = ДДД возможно только в том случае, когда Д $\times$ 3 — двузначное число, т.е. когда Д $\geq$ 4.

Для каждого значения Д = 4, 5, 6, 7, 8, 9 подсчитаем произведение Д $\times$ 3. Получим соответственно 12, 15, 18, 21, 24, 27. Следовательно, только при Д = 8 произведение Д $\times$ 3 $\times$ 37 может быть представлено в виде произведения двух двузначных сомножителей не единственным способом: 888 = 24 $\times$ 37 = 12 $\times$ 74.

Таким образом, либо ВГ = 37, а значение АБ вычисляется по формуле АБ=Д $\times$ 3 для различных Д = 4, 5, 6, 7, 8, 9, либо ВГ = 74, Д = 8, АБ = 12, либо АБ = 37 и значение ВГ вычисляется для каждого допустимого Д по формуле ВГ= Д $\times$ 3, либо АБ = 74, Д = 8, ВГ = 12.

Используя второе условие задачи Д $\times$ ВГ-АБ=ВВ, нетрудно убедиться, что единственно возможным случаем из всех указанных является: АБ=37, Д=4 и ВГ=12.

Теперь уже задачу легко решить. АБ $\times$ Г = 37 $\times$ 2 = 74 = БД. □

67.

$$\begin{array}{r} 90909 \\ +\ 10101 \\ \hline 101010 \end{array}$$

Сумма двух целых положительных однозначных чисел не может превосходить 18. Значит, при поразрядном сложении двух указанных в примере чисел в высший разряд может быть перенесена лишь 1.

Анализируя в примере сложение чисел пятого разряда, легко понять, почему $A = 1$ и $O = 9$. Поэтому $X = 0$. □

68.

$$\begin{array}{rl} -3125 & \underline{|\,25} \\ \underline{25} & |\,125 \\ -62 & \\ \underline{50} & \\ -125 & \\ \underline{125} & \\ 0 & \end{array}$$

Произведение CD и B равно CD Значит, B = 1.

Произведение CD и D равно BCD, т.е. CD × D = 1CD = 100 + CD. Отсюда

$$CD \times (D-1) = 100,$$

что возможно лишь в трех случаях: 20 × 5, 25 × 4 и 50 × 2.

Так как в рассматриваемом примере число D-1 меньше второй цифры числа CD на 1, то из трех указанных случаев подходящим является лишь второй — 25 × 4.

Следовательно, CD = 25, а делимое ABCD = 25 × 125 = 3125.

Определить значения остальных букв примера теперь уже просто. □

Логические задачи

69. 30 секунд и 10 секунд.

Чтобы отсчитать 70 конвертов, сообразительному продавцу достаточно из пачки, содержащей по условию задачи 100 конвертов, отсчитать 30 конвертов, на что потребуется лишь 30 сек. □

70. Миша, Боря, Олег, Коля, Гена.

Поскольку Миша не самый высокий, но выше трех из пяти братьев, то, во-первых, на рисунке он изображен первым, и, во-вторых, так как он выше Гены, Олега и Коли, самый высокий — Боря (на рисунке изображен вторым).

Гена самый маленький, поскольку он ниже Олега, который ниже Коли. Значит, Гена на своем рисунке изобразил себя последним.

Наконец, Олег на рисунке третий, а Коля — четвертый. □

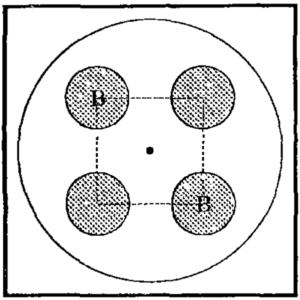
71. Сначала дедушке надо переправить через реку козу и затем вернуться за волком. Перевезя волка на противоположный берег, вернуться за капустой, обязательно захватив с собой в обратный рейс козу. После того, как капуста будет перевезена и оставлена рядом с волком, вернуться за козой. Таким образом, коза три раза будет переправляться в лодке через реку! □

72. Сначала командир попросил обоих мальчиков переправиться на противоположный берег реки, одному из них там остаться, а второму вернуться. Затем, мальчик должен передать лодку одному из воинов, который

переправится через реку и передаст лодку мальчику, оставшемуся на противоположном берегу. Этот мальчик перегонит лодку обратно к своему другу и к воинам, еще не переправившимся через реку. Такие поездки продолжать до тех пор, пока весь отряд не переправится через реку. □

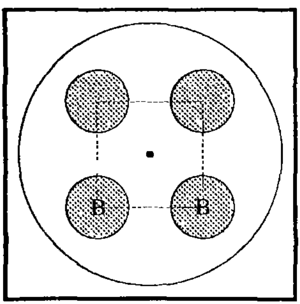
73. Открыть замок можно поочередно просовывая руки в отверстия замка, расположенные на любой диагонали и на любой стороне квадрата, в вершинах которого проделаны эти отверстия, и изменяя положения выключателей в этих отверстиях следующим, например, способом.

Переориентировать выключатели, расположенные на диагонали, в положение «В».



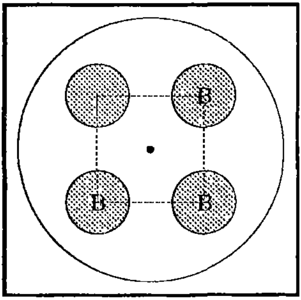
Если замок не откроется, то выполнить следующую операцию.

Переориентировать оба выключателя, расположенные вдоль стороны, в положение «В».

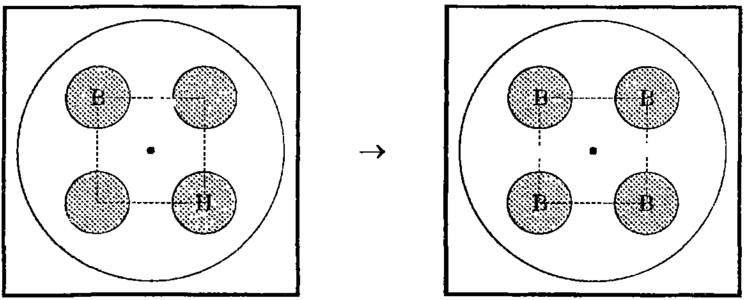


(На предыдущей операции один из этих выключателей уже переведен в положении «В»). Если замок не откроется, то выполнить следующую операцию

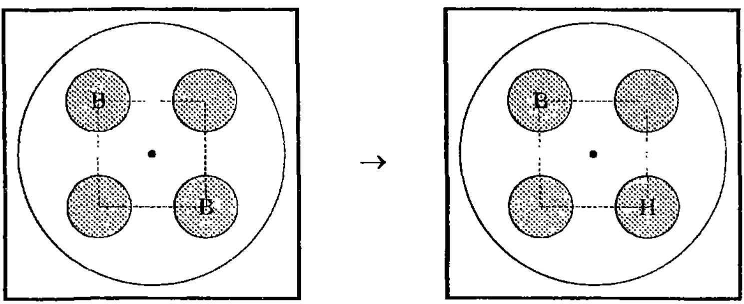
(Три выключателя замка находятся в положении «В», а один — в положении «Н»).



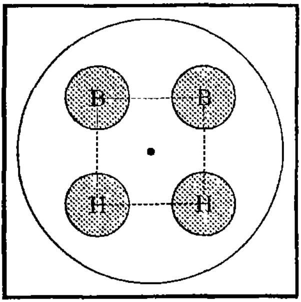
Определить ориентацию выключателей, расположенных на диагонали. Если один из этих выключателей находится в положении «Н», то после переключения его в положение «В» замок откроется.



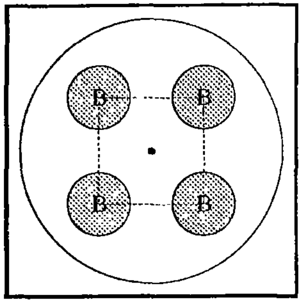
Если оба выключателя находятся в положении «В», то перевести положение одного из них в положение «Н» и перейти к выполнению следующей операции.

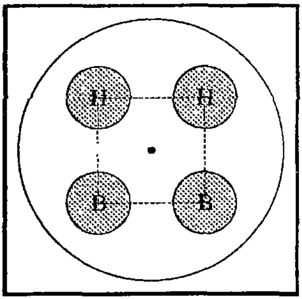


(Два выключателя замка находятся в положении «В», а два выключателя — в положении «Н»). Определить ориентацию выключателей, расположенных на стороне. Если оба выключателя находятся в одинаковом положении, то изменить это положение на противоположное («Н» на «В», а «В» на «Н») и замок откроется.

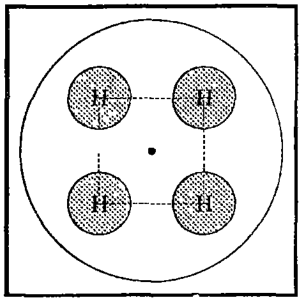


→

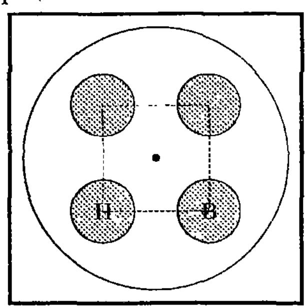




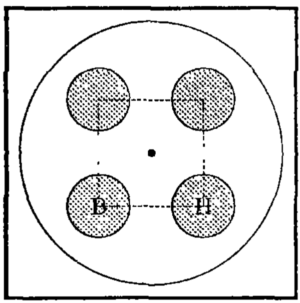
→



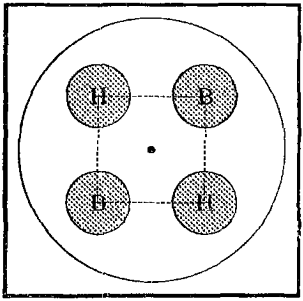
Если же оба выключателя находятся в разных положениях, то заменить их положения на противоположные и перейти к выполнению следующей операции.



→



(Выключатели, расположенные на одной диагонали, имеют ориентацию «В», а на другой диагонали — «Н»).



Ориентацию выключателей, расположенных на диагонали, изменить на противоположную, после чего замок откроется.

Таким образом, для отпирания замка требуется не более 5 операций. □

74. Солдат А не ниже солдата Б.

Любой солдат, стоящий в одной шеренге с солдатом А, не выше его, а все солдаты, стоящие в одном ряду с Б, не ниже, чем Б. Поэтому солдат, стоящий в одной шеренге с А и в одном ряду с Б не выше А и не ниже Б, т.е. солдат А не ниже солдата Б. (Следует отметить, что солдатом А и солдатом Б может оказаться один и тот же человек !) □

75. Свидетели А и В говорили неправду, а Б — правду.

Действительно, поскольку ни одна из трех возможных пар свидетелей А и Б, Б и В, А и В одновременно говорить правду не могла, то ее может говорить лишь один свидетель.

Поскольку одновременно лгать свидетели А и Б, а также Б и В не могут, то правду говорил лишь свидетель Б. □

76 1 — дама бубновая; 2 — король бубновый; 3 — король пиковый; 4 — дама пиковая.

Действительно, из условий г) и д) имеем следующие два возможных расклада карт по мастям: БППБ и ББПП (Б — обозначение карты бубновой масти, П — пиковой).

Из условия в) имеем три возможных расклада карт по их достоинствам: ДДКК, ККДД и ДККД (Д — «дама», К — «король»). Однако вариант ДДКК недопустим ввиду условия *б)*, а вариант ККДД — ввиду условия *а)*.

Значит, поскольку каждая масть имеет лишь одну карту каждого достоинства, единственно возможный расклад карт, не противоречащий всем условиям задачи, определяется записями ББПП и ДККД. □

77 1 — бубновый валет, 2 — трефовый туз, 3 — червонная дама, 4 — пиковый король.

Из условий *а)* и *б)* задачи следует, что на столе лежат карты: валет, дама, король и туз. Из условий *в)* и *г)* можно заключить, что этими картами представлены все масти: бубновая, пиковая, трефовая и червонная Значит, на столе нет карт одинакового достоинства и одинаковой масти.

Из условия *д)* следует, что король не может, во-первых, иметь червонную масть и, во-вторых, быть первой картой

Минимальное расстояние между картами равно нулю (если карты находятся рядом). Поэтому, если вторая карта — король, то из условия *а)* следует, что четвертая карта — валет, третья — дама и тогда первая — туз. Однако такой расклад карт противоречил бы условию *б)*.

Предположим теперь, что король — третья карта. Тогда из условия *а)* следуст, что валет, дама и туз являются соответственно первой, второй и четвертой картами. Но такой расклад карт также противоречит условию *б)*.

Значит, четвертая карта король, а валет — первая или вторая карта.

Если бы вторая карта была валет, то это противоречило бы условию *б)* (валет находился бы между тузом и дамой и поэтому расстояния от туза до валета было бы таким же, как и расстояние от дамы до валета).

Следовательно, первая карта — валет и, в силу условия *б)*, вторая карта — туз, а третья карта — дама (червонная согласно условию *д)*)

Из условия *г)* следует, что карты пиковой и трефовой масти не могут находиться рядом. Значит, король имеет либо трефовую, либо пиковую масть.

Предположим сначала, что король (четвертая карта) имеет трефовую масть. В этом случае валет — первая карта — имеет либо бубновую масть, либо пиковую и тогда туз — вторая карта — имеет соответственно пиковую или бубновую масть. Однако каждый из таких раскладов карт противоречит условию в). Следовательно, король имеет пиковую масть.

Теперь уже из условия в) легко установить, что валет имеет бубновую масть, а туз — трефовую. □

78. Андрееву разрешили отпуск в июне, Борисову — в июле, Владимирову — в августе.

Если бы секретарь правильно сообщила решение директора Борисову (и неправильно — Андрееву и Владимирову), то это означало бы, что Андрееву было разрешено уйти в отпуск в августе, а тогда Борисову — в июне, а Владимирову — в июле (по условию задачи все должны отдыхать в разные месяцы). Однако это означало бы, что секретарь правильно сообщила решение директора также и Владимирову.

Если бы секретарь правильно сообщила решение директора Владимирову (неправильно — Андрееву и Борисову), то это означало бы, что Борисову разрешено также как и Владимирову отдыхать в июле. А это запрещено одним из условий задачи.

Значит, секретарь правильно сообщила решение директора Андрееву. Этого уже достаточно, чтобы легко установить месяц отпуска каждого из друзей. □

79. $A = Y$, $B = X$, $C = W$, $D = Z$.

Неравенство $A \neq X$ влечет, в силу условия (1), выполнение лишь одного из равенств $C = X$, $C = Z$ или $C = W$, а в силу условия (2), — выполнение неравенств $B \neq Y$, $B \neq Z$ (т.е. $B = X$ или $B = W$). Отсюда, в соответствии с утверждением (3), $C = W$ и, значит, $B = X$. Поэтому, в силу (4), $D \neq Y$, т.е. $D = Z$, что с учетом равенств $B = X$ и $C = W$ влечет $A = Y$. □

80. «Вы здесь живете ?».

Предположим, что путешественник находится в Правдинке. Тогда на указанный вопрос даст положительный ответ и местный житель, и лгун, пришедший в Правдинку в гости.

Если же путешественник оказался во Врунцах, то на этот же вопрос дадут отрицательный ответ и житель Врунцов, и житель Правдинки. □

81. Физик знает французский и испанский языки, биолог — английский и французский, историк — русский и испанский, математик — английский и испанский.

Условия задачи состоят в следующем:
каждый ученый знает 2 языка; (1)
нет языка, которым владеют одновременно четверо ученых; (2)
только одним языком одновременно владеют трое ученых; (3)
никто не знает одновременно русский и французский языки; (4)
физик не говорит по-английски; (5)
физик может служить переводчиком у биолога и историка; (6)
историк говорит по-русски; (7)
математик русского языка не знает; (8)
историк может общаться с математиком; (9)
физик, биолог и математик не могут беседовать на одном языке. (10)

Из условий (1), (4) и (5) следует, что физик знает либо русский и испанский языки, либо французский и испанский. Значит, физик знает испанский язык.

Из условия (6) можно заключить, что биолог и историк не знают общего языка и поэтому биолог не знает русского.

Из условия (9) следует, что историк и математик знают один общий для них язык. Это может быть либо английский, либо испанский, поскольку знание историком русского языка (условие (7)) исключает, ввиду условия (4), его знание французского.

Предположим, что историк и математик оба знают английский язык. Тогда, поскольку биолог и историк не знают общего языка, биолог не знает английский язык, а знает французский и испанский (условие (1)). Поэтому физик знает язык русский (следствие из условия (6)), не знает французский (условие (4)) и поэтому знает испанский (условие (1)). Историк же не знает испанский язык (условие (1)).

Составим табличку, в которой знаками + и - отметим знание и незнание каждым ученым соответствующего языка.

	русский	английский	французский	испанский
физик	+	-	-	+
биолог	-	-	+	+
историк	+	+	-	-
математик	-	+		

Из этой таблички видно, что знание математиком испанского языка, приведет к невыполнению условия (10), а знание им французского языка, приведет к невыполнению условия (3).

Поскольку предположение о том, что историк и математик оба знают английский язык приводит к утверждениям, несовместимыми с условиями задачи, единственной возможной альтернативой указанному предположению остается знание этими учеными испанского языка В этом случае соответствующая табличка примет вид

	русский	английский	французский	испанский
физик		-		+
биолог	-			
историк	+	-	-	+
математик	-			+

Значит, биолог не знает испанский язык, а знает английский и французский. Поэтому, поскольку физик знает общий язык с биологом (условие (6)), он знает французский язык и не знает русский.

Наконец, из условия (3) следует, что математик знает английский язык, а не французский

Окончательно табличка примет следующий вид:

	русский	английский	французский	испанский
физик	-	-	+	+
биолог	-	+	+	-
историк	+	-	-	+
математик	-	+	-	+

□

82 Валерий играет на контрабасе и учится на историческом факультете.

Составим табличку, в которой отражены условия задачи. В этой табличке буквы: *ф, г, и, б* и *с, у, п, к* суть начальные буквы факультетов, на которых учатся студенты, и инструментов, на которых студенты играют. Наличие нескольких букв в одной ячейке таблицы указывает на возможные альтернативы.

имя	инструмент	факультет
Михаил	*с*	*ф, г, б*
Леонид	*у, п*	*ф, и, б*
Андрей	*к, у*	*ф, г, и*
Валерий	*п, к*	*г, и, б*

Студент, который в оркестре играет на пианино, учится на физическом факультете. Следовательно (см. табличку), его зовут Леонид.

Тогда Андрей — ударник и учится он на географическом факультете

Студентом биологического факультета может быть только Михаил.

Следовательно, Валерий играет на контрабасе и учится на историческом факультете. □

83. В июне.

Составим для наглядности табличку, в ячейках которой отметим год нахождения в отпуске

	май	июнь	июль	август
Барков		3		
Демин			1	2
Еремин	2			
Фомин			4	

Из условий задачи следует, что в каждом столбце и в каждой строке таблички находятся все цифры от 1 до 4. Поэтому Демин был в отпуске в июне на четвертый год, а в мае — на третий год Барков на второй год был в отпуске в июле, а Еремин на третий год отдыхал в отпуске в июле. Следовательно, в первый год Еремин был в отпуске в июне, на четвертый год — в августе, а Фомин на второй год был в отпуске в июне. Наконец, Фомин в первый год был в отпуске в мае, а на третий год — в августе и поэтому Барков на четвертый год был в отпуске в мае, а в августе он отдыхал в первый год. Таким образом, график отпусков был таким:

	май	июнь	июль	август
Барков	4	3	2	1
Демин	3	4	1	2
Еремин	2	1	3	4
Фомин	1	2	4	3

□

84. Богданов Василий, Лазарев Валентин, Смелов Михаил, Суров Валерий, Лазарева Нина, Смелова Валерия

Поскольку Смелов из Одессы, а Суров и Лазарев киевляне, значит, житель Боярки — Богданов Василий

Лишь в фамилиях Богданов и Лазарев по три гласные буквы, но поскольку Богданова зовут Василий, то Лазарева — Валентин Поэтому фамилия Нины — Лазарева

Поскольку Сурова зовут не Михаил (это не женское имя), то его зовут Валерий. Поэтому остальных сотрудников имена — Смелов Михаил и Смелова Валерия □

85. Гришин — штурман, Дубов — летчик, Федотов — бортинженер.

Составим табличку, в клетках которой словами «да» и «нет» отметим суть высказываний людей, встретившихся журналисту

	летчик	бортинженер	штурман
Гришин			
Дубов	нет	да	
Федотов	нет	нет	

Поскольку журналисту сообщили лишь один достоверный факт о специальности одного из членов экипажа самолета, то содержимое уже заполненных трех клеток таблицы необходимо заменить, следуя правилу «нет» заменить на «да», а «да» заменить на «нет» (если конечно, утверждение о том, что Дубов бортинженер не соответствует действительности)

Ясно, что достоверная информация об экипаже, занесенная в табличку, содержит в каждой строке и столбце таблички лишь по одному «да». Значит, одно из полученных журналистом утверждений о специальности Федотова правильное При этом, если бы правильным оказалось утверждение о том, что Федотов не бортинженер, то отсюда следовало бы, что в экипаже два летчика — Федотов и Дубов. Следовательно, «Федотов не летчик» и есть тем единственным правильным утверждением о специальностях каждого члена экипажа.

С учетом этого можно занести в табличку достоверную информацию и затем уже легко установить, что Дубов — летчик, Федотов — бортинженер, а Гришин — штурман.

	летчик	бортинженер	штурман
Гришин	*нет*	*нет*	*да*
Дубов	да	нет	*нет*
Федотов	нет	да	*нет*

□

86. Антонюк победил Даринцева и Маричева и проиграл Григорову.

Поскольку в турнире каждый шахматист встречается с остальными тремя и результат каждой такой встречи — победа одного из соперников, то победителем турнира может быть шахматист, победивший по крайней мере в одной встрече и набравший при принятых условиях подсчета не меньше, чем одно очко. Докажем это.

Пусть на рисунках 23 и 24 изображены два возможных исхода встреч трех шахматистов. На этих рисунках кружочками изображены участники шахматного турнира, а направления стрелок указывают победителя соответствующей парной встречи.

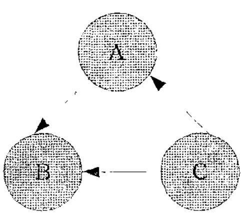


Рис 23

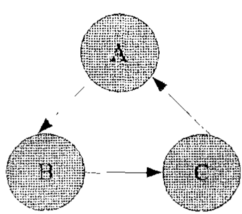


Рис 24

В случае, изображенном на рис 23, на звание победителя может претендовать шахматист В, набравший 1 очко. В случае же, представленном на рис 24, ни одному из шахматистов очки не начисляются Однако после игры четвертого шахматиста D с одним из шахматистов A, B или C сразу же появится шахматист, имеющий 1 очко Действительно, пусть, например, шахматист D померился силами с шахматистом A и проиграл ему. Тогда, согласно принятому правилу, шахматист B, выигравший у шахматиста A, получает 1 очко Если же шахматист D выиграет у шахматиста A, то тогда уже он получит 1 очко за победу шахматиста A над шахматистом C

Таким образом, Григорову удалось победить в одной или в двух встречах.

Предположим, что Григоров победил лишь в одной встрече (две проиграл). Если бы проигравший ему соперник выиграл всего лишь одну встречу, то чемпионом турнира также был бы и Маричев Поэтому проигравший Григорову соперник (Антонюк или Даринцев) в двух своих остальных встречах должен оказаться победителем, за что Григорову должно быть засчитано 2 очка

Предположим сначала, что Григоров победил Даринцева, который, в свою очередь победил Антонюка и Маричева. Если бы при этом Антонюк выиграл у Маричева, то он с 2 очками также как и Григоров был бы чемпионом турнира, а если бы ему проиграл, то с 2 очками был бы чемпионом турнира Маричев.

Значит, если Григоров победил лишь в одной встрече, то это могла быть его встреча с Антонюком. Поскольку при этом он Даринцеву проиграл, то количества начисленных игрокам очков определялись бы результатом встречи Даринцев—Маричев В таком случае победа Даринцева над Маричевым принесла бы ему в итоге 2 очка (напомним, столько же, сколько и чемпиону Григорову). Если бы Даринцев проиграл Маричеву, то в этом случае Маричев набрал бы 2 очка.

Следовательно, предположение о победе Григорова лишь в одной встрече ошибочно: Григоров победил и Антонюка, и Даринцева. Поэтому Маричев, победивший Григорова, набрал не менее двух очков Поскольку Григоров — единственный чемпион, то набрал он не менее трех очков Изобразим на рис 25 уже известные результаты встреч.

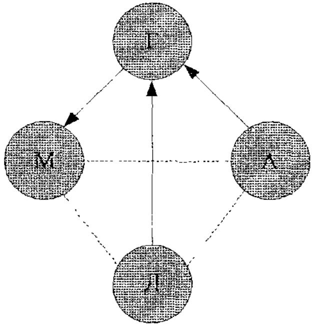


Рис 25

Так как у Григорова в итоге оказалось не менее трех очков, то один из побежденных им соперников (Антонюк и Даринцев) выиграл 2 раза, а второй — не менее одного раза

Даринцев дважды выиграть не мог, поскольку в этом случае он набрал бы 2 очка (столько же, сколько и Маричев), а у Антонюка было бы лишь 1 очко и поэтому именно он занял бы последнее место в турнире.

Следовательно, Антонюк победил Даринцева и Маричева, а Даринцев — победителя Григорова — Маричева.

Окончательный итог турнира приведен на рис. 26

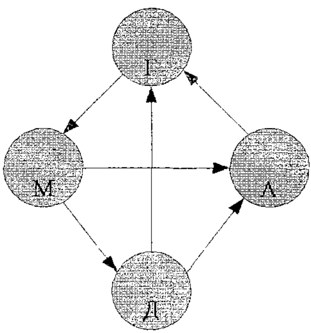


Рис 26

Итак, Григоров в турнире набрал 3 очка, Антонюк и Маричев по 2 и Даринцев — 1 □

Задачи, решение которых предполагает составление уравнений

87. Введем следующие обозначения:

2	+	А	+	Б	=	4
+	□	-	□	+	□	+
1	-	3	+	В	=	Г
+	□	+	□	-	□	+
Д	+	5	-	5	=	Е
=	□	=	□	=	□	=
4	+	Ж	+	2	=	9

Из последней строки таблицы следует, что Ж = 3 и поэтому, из третьего столбца этой таблицы, получаем А = 1.

Теперь из первой строки таблицы легко определить, что Б = 1, а из пятого столбца, что В = 6

Значит, из третьей строки таблицы следует, что Г = 4. Из первого и последнего ее столбцов имеем соответственно Д = 1 и Е = 1.

Итак,

2	+		+		=	4
+	□	-	□	+	□	+
1	-	3	+		=	
+	□	+	□	-	□	+
	+	5	-	5	=	
=	□	=	□	=	□	=
4	+		+	2	=	9

□

88. У Алеши любое количество орехов, кратное 3.

Если у Алеши x орехов, то у Нади их $x/3$ (натуральное число !) Второе же условие задачи никаких дополнительных ограничений на x не привносит, поскольку состоит в выполнении равенства $x/3 + x/3 = x - x/3$, в котором значение левой части тождественно равно значению правой

Значит, x — любое натуральное число, делящееся нацело на 3 □

89. Удои у коричневых коров выше, чем у черных.

Обозначим через K и $Ч$ количество молока, которое дает ежедневно одна корова соответственно коричневой масти и черной. Тогда по условию задачи выполняется равенство

$$5(4Ч+3K) = 4(3Ч+5K),$$

из которого следует, что $8Ч = 5K$ и поэтому $K > Ч$. □

90. Через 15 минут.

Заметим, что для того, чтобы пройти половину пути до школы, брату потребуется 15 минут, а его сестре — 20. При этом разность указанных времен как раз и составляет 5 минут. Значит, именно через 15 минут брат догонит сестру на полпути до школы. □

91. Длины обеих ковровых дорожек равны.

Действительно, длина ковровой дорожки, которой покрыта лестница, имеющая m ступенек, равна

$$L_m = \left(\frac{l}{m} + \frac{h}{m}\right)m = l + h.$$

Понятно, что такую же длину имеет и ковровая дорожка, покрывающая лестницу, имеющую n ступенек. □

92. 41 монета.

Обозначим через n — количество имеющихся монет, а через m — количество монет, находящихся на одной стороне квадрата. Тогда, по условиям задачи, выполняются следующие равенства:

$$m^2 = n - 5$$
$$(m + 1)^2 = n + 8.$$

Вычтя из второго равенства первое, получим

$$(m + 1)^2 - m^2 = 2m + 1 = 13,$$

откуда следует, что $m = 6$ и потому $n = m^2 + 5 = 41$. □

93. 3 км/час.

По определению, средняя скорость движения $\bar{v} = \dfrac{2S}{T}$, где $2S$ — длина пройденного пути (S — длина дороги), а T — время, затраченное на его прохождение.

Поскольку $T = t_1 + t_2$, где $t_1 = \dfrac{S}{v_1}$ и $t_2 = \dfrac{S}{v_2}$ — время, потраченное соответственно на подъем в гору и спуск с горы ($v_1 = 2$ км/час, $v_2 = 6$ км/час),

то $\bar{v} = \dfrac{2S}{t_1 + t_2} = \dfrac{2S}{\dfrac{S}{v_1} + \dfrac{S}{v_2}} = \dfrac{2v_1v_2}{v_1 + v_2} = \dfrac{2 \cdot 2 \cdot 6}{2 + 6} = 3$ км/час. □

94. 27, 25, 18, 16, 14.

Пусть в первой кучке находятся *А* деталей, во второй — *Б*, в третьей — *В*, в четвертой — *Г* и в пятой — *Д*. Тогда по условиям задачи выполняются равенства:

$$А+Б+В+Г+Д = 100, \qquad (1)$$
$$А+Б = 52, \qquad (2)$$
$$Б+В = 43, \qquad (3)$$
$$В+Г = 34, \qquad (4)$$
$$Г+Д = 30. \qquad (5)$$

Вычтя из равенства (1) второе и пятое, получим $В = 18$. Далее из равенства (3) определяется $Б = 25$, из равенства (2) — $А=27$, из (4) — $Г=16$ и, наконец, из (5) — $Д=14$. □

95. 25 % (≈ 16.7 %).

Обозначим через *P* и *C* соответственно величину получаемой зарплаты и общую цену производимых покупок (до ее изменения). Тогда, если до указанного в задаче изменения цен на товары их можно было купить в количестве $Q = P/C$ единиц, то после снижения цен — $Q_+ = P/0.8C$ единиц (после увеличения цен — $Q_- = P/1.2C$). Значит,

$$\left(\frac{Q_+ - Q}{Q}\right) \cdot 100\% = \frac{20}{0.8}\% = 25\% \quad \text{и} \quad \left(\frac{Q - Q_-}{Q}\right) \cdot 100\% = \frac{20}{1.2}\% \approx 16.7\%. \ □$$

96. 1/3.

Примем за 1 нужное количество соли и обозначим через *x* ту ее часть, которая была положена в суп в первый раз. Тогда условие задачи можно записать в виде уравнения $1 - x = 2(1 - 2x)$, имеющего единственное решение $x = 1/3$. □

97. 2/3

Обозначим через m и n соответственно числитель и знаменатель искомой дроби и пусть k — натуральное число, прибавление которого к числителю дроби и одновременное умножение на которое знаменателя дроби значение этой дроби не изменяет, т.е.

$$\frac{m+k}{nk}=\frac{m}{n}.$$

Из этого равенства следует, что $m + k = mk$ и поэтому

$$m=\frac{k}{k-1}=1+\frac{1}{k-1}$$

Отсюда, поскольку m и k — целые числа, причем $m \neq 0$, следует, что $k = 2$ и, значит, $m = 2$

Наконец, по условиям задачи, $\frac{2}{n}>\frac{1}{2}$ и $n > m$. Поэтому $n = 3$. □

98. 21978.

По условию задачи

$$4(abcde) = edcba.$$

Ясно, что искомое число должно начинаться либо с 1, либо с 2 (то есть $a = 1$ или $a = 2$), так как в противном случае учетверенное число было бы уже шестизначным.

В результате умножения искомого числа на 4 получается четное число. Значит, $a = 2$.

Последняя цифра произведения $4e$ равна 2. Поэтому либо $e = 3$ либо $e = 8$.

Поскольку e — первая цифра пятизначного числа, которое в 4 раза больше искомого пятизначного числа, то $e = 8$

Отсюда следует, что b не может быть больше 2 и так как число $b2$, образуемое последними двумя цифрами числа $edcba$, должно делиться нацело на 4, то $b = 1$.

Произведение $4d$ должно оканчиваться цифрой 8. Поэтому $d = 7$ или $d = 2$ Так как $4(ab) = 4(21) = 84 \leq ed = 8d$, то $d = 7$

И, наконец, из соотношения $4(21c78) = 87c12$ следует, что $c = 9$. □

99. 2025, 4050, 6075.

Пусть $x0yz$ — позиционная запись искомого числа. Тогда, по условию задачи, $1000x + 10y + z = 9(100x + 10y + z)$ или $100x = 80y + 8z$

Так как правая часть этого уравнения делится нацело на 8, то x — четное число и при этом $x \neq 8$ (y и z не превосходят 9 и поэтому $800>80y + 8z$)

Значит, 2, 4, 6 — возможные значения x. Для каждого из этих значений нетрудно теперь подобрать единственно возможные значения y и z □

100. 975.

Обозначим через x и y соответственно число десятков и единиц искомого числа. Тогда по условию задачи выполняется равенство

$$900 + 10x + y - 100x - 10y - 9 = 216,$$

эквивалентное $10x + y = 75$. Поскольку x и y — натуральные числа, единственным решением этого равенства является пара $x=7$, $y=5$ □

101 960 рыб.

Помеченные рыбы составляют $p = \dfrac{60}{N}$ часть всех N рыб, находящихся в пруду Предполагая, что помеченные и непомеченные рыбы в пруду равномерно перемешались, указанное соотношение между ними сохранится в следующем улове рыбаков, т е $p = \dfrac{5}{80}$.

Поэтому $N = \dfrac{60}{p} = \dfrac{60\ 80}{5} = 960.$ □

102 16 ударов.

Пусть за 12 ударов весла байдарка проделала путь S_1, а волна — S_2. Так как через 12 ударов весла байдарка нагнала ту же круговую волну, то $S_1 = 3S_2$. Поскольку треть пути S_1 байдарка проходит после четырех ударов весла, то путь S_1+S_2 она проходит после 16 ударов. □

103. Анне сейчас 18 лет.

Пусть Анне сейчас x лет и y лет тому назад ей было 12 лет (в два раза меньше лет, чем сейчас Марии). Значит, $x - y = 12$

Поскольку y лет тому назад Марии было x лет, то $24 - y = x$.

Решение полученной системы уравнений очевидно: $x=18$ и $y = 6$. □

104 Василию 26 лет и он — муж Анны, которой 21 год;

Петру 27 лет, а его жене Наталье — 22 года;

Семену 30 лет, а его жене Ирине — 25 лет.

Обозначим количество лет каждого из супругов начальной буквой его имени.

Так как Василий старше Ирины только на 1 год, то он не может быть ее мужем. Василий также не может быть мужем Натальи, поскольку им вместе 48 лет, а система уравнений

$$В + Н = 48,$$
$$В - Н = 5$$

имеет единственное решение В = 26.5, Н = 21.5, которое не удовлетворяет одному из условий задачи.

Значит, Василий — муж Анны.

Аналогично легко доказать, что Семен — муж Ирины, а Петр — Натальи.

Из уравнений

$$В + П + С + Н + И + А = 151,$$
$$В + П + С - (Н + И + А) = 15$$

следует, что сумма лет трех мужчин равна 83, а сумма лет их жен равна 68.

Из уравнений

$$С = И + 5,$$
$$С = 52 - Н$$

следует, что И + Н = 47 и так как Н + И + А = 68, то А = 21.

Из соотношения В = А + 5 получаем В = 26, а из соотношения В + Н = = 48 – Н = 22 и поэтому П = 27.

Поскольку И = 47 – Н, то И = 25 и, следовательно, С=30. □

105. В классе никто не имеет отличных оценок по математике; 2 ученика, умеющих плавать, также умеют бегать на лыжах.

Пусть среди учеников-спортсменов класса *В*, *Л* и *П* человек умеют только лишь ездить на велосипеде, бегать на лыжах и плавать соответственно. Обозначим через *ВЛ*, *ВП* и *ЛП* количества учеников, которые умеют соответственно ездить на велосипеде и бегать на лыжах, ездить на велосипеде и плавать, бегать на лыжах и плавать. Пусть *Н* — количество учеников класса, спортом не занимающихся.

Поскольку все ученики-спортсмены получают по математике лишь хорошие и удовлетворительные оценки, то $Н \geq 6$ (в этом классе ученики, не занимающиеся спортом, по математике получают либо неудовлетворительные оценки, либо отличные).

По условию задачи выполняются следующие равенства:

$$Н + В + Л + П + ВЛ + ВП + ЛП = 25, \qquad (1)$$
$$В + ВЛ + ВП = 17, \qquad (2)$$
$$Л + ВЛ + ЛП = 8, \qquad (3)$$
$$П + ВП + ЛП = 13 \qquad (4)$$

Сложив последние 3 равенства и вычтя результирующее равенство из равенства (1), после несложного преобразования получим

$$ВЛ+ВП+ЛП = 13+Н.$$

Поскольку $Н \geq 6$, из последнего равенства имеем

$$ВЛ+ВП+ЛП \geq 19,$$

а из равенства (1) —

$$В + Л + П + ВЛ + ВП + ЛП \leq 19.$$

Отсюда, поскольку значения $В$, $Л$ и $П$ неотрицательны, следует, что $В = Л = П = 0$ и что

$$ВЛ + ВП + ЛП = 19 \qquad (5)$$

(в классе каждый ученик-спортсмен владеет 2 видами спорта).

Из равенств (1) и (5), учитывая $В = Л = П = 0$, имеем $Н = 6$. Значит, учеников, получающих по математике отличные оценки, в классе нет.

Наконец, из равенств (2)-(4) и (5) легко получить $ЛП = 2$, $ВП = 11$, $ВЛ = 6$. □

106. 125.

Пусть x — такое число, что

$$100 + x = m^2,$$
$$164 + x = n^2,$$

где m и n — натуральные числа, причем $n > m$, $n > 12$, $m > 10$.

Вычтем из второго уравнения первое. Получим

$$(n - m)(n + m) = 64.$$

Если $n - m = 1$, то $n + m = 64$ и тогда $2n = 65$, что противоречит требованию целочисленности n.

Пусть $n - m = 2$. Тогда $n + m = 32$ и поэтому $n = 17$, $m = 15$, что не противоречит условиям задачи. Значит, $x = m^2 - 100 = 164 - n^2 = 125$. □

107. 20 кг.

Поскольку один магазин получил в два раза больше по весу гвоздей, чем другой, то общий вес гвоздей, полученных магазинами, должен делиться на 3. Общий же вес всех ящиков, находившихся на складе, равен $15 + 16 + 18 + 19 + 20 + 31 = 119$ кг.

При делении числа 119 на 3 в остатке получается 2. Значит, вес ящика, который был оставлен на складе, выражается числом вида $3n + 2$. Вес только одного ящика, весящего 20 кг, удовлетворяет указанному свойству.

Теперь уже нетрудно определить, какие ящики были направлены в магазины: первый магазин получил ящики весом 16, 19 и 31 кг, а второй — 15 и 18 кг. □

108. 108.

Пусть xyz — десятичная позиционная запись искомого числа. Тогда по условию задачи выполняется равенство

$$(100x + 10y + z) \cdot 89/12 = 100z + 10y + x.$$

Из этого равенства следует, что

$$z = 8x + \frac{70}{101}y.$$

Так как z — должно быть целым числом, то необходимо, чтобы число $70y$ делилось без остатка на 101. Поскольку целое число y не должно превосходить 10, то $y = 0$. Значит, $x = 1$, $z = 8$. □

109. 12.

Пусть $(n+1)$-й член $a_{n+1} = 2 + 5n$ первой прогрессии равен $(m+1)$-му члену $b_{m+1} = 2 + 3m$ второй прогрессии, т.е.

$$2 + 5n = 2 + 3m$$

или

$$5n = 3m.$$

Отсюда $n = \dfrac{3m}{5}$ и, значит, совпадение членов прогрессий возможно лишь при m, равном 5, 10, 15 и т.д. Следовательно, число всех одинаковых членов прогрессий из первых 60 равно $60:5 = 12$. □

110. Длина участка 35 м, ширина — 17.5 м.

Обозначим через a и b длины сторон участка. Тогда площадь S этого участка равна $a \cdot b$ и поскольку по условию задачи $2a + b = 70$, то

$$S = a \cdot (70 - 2a).$$

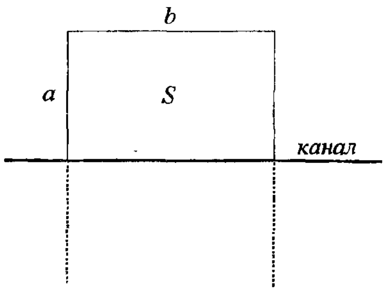
Так как

$$a(70 - 2a) = -2(a^2 - 35a) = -2(a^2 - 2 \cdot 17.5 \cdot a + 17.5^2 - 17.5^2) =$$
$$= 2 \cdot 17.5^2 - 2(a - 17.5)^2,$$

то значение S площади участка максимально, когда $a = 17.5$ м и, значит, $b = 35$ м.

Эту же задачу можно решить и другим способом, если заранее знать, что среди участков прямоугольной формы и имеющих одинаковый периметр наибольшую площадь имеет квадратный участок .

На рисунке изобразим прямой жирной линией канал, сплошной линией —огораживаемый участок и пунктирной линией — зеркальное отражение этого участка относительно канала.



Общий периметр участка, составленного из двух равных половинок «реального участка» и его «отражения» будет равен 140 м. Составной участок будет иметь наибольшую площадь (и тогда наибольшую площадь будет иметь и «реальный участок»), если этот участок — квадрат, т е., если $b = 2a$. Поскольку при этом $4b = 140$, то нетрудно уже определить, что $b = 35$м и $a = 17.5$м. □

111. Леночкины пальто, ботинки и шапочка стоят соответственно 20 рублей, 8 и 2 рубля, а Сашины — 30, 12 и 3.

Обозначим через $П$, $Б$ и $Ш$ стоимость Леночкиных соответственно пальто, ботинок и шапочки. Поскольку Сашины пальто, ботинки и шапочка вместе стоят в 1.5 раза дороже таких же покупок для Леночки, то

$$1.5(П + Б + Ш) + П + Б + Ш = 75.$$

Отсюда следует, что $2.5(П + Б + Ш) = 75$ и поэтому

$$П + Б + Ш = 30. \qquad (1)$$

По условию задачи $1.5П = 3(Б + Ш)$, то есть

$$П = 2(Б + Ш). \qquad (2)$$

Поэтому $Б + Ш = 0.5П$, а равенство (1) принимает вид $1.5П = 30$. Отсюда $П = 20$, а поскольку $П = 10Ш$, $Ш = 2$.

Так как $Б = 0.5П\text{-}Ш$, то $Б = 8$.

Наконец, стоимость Сашиных пальто, ботинок и шапочки нетрудно подсчитать, умножив стоимость аналогичных покупок для Леночки на 1.5. □

112. В селе A.

Пусть школа построена в точке O (рис. 27).

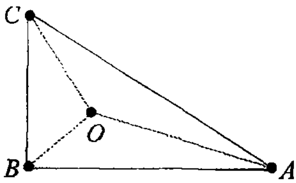


Рис. 27

Тогда общее число «человеко-километров» S, проходимых школьниками, равно

$$S = 300 \cdot OA + 200 \cdot OB + 100 \cdot OC.$$

Преобразуем это число:

$$\begin{aligned} 300 \cdot OA + 200 \cdot OB + 100 \cdot OC &= \\ &= 200 \cdot OA + 200 \cdot OB + 100 \cdot OA + 100 \cdot OC = \\ &= 200 \cdot (OA + OB) + 100 \cdot (OA + OC) \geq \\ &\geq 200 \cdot AB + 100 \cdot AC \end{aligned}$$

(так как $OA + OB \geq AB$ и $OA + OC \geq AC$).

Значит, число S будет наименьшим, если $OA + OB = AB$ и $OA + OC = AC$, т.е., если школа будет построена в селе А. □

113. 142857.

Так как указанное в условии задачи число начинается с единицы, то его можно записать в виде суммы

$$100\,000 + x.$$

Значит, $3(100\,000 + x) = 10x + 1$ и поэтому $x = 42\,857$. □

114. 198.

Пусть x, y и z — соответственно число сотен, десятков и единиц искомого числа. Тогда по условию задачи

$$11(x + y + z) = 100x + 10y + z.$$

Отсюда следует соотношение

$$89x = y + 10z,$$

которое выполняется лишь при $x = 1$, $y = 9$, $z = 8$. □

115. 550.

Если по 10 ящиков находятся в x больших и y маленьких ящиках, то всего имеется $N = 10 + 10x + 10y = 10 + 10(x + y)$ ящиков. Поскольку $x + y = 54$, то $N = 10 + 10 \times 54 = 550$. □

116. 5.

Из второго условия задачи следует, что число n может быть записано в виде

$$n = 3k + 2, \tag{1}$$

где k — натуральное число ($k = 1, 2, ..$).

Ввиду же первого условия задачи n — нечетное число. Поэтому в соотношении (1) число k должно быть нечетным, т.е. $k = 2m + 1$, где m — натуральное число.

Значит, $n = 3(2m + 1) + 2 = 6m + 5$, $m = 1, 2, 3,...$ из чего следует, что при делении n на 6 в остатке будет 5. □

117. Андрею — 4 года, а его отцу — 44.

Пусть сегодня Андрею исполнилось x лет, а его отцу — y. Тогда, в силу условий задачи,

$$11x = y,$$
$$5(x+6) = y+6,$$
$$3(x+16) = y+16,$$
$$2(x+36) = y+36.$$

Решение любой пары указанных уравнений (их система избыточна) единственно: $x = 4$, $y = 44$. □

118. Вите и его прадедушке может быть соответственно либо 12 и 84 года, либо 13 лет и 93 года, либо 24 и 84 года.

Пусть Вите $10a + b$ лет, а возраст его отца, деда и прадеда при соответствующих x и y – $10x + y$.

По условию задачи $(10a + b)(10x + y) = (10b + a)(10y + x)$. Из этого равенства следует, что $ax = by$ и, значит, $b = \frac{ax}{y}$.

Предположим сначала, что Вите меньше 20 лет. Тогда $a = 1$ и $b = \frac{x}{y}$ Составим табличку возможных значений b, x и y.

b	2	3	4	5	6	7	8	9
$\frac{x}{y}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{3}{1}$	$\frac{4}{1}$	$\frac{5}{1}$	$\frac{6}{1}$	$\frac{7}{1}$	$\frac{8}{1}$	$\frac{9}{1}$
$\frac{x}{y}$	$\frac{4}{2}$	$\frac{6}{2}$	$\frac{8}{2}$					
$\frac{x}{y}$	$\frac{6}{3}$	$\frac{9}{3}$						
$\frac{x}{y}$	$\frac{8}{4}$							

Поскольку в задаче говорится об отце, деде и прадеде, то возможными значениями для b являются лишь 2 и 3 (при $b > 3$ отношение $\frac{x}{y}$ допускает либо одно, либо два значения). Значит, если Вите 12 лет, то его отцу 42 года (разумеется, что отец 12 летнего мальчика старше 21-летнего мужчины), деду — 63 года и прадеду — 84 года. Если же Вите 13 лет, то его отцу (см. третий столбец таблички) 31 год, деду — 62 года и прадеду — 93 года.

Если же предположить, что Витя старше 20 лет, то $b = \frac{2x}{y}$. Рассуждая аналогичным способом, нетрудно установить, что в этом случае Вите 24 года, его отцу — 42 года, деду — 63 и прадеду — 84 года. □

119. 50 кг.

Обозначим через m количество «сухого вещества» в ягодах, которое со временем не изменяется

Пусть V и v — количество воды в ягодах на момент проведения соответственно первого и второго анализа. Тогда по условиям задачи

$$V + m = 100, \qquad \frac{V}{V+m} = 0.99, \qquad \frac{v}{v+m} = 0.98.$$

Из первых двух уравнений следует, что $V = 99$ кг, $m = 1$ кг С учетом этого из третьего уравнения имеем $v = 49$ кг и поэтому $v + m = 50$ кг. □

120. $550 = 11(5^2 + 5^2 + 0^2)$, $803 = 11(8^2+0^2+3^2)$.

Пусть abc — позиционная десятичная запись искомого числа.

По условию задачи должно выполняться равенство

$$100a + 10b + c = 11(a^2 + b^2 + c^2) \qquad (1)$$

Следовательно, числю abc делится на 11, что по признаку делимости на 11 возможно в рассматриваемом случае лишь при выполнении равенства

$$a + c = b + 11 \cdot k,$$

в котором либо $k = 0$, либо $k = 1$

Рассмотрим сначала случай, когда $k = 0$. Тогда, подставив в соотношение (1) значение $b = a + c$, после несложных преобразований получим

$$10a + c = 2(a^2 + ac + c^2) \qquad (2)$$

Из этого равенства следует, что либо $c = 0$, либо c — четное число.

Легко убедиться, что уравнение (2) имеет целочисленное решение $a = 5$ лишь при $c = 0$. При этом $b = 5$

Если же $k = 1$, то подставив в соотношение (1) значение $a = b + 11 - c$ и приведя подобные члены, получим

$$2c^2 - 13c + 21 = 2bc - 2b^2 - 12b.$$

Это уравнение с двумя неизвестными имеет лишь одно допустимое решение: $b = 0$, $c = 3$, которое определяет значение $a = 8$. □

121. $625^2 = 390\,625$, $376^2 = 141\,376$.

Пусть abc — позиционная запись искомого числа.

По условию задачи должно выполняться равенство

$$(abc)^2 = xyzabc, \tag{1}$$

из которого следует, что квадрат числа c оканчивается на c. Поэтому может принимать лишь четыре значения: 0, 1, 5 и 6.

Предположим сначала, что $c = 0$. Тогда $(abc)^2 = (ab \cdot 10)^2 = (ab)^2 \cdot 100$ и поэтому, ввиду равенства (1), $b = 0$ Но тогда $(abc)^2 = (a \cdot 100)^2 = a^2 \cdot 10000$, из чего следует равенство $a = 0$. Значит, $c \neq 0$.

Предположим, что $c = 1$ Тогда из условия

$$\begin{array}{r} \times\begin{array}{r} ab1 \\ \underline{ab1} \end{array} \\ +\begin{array}{r} ab1 \\ ***b \\ \underline{***a} \end{array} \\ xyzab1 \end{array} \tag{2}$$

следует, что $b + b = b$ и, значит, $b = 0$. Поэтому утверждение (2) можно переписать в виде

$$\begin{array}{r} \times\begin{array}{r} a01 \\ \underline{a01} \end{array} \\ +\begin{array}{r} a01 \\ \underline{**0a} \end{array} \\ xyza01, \end{array}$$

что возможно лишь при $a = 0$. Следовательно, $c \neq 1$.

Предположим теперь, что $c = 5$. Тогда

$$(ab5)^2 = (ab \cdot 10 + 5)^2 = (ab)^2 \cdot 100 + ab \cdot 100 + 25 = xyz \cdot 1000 + ab \cdot 10 + 5$$

из чего следует равенство

$$(ab)^2 \cdot 100 + ab \cdot 90 + 20 = xyz \cdot 1000$$

и, значит,

$$(ab)^2 \cdot 10 + ab \cdot 9 + 2 = xyz \cdot 100. \qquad (3)$$

Десятичная позиционная запись числа $xyz \cdot 100$ не содержит единиц лишь в том случае, когда произведение $ab \cdot 9$ оканчивается на 8, то есть, если $b = 2$. Справедливость этого утверждения очевидным образом следует из соотношений

$$ab \cdot 9 + 2 = ab \cdot 10 - ab + 2 = ab \cdot 10 - a \cdot 10 - b + 2 = 10 \cdot (ab - a) + (2 - b).$$

Итак, если в равенстве (3) учесть, что $b = 2$, то это равенство можно преобразовать к виду

$$(10a + 2)^2 \cdot 10 + (10a + 2) \cdot 9 + 2 = xyz \cdot 100$$

или, после раскрытия скобок и приведения подобных членов,

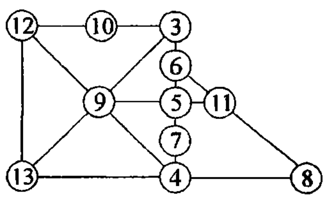
$$100a^2 + 49a + 6 = xyz \cdot 100. \qquad (4)$$

Десятичная позиционная запись числа $xyz \cdot 10$ не содержит единиц лишь в том случае, когда $a = 6$ (действительно, $49a + 6 = 50 \cdot a + (6 - a)$).

Следовательно, $abc = 625$ и, нетрудно убедиться, что $(625)^2 = 390\,625$.

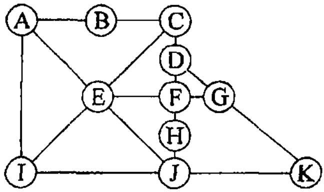
Предполагая, наконец, что $c = 6$ и используя рассуждения, аналогичные проведенным выше, легко доказать, что указанным в постановке задачи свойством обладает еще только одно число — $abc = 376$: $(376)^2 = 141\,376$. □

122. Единственное решение задачи показано на рисунке.



Задачи такого типа решаются перебором возможных вариантов заполнения «кружков» соответствующей фигуры. Процедуру перебора вариантов следует организовать так, чтобы исключить из них заведомо неподходящие.

Введем следующие обозначения.



По условию задачи должны выполняться равенства:

$$A + I = 25, \quad (1)$$
$$A + B + C = 25, \quad (2)$$
$$E + F + G = 25, \quad (3)$$
$$I + J + K = 25, \quad (4)$$
$$A + E + J = 25, \quad (5)$$
$$D + G + K = 25, \quad (6)$$
$$I + E + C = 25, \quad (7)$$
$$C + D + F + H + J = 25. \quad (8)$$

Первое уравнение содержит лишь два неизвестных, каждое из которых может принимать 11 значений. Однако сумма лишь двух чисел из заданных в условии задачи — 12 и 13 — равна 25. Значит, либо $A = 12$ и тогда $I = 13$, либо $A = 13$ и тогда $I = 12$.

Предположим сначала, что $A = 12$ и $I = 13$. Подставив эти значения в уравнения (2), (4), (5) и (7), получим соответственно:

$$B + C = 13, \quad (9)$$
$$J + K = 12, \quad (10)$$
$$E + J = 13, \quad (11)$$
$$E + C = 12. \quad (12)$$

Среди заданных в условии задачи чисел сумма двух слагаемых, равная 12, может быть образована лишь следующими способами:

$$12 = 3 + 9 = 4 + 8 = 5 + 7.$$

Поэтому возможные значения, например J, таковы: 3, 4, 5, 7, 8, 9. Последовательно подставив эти значения в уравнения (10) и (11), определим соответствующие значения K, E и затем уже из уравнений (12), (9) — C и B. Занесем полученные значения указанных величин в табл. 1.

Таблица 1

	J	K	E	C	B
*	3	9	10	2	11
	4	8	9	3	10
	5	7	8	4	9
*	7	5	6	6	7
	8	4	5	7	6
	9	3	4	8	5

В этой таблице некоторые строки помечены звездочкой *. В этих строках, которые в последующем исключаются из рассмотрения, вычисленные значения некоторых величин неприемлемы (так, в первой строке табл. 1, записано число 2 — неразрешенное в задаче значение ни для одной из величин, а в четвертой строке — одинаковые значения для E и C).

Из уравнений (3) и (6) можно вычислить F и D:

$$F = 25 - E - G, \tag{13}$$

$$D = 25 - K - G \tag{14}$$

(допустимые значения E и K можно брать из табл. 1, а допустимые значения G — выбирать из указанных в условии задачи, помня, что некоторые из них уже «заняты» другими переменными: A, I, J, K, E, C и B), а затем из уравнения (8) вычислить значение H:

$$H = 25 - C - J - F - D. \tag{15}$$

Занесем значения всех величин в табл. 2, выделяя жирным шрифтом их недопустимые значения или сочетания. Следует отметить, что после занесения в какую-либо клетку таблицы недопустимого числа, вычисление содержимого остальных клеток этой строки становится излишним.

Таблица 2

	K	E	G	F	D	H	A	I	J	C	B
*	8	9	5	11	**12**		**12**	13	4	3	10
*	8	9	6	**10**	11		12	13	4	3	**10**
*	8	9	7	9	**10**		12	13	4	3	**10**
	8	9	11	5	6	7	12	13	4	3	10
*	7	8	3	**14**			12	13	5	4	9
*	7	8	6	11	**12**		**12**	13	5	4	9
*	7	8	10	**7**			12	13	5	4	9
*	7	8	11	**6**	**6**		12	13	5	4	9
*	4	5	3	**17**			12	13	8	7	6
*	4	5	9	11	**12**		**12**	13	8	7	6
*	4	5	**10**	**10**			12	13	8	7	6
*	4	5	11	9	10	**-9**	12	13	8	7	6
*	3	4	6	**15**			12	13	9	8	5
*	3	4	7	**14**			12	13	9	8	5
*	3	4	10	11	**12**		**12**	13	9	8	5
*	3	4	**11**	10	**11**		12	13	9	8	5

Итак, лишь в четвертой строке табл. 2 записаны значения введенных переменных, удовлетворяющих всем условиям задачи. Эти значения определяют *одно из возможных решений.*

Другие решения, если они существуют, могут быть найдены при рассмотрении случая, когда A = 13, I = 12.

Подставив эти значения в уравнения (2), (4), (5) и (7), получим

$$B + C = 12, \qquad (16)$$
$$J + K = 13, \qquad (17)$$
$$E + J = 12, \qquad (18)$$
$$E + C = 13. \qquad (19)$$

Из анализа правой части уравнения (18) следует, что возможные значения J таковы: 3, 4, 5, 7, 8, 9. Последовательно подставив эти значения в уравнения (17) и (18), определим соответствующие значения K, E и затем уже из уравнений (19), (16) — C и B. Занесем полученные значения указанных величин в талб. 3.

Таблица 3

	J	K	E	C	B
	3	10	9	4	8
	4	9	8	5	7
*	5	8	7	**6**	**6**
	7	6	5	8	4
	8	5	4	9	3
*	9	4	3	10	**2**

Теперь, используя данные, находящиеся в строках табл. 3, не помеченных звездочкой, соотношения (13) – (15) и допустимые значения G, составим табл. 4 по правилу, аналогичному правилу заполнения табл. 2.

Таблица 4

	K	E	G	F	D	H	A	I	J	C	B
*	**10**	9	5	11	**10**		13	12	3	4	8
*	**10**	9	6	**10**			13	12	3	4	8
*	10	**9**	7	**9**			13	12	3	4	8
*	10	**9**	**8**	**8**			13	12	3	4	8
*	9	8	3	**14**			13	12	4	5	7
*	9	8	6	11	10	**-5**	13	12	4	5	7
*	9	8	10	**7**			13	12	4	5	7
*	9	8	11	6	**5**		13	12	4	**5**	7
*	6	5	3	**17**			13	12	7	8	4
*	6	5	**9**	11	10	**-11**	13	12	7	8	4
*	6	5	**10**	**10**			13	12	7	8	4
*	6	5	11	9	**8**		13	12	7	**8**	4
*	5	4	6	**15**			13	12	8	9	3
*	5	4	7	**14**			13	12	8	9	3
*	5	4	**10**	11	**10**		13	12	8	9	3
*	5	4	11	10	**9**		13	12	8	9	3

Так как все строки табл. 4 содержат лишь недопустимые значения неизвестных, найденное ранее решение задачи единственно возможное. □

123. Лена, Саша и Толя написали 60, 48, 24.

Обозначим через Л, С и Т числа, которые написали соответственно Лена, Саша и Толя. Тогда из условия задачи следует выполнение равенств

$$9Т = 2(Л + С), \qquad (1)$$
$$6Л = 5(С + Т). \qquad (2)$$

Пусть a и b соответственно — число десятков и единиц числа, написанного Сашей, то есть $C = 10a + b$.

Так как по условию задачи $Л + Т = 10b + a$ и $Л + Т + С = 11(a + b)$ — трехзначное число, то $a + b \geq 10$.

Сложив равенства (1) и (2) и приведя подобные члены, получим

$$4(Л + Т) = 7С$$

и, *значит*,

$$4(Л + С + Т) = 11С \qquad (3)$$

Подставим в равенство (3) значения суммы Л + С + Т и числа С, выраженные через a и b. Получим равенство

$$4 \cdot 11(a + b) = 11 \quad (10a + b),$$

которое после приведения подобных членов преобразуется к виду

$$b = 2a$$

Следовательно, b — четное число, а так как значения a и b не превосходят 10, а их сумма — не менее 10, то это возможно лишь при $a = 4$ и $b = 8$.

Значит, С = 48, а Л + Т = 84 и поэтому Л = 84 – Т.

Подставим в уравнение (2) значения С и Л. Получим равенство

$$6(84 - Т) = 5(48 + Т),$$

из которого следует, что Т = 24. Значит, Л = 84 – Т = 60. □

Разные задачи

124. Например,

$$2 \times 2 \times 2 - 2:2 = 7;$$
$$2 + 2 + 2 + 2:2 = 7;$$
$$22:2 - 2^2 = 7. \ \square$$

125. Да, например, любым из следующих способов:

$$12345678 \times 0 + 9 = 9;$$
$$1^{23456790} + 8 = 9;$$
$$95\,742 : 10\,638 = 9;$$
$$95\,823 : 10\,647 = 9;$$
$$97\,524 : 10\,836 = 9. \square$$

126. 2519.

Обозначим через N натуральное число, обладающее указанными в условии задачи свойствами.

Так как число N-1 делится без остатка на 2, то $N - 1 = 2A$ и поэтому $N = 2A + 1$, где число A может принимать любое натуральное значение 1, 2, 3, ...

Поскольку число N-2 делится без остатка на 3, т.е. без остатка на 3 делится число $2A - 1 = 2(A + 1) - 3$, то $A = 3B - 1$ и, значит, $N = 6B - 1$, где B =1, 2, 3, ...

Число N-3 $= 6B - 4$ по условию задачи делится без остатка на 4. Это возможно лишь тогда, когда число делится без остатка на 2, т.е., когда $B = 2C$ и, значит, $N = 12C - 1$, $C = 1, 2, 3...$

Ввиду того, что число $N - 4 = 12C - 5$ делится нацело на 5, то $C = 5D$ и поэтому $N = 60D - 1$, $D = 1, 2, 3...$ Заметим, число $N - 5 = 60D - 6$ при любом D делится на 6.

Число $N - 6 = 60D - 7$ делится без остатка на 7 лишь в тех случаях, когда $D = 7E$, т.е., когда $N = 420E - 1$, E =1, 2, 3, ...,

Так как число $N - 7 = 420E - 8$ по условию задачи должно делиться без остатка на 8, то без остатка на 2 должно делиться и число E ($420E = 4 \times 105E$). Значит, $N = 840F - 1$, $F = 1, 2, 3, ...$

Наконец, кратность 9 числа $N - 8 = 840F - 9 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot F - 9$ возможна лишь при условии кратности 3 числа F, т.е. при условии $F = 3G$, G =1, 2, 3, ...

Следовательно, числа $N = 2520G - 1$, $G = 1, 2, 3, ...$ обладают всеми указанными в условии задачи свойствами делимости. Наименьшее из этих чисел — 2519. $\square$

127. 2521.

Если N — указанное в условии задачи число, то число N-1 должно делиться нацело на 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Таким наименьшим натуральным числом очевидно является $2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 7 \times 3 = 2520$ и поэтому $N = 2521$ $\square$

128. 105 263 157 894 736 842.

Обозначим через N неизвестную часть в позиционной записи искомого числа M, т.е. $M = N2$ или, в десятичной записи, $M = 10 \cdot N + 2$.

По условию задачи должно выполняться равенство $2N = 2 \cdot (N2)$, левая часть которого представляет собой позиционную запись числа, полученного после переноса цифры 2 из конца записи числа M в начало. Это равенство можно переписать в следующем виде:

$$2 \cdot 10^n + N = 2(10 \cdot N + 2),$$

где n — число десятичных знаков в записи числа N.

После несложных преобразований последнего равенства имеем

$$2(10^n - 2) = 19 \cdot N,$$

из чего следует делимость (без остатка) числа $10^n - 2 = \underbrace{99..98}_{n}$ на 19.

Таким образом, задача отыскания числа N и, значит, искомого числа M сведена к вычислению минимального натурального числа n, при котором число $10^n - 2$ кратно 19.

Следует отметить, что $N = 2 \quad K$, где K — результат деления $10^n - 2$ на 19. Значение же K можно вычислить путем подбора (постепенного увеличения) n следующим, например, способом.

Число, в десятичной позиционной записи которого представлена лишь цифра 9, делить на 19 до тех пор, пока в остатке не окажется 3 (нетрудно понять, почему никакое число вида 99...9 нацело не делится на 19). Причем именно 3 — единственно возможный остаток от деления на 19 чисел вида 99...9, приписывание к которому справа 8 образует число, делящееся без остатка на 19.

Легко убедиться, что минимальное число вида 99 .9, обладающее указанными выше свойствами, состоит из 16 цифр и что при этом K = = 5263157894736842.

Значит, N = 5263157894736842 × 2 = 10526315789473684
M = 105263157894736842. □

129. 1.

Нетрудно подсчитать, что $598726 = 66525 \cdot 9 + 1$. Поэтому число

$$598726^{1998} = (66525 \cdot 9 + 1)^{1998}$$

может быть представлено в виде суммы 1999 чисел (воспользоваться формулой бинома Ньютона!), из которых 1998 слагаемых делятся нацело на 9, а одно — $1^{1998} = 1$ — нет. Это и будет остаток. □

130. Больше всех рыбы поймал Дима, за ним идет Алик, далее — Костя, а самым неудачливым рыболовом оказался Леня.

Обозначим количество рыбы, выловленной каждым из мальчиков, первой буквой его имени. Тогда условия задачи можно представить в виде следующих соотношений:

$$А > К, \qquad (1)$$
$$Л + Д = К + А, \qquad (2)$$
$$Л + А < Д + К. \qquad (3)$$

Сложим равенство (2) с неравенством (3). Тогда после приведения подобных членов и деления на 2 обеих частей получившегося в результате неравенства получим $Л < К$.

Вычтя из неравенства (3) равенство (2) после несложных преобразований, получим $А < Д$.

Таким образом, $Д < А < К < Л$. □

131. 11 дней.

Чтобы пересечь пустыню, необходимо, чтобы на складе, находящемся на сороковом километре пути, находилось продуктов и воды в количестве, достаточном для трехдневного перехода. Создание же этого запаса потребует от путешественника прийти на сороковой километр со склада, находящемся на двадцатом километре 2 раза· первый раз он принесет с собой трехдневный запас пищи и воды, а второй раз — двухдневный. Из этих запасов он каждый раз израсходует по однодневной порции пищи и воды. Кроме того, после возвращения с сорокового километра на двадцатый путешественнику потребуется однодневный запас пищи и воды Таким образом, на складе, находящемся на двадцатом километре, должно хватать пищи и воды, достаточных для шестидневного перехода. Создание же такого склада на двадцатом километре потребует от путешественника трех ходок (шести дней). Значит, весь переход через пустыню займет 11 дней. □

132. Путешественник, у которого было больше дров, должен получить все деньги.

Считая справедливым вознаграждение, пропорциональное сделанным затратам, именно таков ответ следует считать правильным. Третий путешественник просто «купил» у первого половину его дров (затраты каждого — 1/3 сожженных дров). □

133. За 3 минуты.

1 минута потребуется для поджаривания четырех котлет с одной стороны,

1 минута — для дожаривания двух котлет со второй стороны и поджаривания двух котлет с первой стороны (две полуподжаренные котлеты отложены в сторону);

1 минута — для дожаривания всех полуподжаренных котлет □

134. 4 мальчика и 3 девочки

Пусть М и Д — соответственно количество мальчиков и девочек в семье. По условиям задачи выполняются равенства

$$М - 1 = Д,$$
$$2(Д - 1) = М,$$

решением которых есть М = 4, Д = 3 □

135. В 2.5 раза (на первый этаж дома по лестнице подниматься не надо!). □

136. Никогда (если в днище корабля нет дырки, то лестница поднимается вместе с кораблем). □

137 См. рис. 28, на котором изображены 8 черных шашек и 4 белых.

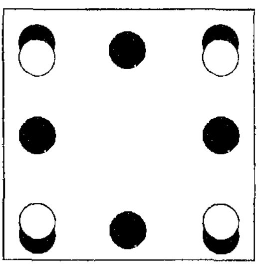


Рис. 28

138. См. рис. 29

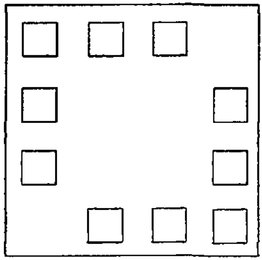
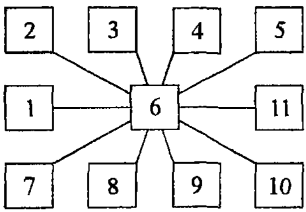


Рис 29

139.



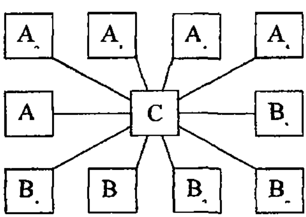
Обозначим буквами A_i, C и B_i неизвестные числа, записанные в квадратиках, находящихся на i-той линии. Всего таких линий 5.

По условию задачи для каждого $i = 1, 2, ..., 5$ выполняется равенство

$$A_i + C + B_i = 18.$$

Сложив все эти равенства, получим

$$A_1 + A_2 + ... + A_5 + B_1 + B_2 + ... + B_5 + 5C = 90.$$



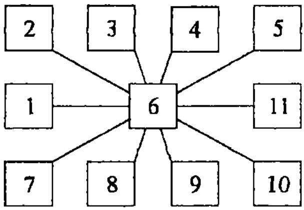
Отсюда, поскольку по условию задачи

$A_1 + A_2 + ... + A_5 + B_1 + B_2 + ... + B_5 + C = 1 + 2 + 3 + ... + 11 = 66,$

$4C = 90 - 66 = 24$ и поэтому $C = 6$. Следовательно, для каждого $i = 1, 2, ..., 5$

$$A_i + B_i = 12.$$

Теперь уже нетрудно подобрать цифры в оставшиеся пустыми квадратики.



□

140 27.

Пусть n — искомое двузначное число.

По условию задачи $n^2 = m^3$, где m — сумма цифр числа n. Значит, $n = m^{3/2}$ и поэтому для некоторого натурального числа k $m = k^2$, т.е. $n = k^3$.

Есть только два двузначных числа, обладающих свойством $n = k^3$: $27 = 3^3$ и $64 = 4^3$. Нетрудно проверить, что лишь одно из них — число 27 — удовлетворяет требованиям задачи: $27^2 = (2 + 7)^3 = 729$. □

141. 543543.

Искомое число должно без остатка делиться на $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$ и поэтому у него первые три цифры совпадают с тремя последними. Значит, искомым числом является 543543. □

142. В 17 раз.

В случае, когда директор приехал на станцию на 90 минут раньше обычного, автомобиль, посланный за ним, проехал лишь путь от завода до места встречи с директором и обратно на завод, затратив при этом на 10 минут меньше времени, чем требуется на путь от завода до станции и обратно. Значит, на преодоление пути от места встречи с директором до станции автомобилю требуется лишь 5 минут и, кроме того, директор встретил этот автомобиль раньше на 5 минут до обычного момента встречи, происходящего на станции. Следовательно, на пути к заводу он встретил автомобиль через 85 минут после своего приезда на станцию.

Итак, на путь, который автомобиль проходит за 5 минут, директору потребовалось 85 минут. Поэтому его скорость меньше скорости автомобиля в $85/5 = 17$ раз. □

143. Карандаш стоит 25 копеек; у одной из школьниц было 24 копейки, а у второй — денег не было вовсе.

Карандаш стоит дороже, чем недостающая до его покупки сумма денег, имеющаяся у каждой из школьниц. Значит, цена карандаша не меньше 25 копеек.

Если бы школьницы захотели купить два одинаковых карандаша, то им не хватило бы 26 копеек. Поскольку имеющихся у них денег не хватило бы и на покупку одного карандаша, то его цена меньше 26 копеек.

Следовательно, карандаш стоит 25 копеек и поэтому у одной из школьниц было 24 копейки, а у второй — денег не было совсем. □

144. Да.

Первоначальное число A запишем в следующем виде: $A = 10a + b$. После переноса последней цифры b этого числа в его начало будет получено новое число $B = b \cdot 100\,000 + a$.

Так как число $A = 10a + b = 7a + 3a + b$ делится на 7, то на 7 также делится число n $3a + b$ и, значит, число

$$3B = b \cdot 300\,000 + 3a = b \cdot 299\,999 + 3a + b = b \cdot 7 \cdot 42\,857 + 3a + b.$$

Поэтому на 7 делится и число B. □

145. Нет.

Поскольку $N = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \dfrac{(n+1)n}{2}$, то для того, чтобы число N оканчивалось цифрой 7, необходимо, чтобы произведение $(n + 1)n$ оканчивалось цифрой 4. Последняя цифра произведения двух чисел определяется последними цифрами сомножителей. Так как произведение двух чисел, отличающихся между собой на 1 и каждое из которых меньше 10, может оканчиваться только цифрой 0, 2 или 6, то число N не может оканчиваться цифрой 7. □

146. Братьям: 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23 и 26 лет, а отцу — 48.

Пусть n — возраст самого младшего брата, a — промежуток времени, через который рождались братья, и m — возраст их отца.

По условию задачи

$$n^2 + (n + a)^2 + (n + 2a)^2 + \ .. + (n + 8a)^2 = 9n^2 + 72na + 204a^2 =$$
$$= (3n)^2 + 2 \cdot 3n \cdot 12a + (12a)^2 + 60a^2 = (3n + 12a)^2 + 60a^2 = m^2.$$

Поскольку $n \geq 1$, $a \geq 1$, из соображений здравого смысла, $m \leq 100$, а разность возрастов отца и самого старшего брата не менее 14 лет, методом простого подбора нетрудно установить, что минимальными значениями приемлемых n и a, при которых выполняется равенство

$$(3n + 12a)^2 + 60a^2 = m^2,$$

являются соответственно $n = 2$, $a = 3$ и $m = 48$ □

147 89

Пусть m и n — соответственно число десятков и единиц искомого числа. Тогда по условию задачи

$$10m + n = m + n^2.$$

Отсюда $9m = n(n - 1)$ и поскольку $1 \leq m \leq 9$, $0 \leq n \leq 9$, требование задачи выполняется лишь при $m = 8$, $n = 9$. □

148. Пенсионеру 100 лет, его сыну — 64 года, внукам — 36 и 25 лет, а правнуку — 4 года.

За редким исключением продолжительность жизни человека не превосходит 100 лет.

Нетрудно убедиться, что среди чисел: 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81 и 100, являющихся полными квадратами, только пять чисел· 100, 64, 36, 25 и 4 удовлетворяют соотношениям, требуемым в условии задачи. □

149. 9801.

Обозначим через x и y соответственно число десятков и единиц двузначного числа, квадрат которого по условию задачи равен $abcd$, т.е.

$$abcd = (10x + y)^2 = 100x^2 + 20xy + y^2$$

Следует отметить, что $y \neq 0$, так как в противном случае следовало бы, что $c = d = 0$ и $a = b$, а такого квадрата нет

Кроме того, y не может быть равным ни 3, ни 7, так как в этих случаях $d = 9$ и из равенства $a = b + d$ следует, что $a = 9$, а число 9009 не есть квадрат.

Число y не может быть равным 4, 5 и 6, так как в этих случаях нельзя подобрать x так, чтобы цифра десятков в числе $20xy + y^2$ была равна 0.

Из оставшихся вариантов значений x и y только $x = y = 9$ удовлетворяет условию задачи: $(99)^2 = 9801$. □

150. 9.

Сумма цифр числа A не превосходит 1998, то есть число B не более, чем пятизначное. Поэтому сумма цифр числа B (число C) не превосходит $5 \times 9 = 45$.

Так как число A делится на 9, то по признаку делимости на 9 и число B, и число C также делится на 9.

Но число, не превосходящее 45 и делящееся на 9, может быть лишь одним из чисел 45, 36, 27, 18, 9. В любом случае сумма цифр числа C равна 9. □

151. Ответ:

$$
\begin{aligned}
&2 + 6 - 3 + 4 - 5 + 8 = 12,\\
&9 + 8 + 1 - 3 - 5 + 2 = 12,\\
&8 - 6 - 1 + 7 + 9 - 5 = 12,\\
&3 - 2 - 1 + 4 + 5 + 3 = 12,\\
&7 + 9 + 8 - 4 - 3 - 5 = 12.
\end{aligned}
$$

152. Ответ:

$$
\begin{aligned}
&9 + 10 \times 1 - 11 - 8 = 0,\\
&4 \times 5 : 2 - 6 - 4 = 0,\\
&-5 + 4 \times 8 : 4 - 10 + 7 = 0,\\
&10 + 1 + 6 - 7 - 3 - 7 = 0,\\
&5 + 4 - 15 + 12 + 4 - 6 - 4 = 0,\\
&2 \times 5 + 6 + 1 - 16 - 5 + 4 = 0,\\
&10 + 11 + 1 + 8 - 6 - 14 - 3 - 7 = 0. \ \square
\end{aligned}
$$

153. Нет.

Сумма цифр числа m, указанного в условии задачи, равна 300. Значит, это число делится на 3.

Если m — точный квадрат, т.е $m = n^2$ для некоторого целого числа n, то n также делится на 3 и поэтому число m должно делиться на 9.

Однако сумма цифр числа m не делится на 9 и, значит, это число также не делится на 9

Полученное противоречие обусловлено ошибочностью предположения о том, что $m = n^2$. □

154 58.

Разность между делителем и остатком во всех случаях равна 2. Поэтому сумма искомого числа m и 2 делится без остатка на любой из указанный в условии задачи делитель. Значит, $m + 2 = 3 \cdot 4 \cdot 5$ и, следовательно, $m = 58$. □

155. Цены конфет «Белочка» и «Мишка на севере», а также количества купленных конфет «Маугли» и «Чебурашка» кратны 4. Сумма же, указанная в чеке, на 4 нацело не делится □

156 Нет Через 72 часа будет полночь ! □

157. 36 45.

Пусть $abcd$ — номер автомашины.

По условию задачи $c + d = 1.5b$. Поскольку $c + d$ — целое число, то b — четное число. 2, 4, 6 или 8 При этом сумма $c + d$ равна соответственно 3, 6, 9, 12, а сумма $b + c + d$ — 5, 10, 15, 20.

Так как b — наибольшая цифра номера, то $b \neq 2$.

По условию задачи число bcd делится нацело на $b + c + d$. Значит, если $b = 4$ или $b = 8$, то число bcd должно делиться на 10. Поскольку $d \neq 0$, то указанные случаи следует исключить из рассмотрения и поэтому $b = 6$, а $c + d = 9$.

Ввиду того, что b — наибольшая цифра номера, возможны лишь следующие два случая: $c = 4$, $d = 5$ или $c = 5$, $d = 4$. Однако число bcd делится нацело на $15(= b + c + d)$ лишь при $c = 4$, $d = 5$.

Наконец, частное от деления 645 на 15 равно 43. Так как номер автомашины определяют разные цифры, то $a = 3$. □

158. 6 км.

Петров должен был находиться в пути на 40 мин больше Иванова, но он вышел из дома на 25 мин позже намеченного срока, то есть раньше Иванова только на 15 мин.

Петров прекратил свое движение на 15 минут раньше, чем Иванов. Значит, оба приятеля находились в пути одинаковое время.

Иванов прошел от дома до места предполагаемой встречи и обратно 4 км. Так как Петров ходит в полтора раза быстрее, то за это время он прошел 6 км. □

159. 72 км/час.

Отрезок пути длиной 6 км велосипедист проезжает за 20 мин, а поезд, легко понять, — за 5 мин.

Действительно, предположим, что обычно поезд догоняет велосипедиста на переезде в 8 час. В тот день, когда велосипедист опоздал, он на переезде был в 8 час 15 мин, а в шести километрах от переезда, где его в этот раз догнал поезд, — в 7 час 55 мин.

Значит, скорость поезда равна 72 км/час. □

160. При подсчетах была допущена ошибка.

Действительно, первоначальное количество листов бумаги кратно 3. После того, как листок бумаги разрывали на 4 части, вместо одного этого листка получалось 4, то есть общее количество кусков увеличивалось на 3. Значит, после прекращения разрывания бумаги количество ее кусков должно быть кратным 3. Поэтому, так как число 97 не делится нацело на 3, при подсчетах была допущена ошибка. □

161. 21.

Пусть ab — десятичная позиционная запись номера квартиры.

По условию задачи, для некоторых натуральных m и n выполняются соотношения

$$10a + b = n^2 - m^2, \qquad (1)$$

$$m = a = 2b. \qquad (2)$$

Подставив в равенство (1) значения a и b, выраженные через m, получим

$$10m + \frac{m}{2} = n^2 - m^2$$

и поэтому

$$n=\sqrt{m^2+\frac{21m}{2}} \qquad (3)$$

Из равенств (2) следует, что m — четное число. Поскольку это число не может быть большим, чем 8, то его возможные значения — 2, 4, 6, 8 Нетрудно убедиться, что при $m = 2$ вычисляемое по формуле (3) значение n равно 5, а для остальных указанных значений m n не является целым числом.

Для $m = 2$ из соотношений (2) определяются значения a и b: $ab = 21 = 5^2 - 2^2$. □

162. В основных бригадах по 9 человек, а во вспомогательных — по 3

Обозначим через m количество основных бригад (число рабочих во вспомогательной бригаде), а через n — количество рабочих в каждой такой бригаде

Тогда, в силу условий задачи,

$$mn + 4m = m(n + 4) = 39$$

Число 39 представимо в виде произведения двух натуральных сомножителей лишь двумя способами: $1 \cdot 39$ и $3 \cdot 13$.

Отсюда, поскольку число n положительно, из четырех возможных значений для m приемлемыми остаются только два: $m = 1$ и $m = 3$

Так как по условию задачи было создано несколько основных бригад, то $m > 1$. Поэтому остается единственно возможный вариант — $m = 3$. Следовательно, $n + 4 = 13$ и, значит, $n = 9$ □

163. 13 раз.
1.11.11; 11.1 11; 1.11.11, 11.11.11; 2.2.22; 22.2.22; 3 3.33, 4.4.44; 5.5.55; 6.6.66; 7.7.77; 8.8 88, 9.9.99 □

164. Таких чисел нет

При перестановке первой цифры числа общее число цифр в записи этого числа не меняется. Так как при этом получается число в 5 раз большее первоначального, то первая цифра в записи первоначального числа — 1. Однако число, оканчивающееся на 1, не может делиться нацело на 5. □

165. 176 человек.

Обозначим число кресел в зале через x. Тогда вместе со стульями в зале было $2x$ мест, из которых не занятых было $2\cdot\frac{1}{12}x=\frac{x}{6}$ а занятых — $2\cdot\frac{11}{12}x=\frac{11x}{6}$.

По условию задачи x отличается от 100 незначительно. Наибольшим числом, ие превосходящим 100 и делящимся на 6, есть 96. Поэтому, предположив, что $x = 96$, легко подсчитать и число прибывших на конференцию участников — число занятых мест: $\frac{11\cdot 96}{6}=176$ □

166. 782.

Пусть abc — позиционная десятичная запись искомого числа.

Так как числа a, b, c не превосходят 9, то $a + b + c \le 27$, и поэтому, с учетом последнего условия задачи, либо $a + b + c = 20 + a$, либо $a + b + c = 10 + a$, либо $a + b + c = a$.

Выполнение первого из трех указанных равенств невозможно, поскольку в противном случае это означало бы выполнение невыполнимого равенства $b + c = 20$ (сумма двух однозначных чисел не может превосходить 18).

Из предположения $a + b + c = a$ следует, что $b + c = 0$ и поэтому $b = c = 0$. Но тогда при любом значении a частное при делении числа $a00 = a\cdot 100$ на a равно 100. Поскольку 0 — последняя цифра числа 100 — совпадает с последней цифрой искомого числа $a00$ и, значит, не может превосходить ее на 4, как требуется в условии задачи, то предположение о выполнении равенства $a + b + c = a$ ошибочно.

Следовательно, единственно возможным остается случай, когда $a + b + c = 20 + a$ и, значит, $b + c = 10$.

Поскольку сумма $a + b + c$ — двузначное число, а десятичная позиционная запись частного при делении abc на $a + b + c$ представлена несколькими цифрами, то число этих цифр равно 2.

По условию задачи $(100a + 10b + c) : (10 + a) = 10(a - 3) + (c + 4)$. Отсюда, так как $c = 10 - b$, имеем

$$b=\frac{10a^2-16a-170}{19+a}. \qquad (1)$$

Заметим, число a может принимать лишь целочисленные значения от 1 до 9. Однако, если $a < 5$, то вычисленное по формуле (1) значение

b отрицательно, а если $a > 7$, то значение b превосходит 10. При $a = 5$ имеем $b = 0$ и поэтому $c = 10$.

Если $a = 6$, то b принимает дробное значение.

Итак, 7 — единственно возможное значение для a. Из (1) получаем $b = 8$ и, значит, $c = 2$. □

167. 92 шара.

Подсчитаем сначала максимальное число шаров, которые можно достать из корзины и среди которых не найдется 20 шаров одного цвета. Это число очевидно равно сумме всех имеющихся зеленых, желтых, черных, коричневых, а также 19 синих, 19 красных и 19 белых шаров: $14 + 20 + 3 \times 19 = 91$. Поскольку после удаления из корзины указанных шаров в ней останутся шары лишь синего, красного и белого цветов, то любой вытащенный шар доводит число шаров одного цвета до 20. Значит, минимальное количество удаленных из корзины шаров, среди которых обязательно найдется 20 шаров одного цвета, равно $91 + 1 = 92$. □

168. 40%.

У $100\% - 95\% = 5\%$ пиратов нет синяка под левым глазом. Это те пираты, которые могут иметь синяк под правым глазом, а также могут и не иметь синяков вообще. Очевидно, число пиратов, которые получили синяки под оба глаза, будет наименьшим, если указанные 5% составят пираты, у которых есть синяк под правым глазом. Тогда минимальное число пиратов, получивших по синяку под каждым глазом равно $90\% - 5\% = 85\%$.

Рассуждая аналогично, $100\% - 80\% = 20\%$ — число пиратов, у которых не выбит зуб. Минимальное число пиратов, у которых выбит зуб и есть синяк под каждым глазом, равно $85\% - 20\% = 65\%$.

Наконец, число пиратов, получивших все «трофеи», равно $75\% - (100\% - 65\%) = 40\%$. □

169. После непосредственной проверки справедливости этого утверждения на первых нескольких числах натурального ряда можно отметить, что доказательству подлежит утверждение: для любого натурального ряда выполняется равенство

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \ldots + n)^2. \qquad (1)$$

Другая форма записи этого утверждения — для любого n выполняется равенство

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\sum_{i=1}^{n} i\right)^2. \qquad (2)$$

Доказательство справедливости утверждения (2) проведем следуя методу математической индукции.

Для $n = 1$ равенство (2) очевидно выполняется.

Предположим, что это равенство выполняется при $n = k$, то есть

$$\sum_{i=1}^{k} i^3 = \left(\sum_{i=1}^{k} i\right)^2, \qquad (3)$$

и докажем его справедливость для $n = k + 1$

Имеем

$$\sum_{i=1}^{k+1} i^3 = \sum_{i=1}^{k} i^3 + (k+1)^3 = \left(\sum_{i=1}^{k} i\right)^2 + (k+1)^3, \qquad (4)$$

а так как сумма k первых членов натурального ряда чисел равна $\frac{k+1}{2}\ k$, (вспомните правило суммирования членов арифметической прогрессии[1]), то, продолжив цепочку равенств (4), получим

$$\left(\sum_{i=1}^{k} i\right)^2 + (k+1)^3 = \left(\frac{k+1}{2}\cdot k\right)^2 + (k+1)^3 = (k+1)^2\left(\frac{k^2}{4} + k + 1\right) =$$

$$= \frac{(k+1)^2\ \ (k+2)^2}{4} = \left(\frac{k+1+1}{2}\cdot(k+1)\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{k+1} i\right)^2 \qquad (5)$$

(здесь в установлении последнего равенства опять используется правило суммирования членов арифметической прогрессии)

Таким образом, учитывая (4) и (5), соотношение (2) выполняется для любого натурального n. □

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие 3

	Постановки задач	Ответы и решения
Установить имеющуюся закономерность в числах (1-16)	5	45
Установить закономерность в словах (17-27)	9	48
Анализ картинок (28-33)	13	51
Задачи на взвешивание (34-41)	20	53
Задачи на построение (42-61)	21	60
Числовые ребусы (62-68)	26	67
Логические задачи (69-86)	28	74
Задачи, решение которых предполагает составление уравнений (87-123)	34	88
Разные задачи (124-169)	39	107