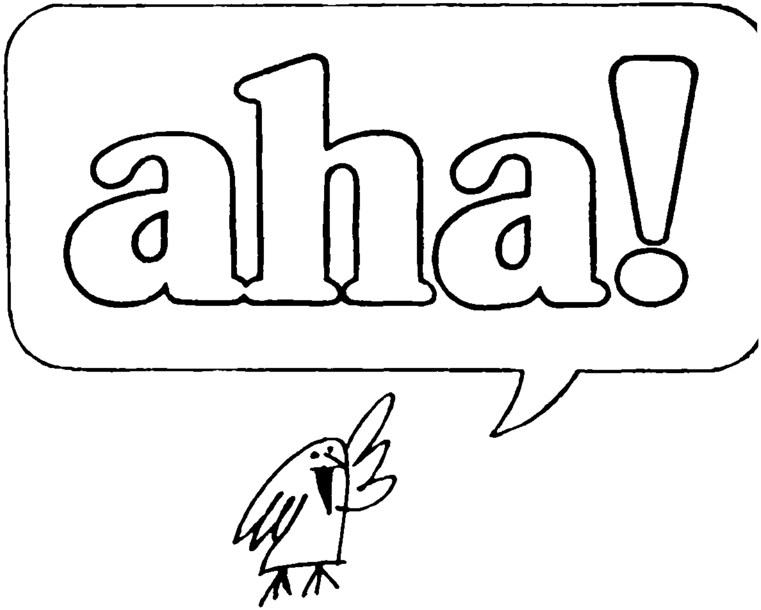


Martin Gardner

AHA! INSIGHT

Scientific American, Inc./W. H. Freeman and Company
San Francisco 1978

Мартин Гарднер

ЕСТЬ ИДЕЯ !

Перевод с английского
Ю. А. ДАНИЛОВА

МОСКВА «МИР» 1982

ББК 22.1
Г 20
УДК 51-8

Гарднер М.

Г 20 Есть идея!: Пер. с англ./Перевод Данилова Ю. А. — М.: Мир, 1982. — 305 с., ил.

Книга известного американского популяризатора науки Мартина Гарднера, посвященная поиску удачных идей для решений задач из области комбинаторики, геометрии, логики, теории чисел и игр со словами.

Рассчитана на самый широкий круг читателей.

Г $\frac{20201\text{-}155}{041(01)\text{-}82}$ 155 — 82, ч. 1 1701000000 ББК 22.1 51

Редакция научно-популярной и научно-фантастической литературы

Мартин Гарднер «ЕСТЬ ИДЕЯ!»

Старший научный редактор А. Ю. Кирий
Младший научный редактор М. В. Суровова
Художник Л. М. Муратова
Художественный редактор Л. Е. Безрученков
Технический редактор Е. С. Потапенкова
Корректор К. Л. Водяницкая

ИБ № 2829.

Сдано в набор 18.06.81. Подписано к печати 04.11.81. Формат 84×108 1/32. Бумага типографская № 2. Гарнитура литературная. Печать высокая. Объем 4,75. Усл. печ. л. 15,96. Усл. кр.-отт. 16,36. Уч.-изд л. 13,34. Изд. № 12/1630. Тираж 100 000 экз. Зак. 1184. Цена 70 к.

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР» Москва, 1-й Рижский пер., 2.

Ленинградская типография № 2 головное предприятие ордена Трудового Красного Знамени Ленинградского объединения „Техническая книга" им. Евгении Соколовой Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 198052, г. Ленинград, Л-52, Измайловский проспект, 29.

От переводчика

Причудливая логика научного открытия далека от логики формальной, а обстоятельства, сопутствующие прорыву на более высокую ступень познания, далеко не всегда соответствуют важности момента. Скрытая работа мысли происходит не только в тиши кабинета, у чертежной доски и в рабочее время, но и в самой, казалось бы, неподходящей обстановке, и малейшего толчка извне иногда бывает достаточно, чтобы сумерки ожидания осветились яркой вспышкой мгновенного озарения и разрозненные фрагменты загадочной мозаики сложились в единую картину.

Кто не слышал о яблоке Ньютона, о паутинке, подсказавшей конструкцию сказочно легкого подвесного моста, об Эйнштейне, лихорадочно делающем выкладки на обратной стороне подвернувшегося под руку старого конверта? Из воспоминаний Пуанкаре мы знаем, что долго не дававшееся ему доказательство важной теоремы из теории автоморфных функций неожиданно было найдено, когда он занес было ногу на ступеньку автобуса. Из воспоминаний П. С. Александрова мы узнаём о том, как П. С. Урысон решил задачу, поставленную перед ним Д. Ф. Егоровым: дать топологическое определение линии и поверхности. После двух месяцев напряженных размышлений П. С. Урысон «проснулся с готовым, окончательным и всем теперь хорошо известным определением размерности. Произошло это в деревне Бурково, вблизи Болшево, на берегу реки Клязьмы... В то же утро, во время купания в Клязьме, П. С. Урысон рассказал мне [П. С. Александрову] свое определение размерности и тут же, во время этого разговора, затянувшегося на несколько часов, набросал план всего построения теории размерности с целым рядом теорем, бывших тогда гипотезами, за которые неизвестно было как взяться и которые затем доказывались одна за другой в течение последующих месяцев».

Проблемам психологии творческого акта в математике посвящена обширная литература, созданная трудами Ж. Адамара и А. Пуанкаре, Д. Гильберта и Дж. фон Неймана, Г. Харди и Д. Пойа, а также многих других математиков, философов и психологов. Теперь она пополнилась книгой Мартина Гарднера «Есть идея!»

Замечательный американский популяризатор, бывший до недавнего времени бессменным редактором раздела «Математические игры» в журнале *Scientific American*, М. Гарднер во многом определил лицо современной занимательной математики, наполнив ее новым содержанием и максимально приблизив к математике серьезной. Книга «Есть идея!» выдержана в лучших, подлинно «гарднеровских» традициях. Ее отличает тщательный и умелый подбор материала, яркая занимательность формы, доступность и подлинная популярность, насыщенность новыми постановками задач, призванными пробудить творческие силы читателя, стимулировать его к самостоятельной работе, приобщить к радости открытия нового.

М. Гарднер не следует ни одному из своих предшественников. Он не предлагает читателю схемы правдоподобных рассуждений, подкрепленных интереснейшими примерами индуктивных умозаключений из математического творчества Леонарда Эйлера, как Д. Пойа, не делится своими соображениями о природе математики и математических доказательств, как Г. Вейль и Дж. фон Нейман, не углубляется в психологию математического открытия, как Ж. Адамар и А. Пуанкаре. М. Гарднер учит читателя тому, чему, казалось бы, невозможно учить: высокому искусству нешаблонного, или, как предпочитает говорить сам Гарднер, «нелинейного» мышления, учит не рассказом, а показом, давая пищу не только уму, но и сердцу, вовлекая в игру, заставляя решать удивительные по красоте задачи, предлагая увлекательные темы для дальнейших размышлений.

Можно надеяться, что для нашего читателя встреча с новой книгой М. Гарднера станет таким же праздником, какими были встречи с его предыдущими книгами.

Ю. Данилов

Предисловие

«Творческий акт имеет мало общего с логикой или рациональными рассуждениями. Вспоминая обстоятельства, при которых их озарила блестящая идея, математики нередко отмечали, что вдохновение не имело прямого отношения к тому, чем они в это время занимались. Иногда озарение наступало в тот момент, когда человек ехал в транспорте, брился или размышлял о чем-нибудь другом. Творческий процесс нельзя по желанию довести до наивысшей точки или продлить самыми радужными посулами. Он проистекает особенно успешно, когда разум предается праздности и воображение свободно расправляет крылья.»

Моррис Клайн
Scientific American,
март 1955 г.

Психологи-экспериментаторы любят рассказывать историю об одном профессоре, который изучал способность шимпанзе решать задачи. В центре комнаты к потолку достаточно высоко, чтобы обезьяна, подпрыгнув, не могла достать его, был подвешен банан. В комнате не было ничего, кроме нескольких ящиков из-под фруктов, разбросанных как попало. Тест заключался в том, чтобы проверить, догадается ли шимпанзе составить из ящиков пирамиду в центре комнаты, взобраться на вершину пирамиды и схватить банан.

Обезьяна тихо сидела в углу, наблюдая за тем, как экспериментатор расставляет ящики по комнате.

Она терпеливо ждала, пока профессор не оказался посредине комнаты, и, когда тот проходил под бананом, внезапно вспрыгнула ему на плечи и, оттолкнувшись от него, взмыла в воздух, схватила банан и была такова.

Мораль этой юмористической истории понять нетрудно: задача, которая кажется нам трудной, может иметь неожиданно простое решение. Обезьяна могла руководствоваться природным инстинктом или накопленным опытом, но главное в том, что она сумела найти прямое решение задачи, которое ускользнуло от внимания профессора.

Суть математики — непрестанный поиск все более простых способов доказательства теорем и решения задач. Нередко первое доказательство какой-нибудь теоремы требует целой статьи объемом в 50 страниц убористого текста, доступного лишь посвященным. А через несколько лет другому математику, быть может даже менее знаменитому, приходит в голову блестящая идея, позволяющая упростить и сократить доказательство настолько, что оно умещается в нескольких строках.

Озарения такого рода, приводящие к кратким, изящным решениям, привлекали и продолжают привлекать внимание психологов. Наступают они внезапно, как гром среди ясного неба. Широкой известностью пользуется история о том, как ирландский математик Уильям Роуэн Гамильтон, возвращаясь как-то вечером домой, изобрел на мосту кватернионы. Он внезапно понял, что в арифметической системе коммутативный закон отнюдь не обязательно должен выполняться. Рассказывают, что эта мысль настолько поразила Гамильтона, что он остановился на мосту как вкопанный и нацарапал основные формулы алгебры кватернионов на каменных перилах. «Высеченные в камне», эти формулы и поныне украшают исторический мост.

Что именно происходит в мозгу творческой личности, когда на нее нисходит озарение? Этого не знает пока никто. Озарение, взлет, интуитивное постижение истины — процесс довольно загадочный, не поддающийся попыткам расчленить его на составные части и воспроизвести при помощи ЭВМ. Современные

ЭВМ решают задачи, автоматически шаг за шагом выполняя огромное количество операций в соответствии с командами, записанными в программе. Лишь невероятные скорости, с которыми ЭВМ выполняют элементарные операции, позволяют современным ЭВМ решать некоторые задачи, остающиеся непосильными для человека, так как решение таких задач потребовало бы от него несколько тысяч лет безостановочных вычислений.

Внезапное озарение, творческий взлет разума, перед которым, как при вспышке молнии, открывается простой и короткий путь к решению задачи, по самой своей природе выделяется на фоне общего темпа развития. Как показали последние исследования, личности с особо сильной склонностью к такого рода озарениям обладают средним уровнем развития и никакой корреляции между высоким уровнем развития и способностью интуитивно постигать истину, по-видимому, не существует. Человек может обладать высоким I.Q.*, измеряемым по обычиым тестам, и более чем скромными способностями к нестандартному мышлению. С другой стороны, люди, не блещущие в остальном особыми талантами, могут обладать весьма ярко выраженной способностью к озарению. Например, Эйнштейн не отличался особенно глубокими познаниями в математике, и его оценки и в гимназии, и в цюрихском Политехникуме оставляли желать много лучшего. Тем не менее взлеты творческой фантазии, которые привели его к созданию общей теории относительности, были настолько мощными, что полностью революционизировали физику.

В этой книге перед вами предстанет тщательно подобранная система задач, которые кажутся трудными и действительно трудны, если пытаться решать их традиционными методами. Но стоит лишь вам избавиться от оков традиционного мышления и воспарить до высот озарения, как перед вами откроются

---

* О тестах интеллектуальных способностей (I.Q.) см., например, в книге: Айзенк Г. Проверьте свои способности. — М.: Мир, 1972.

простые и ясные решения. Не следует особо огорчаться, если сначала задачи будут упорно не поддаваться решению. Не заглядывайте в ответ до тех пор, пока вам не удастся самостоятельно решить задачу. Постепенно вы постигнете дух оригинального, «нелинейного» мышления и, возможно, с удивлением почувствуете, что озарение стало нисходить на вас чаще, чем прежде. Если это произойдет, то довольно скоро вы обнаружите, что ваше умение находить нестандартные решения оказывается полезным во многих ситуациях, с которыми вы сталкиваетесь в повседневной жизни. Предположим, например, что требуется подтянуть ослабевший винт. Нужно ли непременно отправляться за отверткой или можно с успехом обойтись оказавшейся под рукой мелкой монетой?

Немалое удовольствие вы получите, предлагая задачи из нашего сборника своим друзьям и знакомым. Во многих случаях они будут долго размышлять над предложенной вами задачей, пока наконец не признают себя побежденными, а задачу безнадежно трудной. Когда же вы покажете им, что задача решается очень просто, они, без сомнения, получат большое удовольствие. Не исключено, что озарения каким-то образом связаны с удовольствием, получаемым от игры. Тот, кто умеет находить нестандартные решения, при встрече с головоломкой или трудной задачей испытывает радость, сравнимую с той, которая знакома любителям бейсбола или шахмат. Дух игры, по-видимому, предрасполагает к озарениям, позволяющим находить оригинальные решения.

Способность к нестандартному мышлению отнюдь не обязательно коррелирует с быстротой соображения. Тугодумы могут получать удовольствие от задачи ничуть не меньше тех, кто схватывает все на лету, и при поиске неожиданных решений могут оказаться сильнее «скородумов». Возможно, что удовольствие, получаемое при нестандартном решении задачи, побудит кого-нибудь к более глубокому изучению традиционных методов решения. Эта книга предназначена для любого читателя, наделенного чувством юмора и способностью понимать задачи.

Несомненно, существует тесная взаимосвязь между озарениями и творческой деятельностью в науке, искусстве и любой другой области человеческой деятельности. Великие революции в науке почти всегда были и будут следствием неожиданного интуитивного постижения истины. Что такое наука, как не систематические попытки ученых решать те трудные задачи, которые поставила перед ними природа? Природа бросает вызов любознательности ученого, который пытается понять, как именно и почему происходит в природе то или иное явление. Ни изнурительный метод проб и ошибок, которым Эдисон подбирал подходящий материал для волоска своей электрической лампы, ни даже дедуктивные рассуждения, опирающиеся на соответствующие знания, во многих случаях не позволяют решить задачу. Решение, как правило, открывается неожиданно, и его по праву можно было бы назвать решением типа «Эврика». Восклицание «Эврика!» («Нашел!») заимствовано нами из древней легенды о том, как Архимед, сидя в ванне, открыл способ, позволяющий определить, сколько золота утаили мастера при изготовлении короны царя Сиракуз. Рассказывают, будто Архимед так обрадовался своему открытию, что выскочил из ванны и, забыв об одежде, бросился бежать по улице, крича: «Эврика! Эврика!»

Собранные в книге задачи разделены на шесть категорий: комбинаторные, геометрические, теоретико-числовые, логические, процедурные и словесные. Это категории не взаимоисключающие, они неизбежно перекрываются, и задачи, отнесенные нами к одной из них, можно было бы включить и в другие. Каждую задачу мы стремились облечь в форму какой-нибудь забавной истории, чтобы создать у читателя приятное настроение и тем самым вовлечь его в игру. Мы надеялись, что такое настроение позволит читателю с большей легкостью отринуть установившиеся, стандартные способы решения задач. Всякий раз, когда вам случится решать новую задачу, мы настоятельно рекомендуем обдумать ее со всех сторон, сколь бы странными и причудливыми ни казались иные подходы, вместо того чтобы напрасно тратить время на длинное и громоздкое решение.

К каждой задаче с замечательными иллюстрациями канадского графика Джима Глена мы присовокупили несколько замечаний. В них речь идет о характере задач и показывается, как во многих случаях рассмотренная нами игровая ситуация связана с важными аспектами современной математики. В некоторых случаях мы предоставляем читателю возможность испытать свои силы на еще не решенных задачах.

Стремясь облегчить поиск нестандартных решений, мы хотим обратить внимание читателя на следующие вопросы, которые иногда могут служить своего рода путеводными нитями и позволяют хотя бы приблизительно систематизировать возможные подходы:

1. Нельзя ли свести задачу к более простому случаю?

2. Нельзя ли преобразовать задачу к изоморфной задаче, легче поддающейся решению?

3. Не существует ли для решения задачи какого-нибудь простого алгоритма?

4. Нельзя ли для решения задачи применить какую-нибудь теорему из другой области математики?

5. Можно ли проверить правильность полученного решения на наглядных примерах или контрпримерах?

6. Какие аспекты задачи несущественны для решения и лишь отвлекают ваше внимание?

Не будет преувеличением сказать, что в наше время многие склонны поддаваться все более сильному искушению сводить решение всех математических задач к составлению программ для ЭВМ. Современная быстродействующая ЭВМ, проделав исчерпывающий перебор всех возможных случаев методом проб и ошибок, действительно может решить ту или иную задачу за считанные доли секунды или за несколько секунд, но на составление хорошей программы и ее отладку потребуется несколько часов или дней. Составление программы также не всегда сводится к стандартным операциям и требует своих озарений. Но удачная идея может привести к решению задачи и без обращения к ЭВМ и сделать излишним составление программы.

Было бы печально, если бы блага НТР оказали на человечество растлевающее влияние и оно интеллектуально обленилось бы настолько, что утратило бы способность к творческому мышлению. Главная цель предлагаемой вниманию читателя подборки задач и состоит в том, чтобы предоставить ему широкие возможности для оттачивания и развития способности находить нестандартные решения.

Мартин Гарднер

Глава 1

Комбинаторные находки

НЕОЖИДАННЫЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ НА СОСТАВЛЕНИЕ И ПЕРЕЧИСЛЕНИЕ КОМБИНАЦИЙ

Комбинаторный анализ, или комбинаторика, занимается изучением способов составления комбинаций из предметов. Пожертвовав самую малость общностью, комбинаторный анализ можно определить как раздел математики, который занимается изучением способов объединения по заранее заданным правилам элементов в множества и свойств возникающих при таком объединении множеств.

Например, наша первая задача сводится к установлению способов объединения в множества разноцветных шариков. Требуется найти наименьшие множества шариков, удовлетворяющие определенным условиям. Во второй задаче речь идет о способах установления очередности встреч между участниками турнира по настольному теннису, разыгрываемого по олимпийской системе (важный аналог этой задачи встречается при автоматической сортировке данных).

В комбинаторном анализе часто требуется найти число всех возможных способов объединения предметов в множества по определенным правилам. С проблемой перечисления, как принято называть эту разновидность комбинаторных задач, мы познакомим читателя при подсчете числа различных маршрутов, которыми Сьюзен может следовать в школу. В нашем случае объединяемые элементы представляют собой прямолинейные отрезки маршрутов, проходимые по строкам или столбцам матрицы. Поскольку подсчет маршрутов связан с рассмотрением геометрических фигур, мы вступаем в область комбинаторной геометрии.

Комбинаторные аспекты присущи всем разделам математики, и не удивительно поэтому, что читатель обнаружит комбинаторные задачи во всех без исключения главах нашей книги. Так, существует комбинаторная теория чисел, комбинаторная топология, комбинаторная логика, комбинаторная теория множеств и даже, как мы увидим в последней главе, посвященной словесным играм, комбинаторная лингвистика. Особенно важную роль комбинаторика играет в теории вероятностей: без подсчета всех комбинаций нельзя было бы найти распределение вероятностей. Много задач по теории вероятностей собрано в книге Уитворта «Выбор и случай»*. Слово «выбор» в заголовке книги указывает на ее комбинаторный аспект.

Самая первая задача в нашей книге также имеет непосредственное отношение к теории вероятностей: ведь в ней требуется указать комбинацию цветных шариков, которая с полной гарантией (то есть с вероятностью, равной 1) позволила бы удовлетворить определенным требованиям. Читая нашу книгу, нетрудно убедиться в том, что из простых вопросов о перечислении способов объединения предметов по тому или иному признаку возникает поистине безбрежное море вероятностных задач. Перечисление маршрутов, по которым Сьюзен могла бы следовать в школу, тесно связано с треугольником Паскаля и теми применениями, которые он находит при решении элементарных задач теории вероятностей.

Число комбинаций, дающих решение данной комбинаторной задачи, очевидно, может быть равно нулю, единице, любому конечному числу и даже обращаться в бесконечность. Например, нечетное число ни одним способом невозможно представить в виде суммы двух четных чисел. Число 21 представимо в виде произведения двух простых чисел одним и только одним способом. Число 7 представимо в виде суммы из двух целых положительных чисел тремя

* Whitworth W. A. Choice and Chance. London, 1901.

различными способами (слагаемые каждой из трех допустимых комбинаций нанесены на противоположные грани игральной кости). Существует бесконечно много пар четных чисел, сумма которых четна.

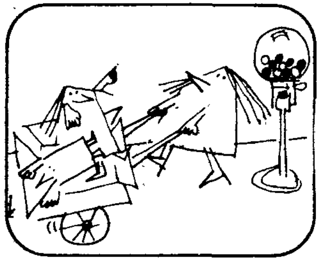
Найти «доказательство невозможности», то есть доказать, что не существует ни одной комбинации с требуемыми свойствами, в комбинаторном анализе зачастую бывает чрезвычайно трудно. Например, лишь недавно удалось доказать, что для правильной раскраски стран на плоской карте достаточно четырех красок. «Проблема четырех красок» долгое время оставалась знаменитой нерешенной задачей комбинаторной топологии. Решить ее, то есть найти «доказательство невозможности», удалось лишь после того, как была составлена специальная, необычайно сложная программа для ЭВМ.

С другой стороны, многие комбинаторные задачи, для которых найти «доказательство невозможности» на первый взгляд кажется необычайно трудным делом, при правильном подходе решаются легко и просто. В задаче «Упрямые плитки» мы увидим, как простая «проверка на четность» сразу же приводит к доказательству неразрешимости задач, найти которое другим путем было бы нелегко.

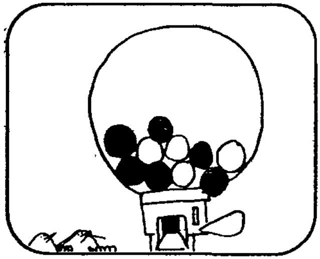
Вторая задача о непригодных пилюлях вскрывает комбинаторный характер рассуждений, связанных с использованием различных систем счисления. Как будет показано, и сами числа, и их цифровая запись в позиционной системе счисления зависят от некоторых комбинаторных правил. Более того, любое дедуктивное умозаключение, будь то в математике или в формальной логике, оперирует с комбинацией символов, выстроенных в «строку» по определенным правилам. Эти правила позволяют решить, допустима ли та или иная строка символов в рассматриваемой теории или недопустима. Именно поэтому отец комбинаторики Лейбниц называл искусство строить умозаключения комбинаторным искусством — *ars combinatoria*.

Жевательная резинка

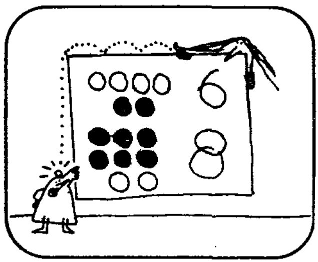
Миссис Джонс не повезло: ее близнецы заметили автомат для продажи разноцветных шариков жевательной резинки прежде, чем миссис Джонс успела миновать его.
Первый близнец. Мама, купи мне жевательную резинку!
Второй близнец. И мне, и мне! Я хочу шарик такого же цвета, как у Билли.



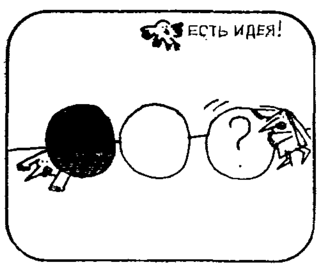
Автомат был почти пуст. Предугадать, какого цвета шарик выпадет, если опустить в щель автомата монету в 1 пенс, невозможно. Сколько однопенсовых монет придется приготовить миссис Джонс, чтобы из купленных шариков заведомо можно было выбрать 2 шарика одного и того же цвета?

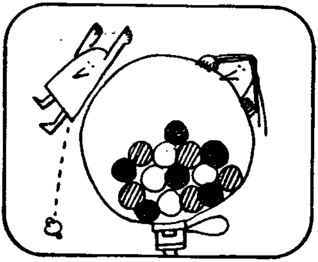


Потратив 6 пенсов, миссис Джонс заведомо могла бы извлечь из автомата 2 красных шарика: 4 пенса ушли бы на «добывание» 4 белых шариков, а 2 пенса — на 2 красных шарика. Израсходовав 8 пенсов, миссис Джонс заведомо получила бы 2 белых шарика. Следовательно, миссис Джонс необходимо приготовить 8 центов. Правильно?

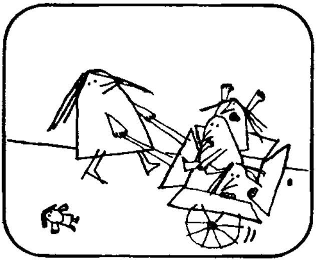


Нет, не верно! Если бы первые два шарика, выкатившиеся из автомата, были разного цвета, третий шарик непременно совпал *бы* по цвету с одним из них. Следовательно, миссис Джонс необходимо приготовить всего лишь 3 пенса.

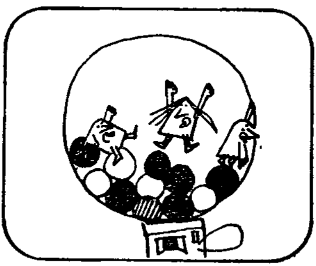




Предположим теперь, что в автомате осталось 6 красных, 4 белых и 5 синих шариков. Сможете ли вы подсчитать, сколько монет в 1 пенс следует приготовить миссис Джонс, чтобы среди выкатившихся из автомата шариков заведомо нашлось 2 шарика одного и того же цвета?



По-вашему, ей хватит 4 центов? А что вы скажете о бедной миссис Смит, которая безуспешно пыталась отвлечь от автомата для продажи жевательной резинки внимание своей тройни?



На этот раз в автомате находились 6 красных, 4 белых шарика и лишь 1 синий шарик. Сколько монет достоинством в 1 пенс следует приготовить миссис Смит, чтобы среди купленных шариков заведомо были 3 шарика одного цвета?

синий красный белый

Сколько центов?

Вторая задача о шариках жевательной резинки лишь незначительно отличается от первой. Идея решения второй задачи по существу та же: первые три шарика могут быть разного цвета (например, один шарик может быть красным, один синим и один белым). Это наименее благоприятный случай, так как к достижению желаемого результата ведет самая длинная последовательность испытаний. Четвертый шарик заведомо совпадает по цвету с одним из трех первых шариков. Итак, чтобы 2 шарика оказались одного и того же цвета, необходимо купить 4 шарика. Следовательно, миссис Джонс следует приготовить 4 цента.

Обобщение на случай n множеств шариков (каждое множество составляют шарики одного цвета) очевидно: если имеется n множеств шариков, то следует быть готовым к тому, что придется купить $n+1$ шариков (чтобы 2 шарика заведомо были одного и того же цвета).

Третья задача потруднее двух предыдущих. У миссис Смит не близнецы, а тройня. В автомате находятся 6 красных, 4 белых шарика и 1 синий шарик. Сколько монет достоинством в 1 цент должна приготовить миссис Смит, чтобы среди шариков, выданных автоматом, заведомо были 3 шарика одного цвета?

Как и прежде, начнем с рассмотрения наименее благоприятного случая. Миссис Смит может получить из автомата 2 красных, 2 белых шарика и 1 синий шарик, то есть всего 5 шариков. Шестой шарик должен быть либо красным, либо белым и, следовательно, подходить по цвету к ранее выпавшим из автомата либо 2 красным, либо 2 белым шарикам. Значит, миссис Смит должна приготовить 6 центов. Если бы синих шариков в автомате было не меньше двух, то в наименее благоприятном случае миссис Смит могла бы сначала извлечь из автомата по 2 шарика каждого цвета, и, чтобы получить 3 шарика одного и того же цвета, ей непременно понадобился бы седьмой шарик.

«Неожиданное» решение — это своего рода «прозрение», позволяющее оценить длину серии испытаний в наименее благоприятном случае. Ту же задачу можно было бы решить и более сложным способом: обозначить каждый из 11 шариков «своей» буквой, выписать все возможные варианты выдачи шариков из автомата и установить, в каком случае длина цепочки испытаний до появления трех шаров одного цвета имеет наибольшую длину. Но при таком решении потребовалось бы перебрать $11! = 39\,916\,800$ последовательностей всех возможных исходов испытаний. Если мы условимся не различать шары одного цвета, то и тогда при таком подходе пришлось бы перебрать 2310 последовательностей возможных исходов.

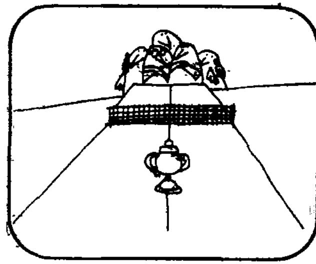
Обобщение задачи на случай, когда требуется определить наименьшее число монет, при котором из выданных автоматом шаров заведомо можно выбрать k шариков одного цвета, приводит к следующему решению. Если имеются шары n цветов (шаров каждого цвета не меньше k), то для получения k шаров одного цвета необходимо выбрать не более $n(k-1)+1$ шаров. Читателю доставит удовольствие самостоятельно исследовать, что произойдет в том случае, если шаров одного или нескольких цветов будет меньше k.

Задачи этого типа можно промоделировать не только на автоматах для продажи жевательной резинки, но и многими другими способами. Например, сколько карт необходимо вытащить из колоды в 52 листа, чтобы 7 карт заведомо были одной масти? Здесь $n=4$, $k=7$, и наша формула дает ответ: $4(7-1)+1=25$.

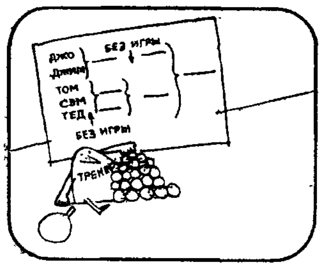
Мы рассмотрели лишь очень простые комбинаторные задачи, но и они приводят к интересным и трудным вопросам теории вероятностей. Например, какова вероятность извлечь 7 карт одной масти, если вы вытаскиваете из колоды, не возвращая, n карт, где n — любое число от 7 до 24? (Вероятность извлечь 7 карт одной масти, очевидно, равна 0, если из колоды вытащить менее 7 карт, и равна 1, если вытащить более 24 карт). Как изменятся вероятности, если мы условимся возвращать каждую извлеченную карту и тщательно тасовать колоду перед тем, как вытягивать из нее очередную карту? Более трудный вопрос: каково математическое ожидание (среднее по длинной серии испытаний) числа карт, которые необходимо извлечь (с возвратом или без возврата) из колоды, чтобы k из них заведомо были одной масти?

Турнир по настольному теннису

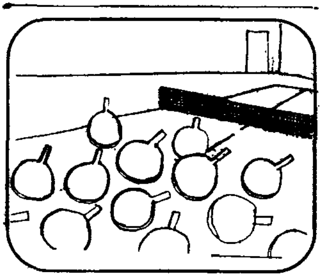
Пять членов клуба любителей настольного тенниса средней школы им. Милларда Филмора решили провести между собой турнир по олимпийской системе.



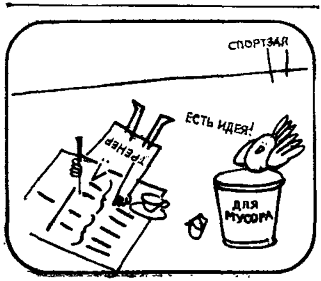
Тренер составил таблицу розыгрыша турнира, снабдив ее следующими пояснениями.
Тренер. Пять — число нечетное, поэтому в первом круге один участник турнира свободен от игры. Еще один участник свободен от игры во втором круге. Таким образом, всего за турнир будет сыграно 4 партии.



На следующий год в спортивный клуб записалось 37 школьников. Тренер снова составил таблицу розыгрыша турнира, постаравшись свести до минимума число участников, которые переходят в следующий круг без игры. Сколько партий было сыграно за весь турнир на этот раз?



Как, вы еще не сосчитали? А ведь задача решается просто! В каждой партии проигравший ныбывает, а поскольку для того, чтобы определить победителя, следует исключить всех участников, кроме одного, то за весь турнир должно состояться 36 партий. Не правда ли, все очень просто?



Сколько участников турнира перейдут в следующий круг без игры?

Если вы пытались решить задачу о турнире по настольному теннису «в лоб», составляя различные варианты таблиц розыгрыша турнира с 37 участниками, то, должно быть, заметили, что независимо от способа составления таблицы число участников, переходящих в следующий круг без игры, всегда равно 4. В общем случае число участников, для которых в очередном круге не хватает партнера, есть функция от числа n всех участников турнира. Как установить, сколько участников вынуждены будут перейти в следующий круг без игры?

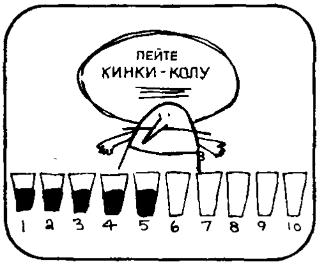
При заданном n число участников, остающихся без партнера, можно определить следующим образом. Вычтем из n наименьшую степень числа 2, которая больше или равна n. Полученную разность запишем в двоичной системе. Число единиц в двоичной записи и будет равно числу участников турнира, вынужденных перейти в следующий круг без игры из-за нехватки партнера. В нашей задаче мы вычтем 37 из 64 (то есть из 2^6) и получим разность, равную 27. Десятичное число 27 в двоичной системе имеет вид 11011. Поскольку в его записи 4 единицы, то за весь турнир без игры в следующий круг перейдут 4 игрока. Обоснование этого алгоритма для определения числа участников, которым не хватает партнера, мы предоставляем читателю в качестве интересного упражнения.

Описанный в задаче тип турнира иногда называют «игрой на вылет». Он аналогичен алгоритму, который вычислители, работающие на современных ЭВМ, используют для нахождения наибольшего элемента в множестве из n элементов: наибольший элемент находят, сравнивая попарно элементы множества и отбрасывая при очередном сравнении тот из двух элементов, который не больше другого. Как мы уже знаем, чтобы найти наибольший элемент, достаточно произвести ровно $n-1$ попарных сравнений. При автоматической сортировке сравнивать можно не только по 2, но и по 3, 4 и т. д. элемента.

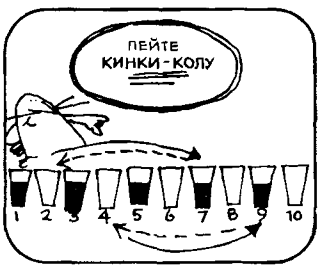
Автоматическая сортировка играет важную роль в вычислительной математике и в информатике. Ей посвящено немало книг. Каждый из нас без труда назовет длинный перечень примеров применения автоматической сортировки. Подсчитано, что примерно четверть машинного времени в научных и в технических расчетах затрачивается на решение задач, связанных с сортировкой данных.

Стаканчики профессора Квиббла

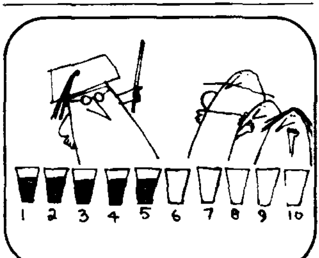
Как-то раз продавец прохладительных напитков Барни предложил двум покупателям следующую задачку.



Барни. Перед вами 10 бумажных стаканчиков, расставленных в ряд. В первые 5 стаканчиков я наливаю кинки-колу, остальные 5 стаканчиков остаются пустыми. Можно ли переставить 4 стаканчика так, чтобы пустые и полные стаканчики чередовались?



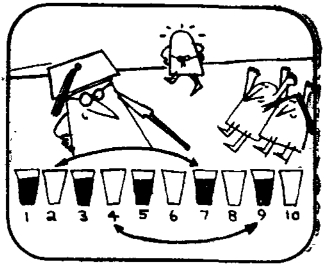
Барни. Правильно! Стоит лишь переставить второй стаканчик с седьмым, а четвертый с девятым, как задача будет решена.



Разговор Барни с покупателями услышал проходивший мимо профессор Квиббл, большой любитель неожиданных решений, который счел необходимым вмешаться.

Проф. Квиббл. Переставлять 4 стаканчика совсем не обязательно. Я берусь решить задачу, переставив лишь 2 стаканчика. Как, по-вашему, это возможно?

Проф. Квиббл. Мое решение проще простого. Я беру второй стаканчик и переливаю его содержимое в седьмой, а содержимое четвертого стаканчика — в девятый.



Глубокая мысль

Хотя предложенное профессором Квибблом шуточное решение основано на неоднозначном толковании слова «переставить» (означающего не только «поменять местами», как полагал Барни, но и «поставить по-другому», чем и воспользовался профессор Квиббл), исходная задача не столь тривиальна, как может показаться. Рассмотрим, например, аналогичную задачу для случая, когда из 200 стаканчиков, выстроенных в ряд, в первые 100 налита кинки-кола, а 100 остальных оставлены пустыми. Сколько пар стаканчиков следует поменять местами, чтобы пустые и полные стаканчики чередовались?

Поскольку следить за 200 стаканчиками довольно трудно, разберем сначала ту же задачу при меньших значениях n, где n—число полных (или пустых) стаканчиков, и попытаемся подметить общую закономерность. Стаканчики можно «моделировать» фишками двух цветов, игральными картами, выложенными на столе рубашкой либо вверх, либо вниз, монетами и тому подобными предметами, наделенными каким-нибудь «двузначным» признаком. При $n = 1$ для решения задачи не требуется переставлять ни одной пары стаканчиков. При $n = 2$ решение очевидно и сводится к перестановке одной пары стаканчиков. Возможно, вы удивитесь, когда узнаете, что при $n = 3$ чередование пустых и полных стаканчиков достигается перестановкой одной пары стаканчиков. Еще немного усилий, и вам откроется довольно простая общая закономерность. При четном n для решения задачи требуется поменять местами $n/2$ пар, а при нечетном n соответственно $(n-1)/2$ пар стаканчиков. Следовательно, если имеется 100 пустых и 100 полных стаканчиков, то задачу можно решить, переставив 50 пар стаканчиков.

При этом вы сдвинете с места 100 стаканчиков. Предложенное профессором Квибблом шуточное решение позволяет вдвое уменьшить число стаканчиков, сдвигаемых с места.

Существует одна классическая головоломка, очень похожая на только что рассмотренную нами задачу, но несколько более трудную. Начнем с $2n$ предметов, выстроенных в ряд. Пусть по-прежнему n предметов, составляющих первую половину ряда, будут одиого типа, а n предметов, составляющих вторую половину ряда, будут другого типа. (Как и прежде, их можно «моделировать» стаканчиками, фишками, игральными картами и т. п.) Требуется переместить предметы так, чтобы предметы одного типа чередовались с предметами другого типа, но в отличие от предыдущей задачи слову «переместить» придается строго определенное значение. На этот раз слово «переместить» означает, что любые *два* соседних предмета разрешается, не изменяя их последовательности, изъять из ряда и пристроить к любому *свободному* концу (после одного или нескольких ходов ряд может распасться на несколько звеньев).

Вот как это делается, например, при $n=3$:

$$
\begin{array}{l}
XXX000 \\
\quad\;\, X000XX \\
\quad\;\, X00\quad X0X \\
\qquad\;\; X0X0X0
\end{array}
$$

Как выглядит общее решение? При $n=1$ решение тривиально. При $n=2$ задача, как нетрудно выяснить, неразрешима. При всех $n>2$ головоломка допускает решение не менее чем за n ходов.

Найти решение при $n=4$ не-так-то просто, и поиск его, несомненно, доставит вам немало удовольствия. Может быть, вам удастся сформулировать алгоритм решения головоломки за n ходов при любом $n>3$.

Не меньший вызов любознательному читателю таят в себе многие необычные варианты той же головоломки. Приведем лишь некоторые из них.

1. Правила перемещения пар остаются теми же за одним исключением: если пара образована предметами различных типов, то перед тем, как пристроить ее к свободному концу, последовательность предметов в паре следует изменить. Например, перемещая две фишки, первая из которых (левая) красная, а вторая (правая) черная, их необходимо поменять местами, после чего первой станет черная, а второй красная фишка, и лишь после этого пристраивать к свободному концу. При 8 фишках существует решение в 5 ходов. При 10 фишках 5 ходов также оказывается достаточно. Общее решение неизвестно. Может быть, вам удастся найти его.

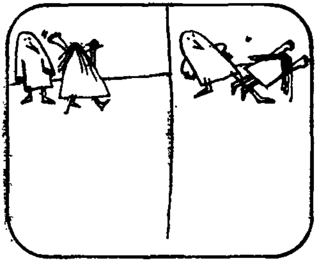
2. Правила такие же, как в исходной задаче, но фишек одного цвета на 1 меньше, чем другого, то есть фишек одного цвета n, а фишек другого $n+1$. Доказано, что при любом n задачу можно решить за n^2 ходов, причем это число минимально.

3. Имеются фишки трех различных цветов. Пары соседних фишек перемещаются по обычному правилу с тем, чтобы фишки каждого цвета оказались выстроенными подряд. При $n=3$ (всего 9 фишек) существует решение в 5 ходов. И в этом, и во всех предыдущих вариантах головоломки предполагается, что после последнего перестроения фишки стоят в ряд «сомкнутым строем» (без пробелов). Если ряд может содержать пробелы, то существует необычное решение всего лишь в 4 хода.

Напрашиваются и другие варианты головоломки. Насколько известно, их никто ранее не предлагал и уж конечно не решал. Например, в каждом из приведенных нами вариантов головоломки за один ход можно перемещать не по две, а по три (и более) соседние фишки.

Что произойдет, если на первом ходу переместить фишку, на втором — 2 фишки, на третьем — 3 фишки и т. д.? Если в ряд выстроены n фишек одного цвета и затем n фишек другого цвета, то всегда ли правильного чередования цветов можно добиться за n ходов?

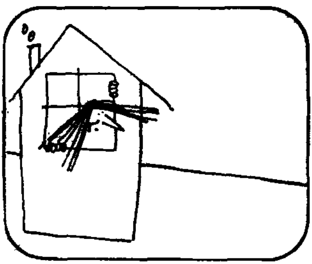
Дороги, которые мы выбираем



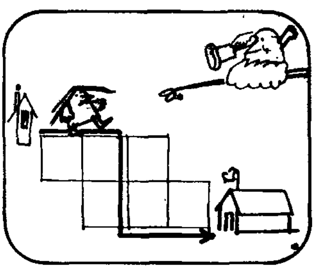
Маленькая Сьюзен в большом затруднении. Дело в том, что по дороге в школу ее то и дело подстерегает скверный мальчишка Стинки.

Стинки. Эй, Сьюзен! Можно, я пойду с тобой?

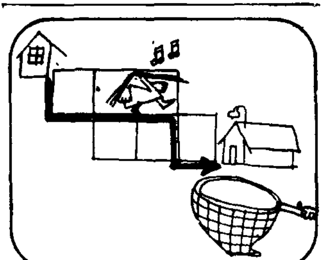
Сьюзен. Нет, очень тебя прошу, уйди!



Сьюзен. Я придумала, что мне делать. Буду ходить в школу каждое утро другой дорогой. Тогда Стинки ни за что не догадается, где меня можно подстеречь.



На этой карте показаны все улицы между домом Сьюзен и ее школой. Направляясь в школу по намеченному маршруту, Сьюзен идет либо строго на восток, либо на юг.



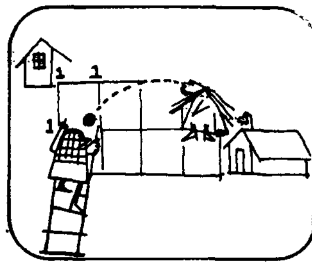
Здесь вы видите Сьюзен, идущую в школу по другой дороге. Разумеется, ей не хотелось бы удаляться от школы. Сколькими способами можно добраться от дома Сьюзен до школы?

Сьюзен. Хотела бы я знать, сколько различных дорог ведет от моего дома к школе. Подумаем! Сосчитать их, должно быть, не просто. Впрочем... Есть идея! Сосчитать дороги совсем не трудно! Очень даже просто!

Какая идея пришла в голову Сьюзен?

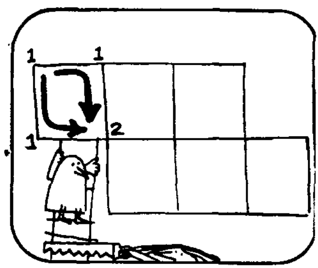
Вот как она рассудила.

Сьюзен. У того перекрестка, возле которого я живу, поставлено на карте число 1: выйти из дома я могу лишь одним способом. У перекрестков, расположенных в одном квартале к востоку и к югу от дома, я поставлю по 1, потому что до каждого из них можно добраться только одним способом.



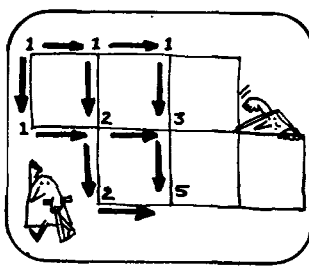
Сьюзен. У этого перекрестка я поставлю число 2, так как к нему от моего дома ведут 2 различные дороги.

Тут Сьюзен стало ясно, что число у каждого перекрестка равно либо ближайшему числу (если оно одно), либо сумме двух ближайших чисел.



Сьюзен. Еще четыре перекрестка пометила числами. Скоро закончу.

Не поможете ли вы Сьюзен? Не подскажете ли ей, сколько различных дорог ведет от ее дома к школе?

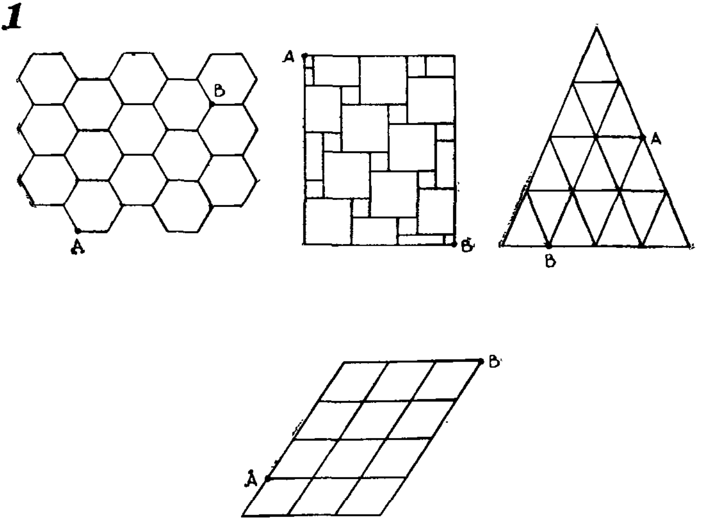


Сколько путей?

Три перекрестка на ближайшей вертикали справа следует пометить (сверху вниз) числами 1, 4, 9, а два перекрестка на следующей вертикали — числами 4 и 13. Число 13, стоящее на карте у самого правого нижнего перекрестка, показывает, что Сьюзен может выбрать кратчайшую дорогу в школу 13 различными способами.

Придуманный Сьюзен метод действительно приводит к простому и эффективному алгоритму для определения числа кратчайших путей, ведущих от ее дома к школе. Если бы Сьюзен попыталась вычертить все пути, чтобы затем пересчитать их, то решение оказалось бы весьма громоздким, а при большом числе улиц просто необозримым. Вы сможете лучше оценить эффективность предложенного Сьюзен алгоритма, если вычертите все 13 путей.

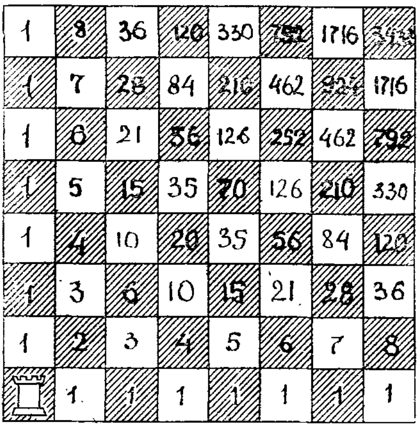
1



Чтобы проверить, насколько глубоко вы усвоили алгоритмы Сьюзен, попробуйте нарисовать сети улиц, имеющие другие конфигурации, и подсчитать число кратчайших путей, ведущих из точки A в точку B. Четыре задачи этого типа представлены на рис. *1*. Решать их можно по-разному, например, воспользоваться комбинаторными формулами, но все методы несколько сложнее алгоритма Сьюзен.

Чему равно число кратчайших путей, по которым ладья может перейти из одного углового поля на шахматной доске в другое, диагонально противоположное? Эта задача легко решается, если каждому полю на шахматной доске приписать по числу так же, как Сьюзен приписывала числа перекресткам на карте города. Ладья ходит только по горизонтали и вертикали. Следовательно, кратчайший путь из любой клетки в любую другую состоит в преодолении разделяющего клетки расстояния по горизонтали и по вертикали. Если числа расставлены верно (см. рис. **2**), то они указывают число кратчайших путей,

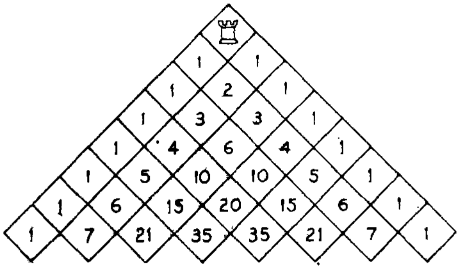
2



ведущих из нижнего угла в любое поле. Например, поле в правом верхнем углу помечено числом 3432. Следовательно, ладья может перейти с поля, стоящего в левом нижнем углу доски на диагонально противоположное поле 3432 кратчайшими путями.

Разрезав шахматную доску по диагонали и повернув половину, мы получим треугольник, изображенный на рис. *3*. Числа, стоящие в клетках любого ряда, указывают число кратчайших путей, ведущих

3

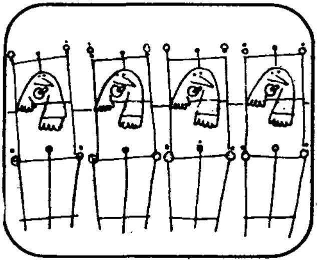


в них из самой верхней клетки. Расставленные в клетках числа образуют знаменитый арифметический треугольник Паскаля, и это не удивительно: алгоритм для подсчета числа кратчайших путей, ведущих от вершины, в точности совпадает с процедурой построения треугольника Паскаля. Этот изоморфизм позволяет считать исходную головоломку прологом к изучению необычайно разнообразных и красивых свойств треугольника Паскаля.

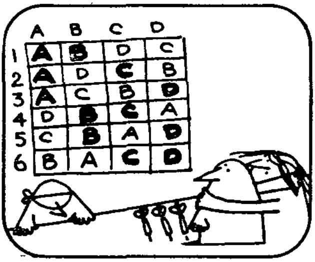
Треугольник Паскаля позволяет находить биномиальные коэффициенты (то есть коэффициенты при любом члене разложения $(a+b)^n$, где n — любое целое число) и решения многих задач элементарной теории вероятностей. Заметим, что на рис. *3* число кратчайших путей, ведущих из вершины треугольника в самую левую или самую правую клетку нижнего ряда, равно 1 и что по мере приближения к середине ряда число кратчайших путей возрастает. Возможно, вам случалось видеть одно из устройств, действие которых основано на свойствах треугольника Паскаля: по наклонной доске, в которую в шахматном порядке вбиты колышки, скатываются шарики и скапливаются в отсеках под колышками нижнего ряда. Распределение шариков имеет форму колоколообразной кривой, а число шариков в каждом отсеке пропорционально соответствующему биномиальному коэффициенту, потому что число кратчайших путей, ведущих в каждый отсек, в точности совпадает с определенным биномиальным коэффициентом.

Алгоритм, предложенный Сьюзен, как нетрудно понять, остается в силе и для трехмерных сетей, в которых ячейки («кварталы») имеют форму прямоугольных параллелепипедов. Представьте себе куб с длиной ребра 3 единицы, разделенный на 27 единичных кубов. Будем считать его пространственной шахматной доской и в угловую «клетку» поместим ладью, которая может двигаться параллельно любому из ребер куба. Сколькими способами ладью можно перевести кратчайшим путем в клетку, расположенную на другом конце диагонали куба?

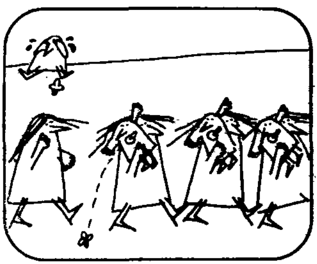
Перепутали



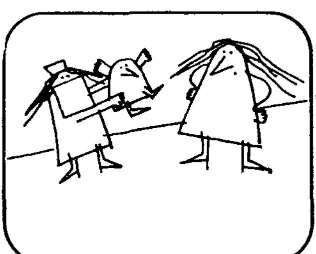
В одном родильном доме по чьему-то недосмотру перепутали карточки с именами 4 младенцев. У двух детей оказались их карточки, а карточки остальных двух малюток были разложены неправильно. Сколько существует различных вариантов путаницы?



Подсчитать число вариантов совсем нетрудно, если составить таблицу. Оказывается, что карточки с именами 2 детей из 4 можно перепутать лишь 6 различными способами.



Предположим теперь, что после того, как карточки перепутали, у трех детей оказались карточки с их именами, а одному младенцу досталась карточка с чужим именем. Сколько вариантов путаницы существует в этом случае?



Как бы вы стали решать эту задачу? Составили бы таблицу? А может быть, у вас есть идея, как решить эту задачу проще?

«Птичка в клетке»

Многим кажется, что ответить на вопрос задачи довольно трудно. Те, кто так думает, ошибочно полагают, будто перепутать карточки так, чтобы 3 младенцам из 4 достались карточки с их именами, можно многими способами. Но стоит лишь обратиться к принципу «птичка в клетке» и сформулировать задачу несколько иначе, как ответ сразу становится очевидным. Предположим, что перед нами 4 клетки и на каждой из них укреплена карточка с названием одного из 4 предметов. Если 3 предмета попали в клетки со своими названиями, то четвертому предмету не остается ничего другого, как попасть в клетку, к которой прикреплена карточка с его названием. Таким образом, мы имеем дело лишь с одним вариантом: каждый из 4 предметов оказывается в своей клетке.

Во многих книгах по занимательной математике встречается следующая задача, в которой речь идет лишь о 3 предметах. На столе расставлены 3 закрытые коробки. В одной из них находятся 2 монеты по 5 центов, в другой — 2 монеты по 10 центов и в третьей — 1 пятицентовая и 1 десятицентовая монета. На крышках коробок написаио: 10 центов; 15 центов и 20 центов, но ни одна из надписей не соответствует содержимому коробки. Предположим, что из коробки с надписью «15 центов» (напомним, что надпись не соответствует содержимому коробки) извлекли 1 монету и положили на стол перед коробкой. Можно ли, взглянув на эту монету, сказать, какие монеты находятся в каждой из 3 коробок?

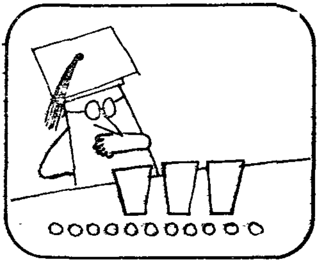
Как и в предыдущей задаче, многих вводит в заблуждение кажущаяся неоднозначность выбора: они думают, будто существует довольно много вариантов решения, тогда как на самом деле задача допускает единственное решение. Монета, извлеченная из коробки с надписью «15 центов» (не соответствующей содержимому), может быть монетой достоинством либо в 5 центов, либо в 10 центов. Если извлечена монета достоинством в 5 центов, то в коробке первоначально находились 2 монеты по 5 центов. Если извлечена монета достоинством в 10 центов, то в коробке первоначально находились 2 монеты по 10 центов. И в том и в другом случае содержимое остальных двух коробок восстанавливается однозначно. Нетрудно видеть, что не соответствующие содержимому каждой коробки надписи оставляют лишь 2 варианта распределения монет по коробкам. После того как из коробки с ложной надписью «15 центов» извлечена 1 монета, один вариант исключается, и остается единственный допустимый вариант, соответствующий правильному решению.

Иногда встречается несколько более сложная разновидность той же задачи. Содержимое всех трех коробок требуется определить, извлекая наименьшее число монет (из любой коробки). Единственное решение задачи состоит в том, чтобы из коробки с надписью «15 центов» извлечь 1 монету. Может быть, вам удастся придумать более сложные варианты задачи: в одной коробке могут находиться более 2 монет, да и самих коробок может быть более 3.

С задачей о младенцах тесно связано немало других задач на сообразительность, так же, как и исходная задача, приводящих к элементарной теории вероятностей. Например, если карточки с именами младенцев перемешаны наугад, то какова вероятность, что у всех 4 младенцев окажутся карточки с их именами? С какой вероятностью у всех 4 младенцев карточки не будут соответствовать их именам? Какова вероятность, что по крайней мере у 1 младенца окажется карточка с его именем? Какова вероятность, что ровно у 1 младенца окажется карточка с его именем? Какова вероятность, что по крайней мере у 2 младенцев окажутся карточки с их именами? Какова вероятность, что ровно у 2 младенцев окажутся карточки с их именами? Какова вероятность, что не более чем у 2 младенцев окажутся карточки с их именами? И так далее.

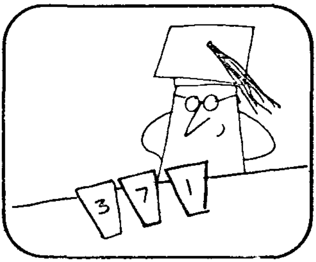
Вопрос о «по крайней мере одном» — независимо от того, о чем идет речь,— один из классических вопросов занимательной математики. Довольно часто его облекают в форму задачи об n посетителях ресторана, сдавших шляпы в гардероб. Рассеянный гардеробщик выдал посетителям номера наугад, ни-мало не заботясь о том, кому достанется номерок от шляпы — ее владельцу или кому-нибудь другому. Какова вероятность, что по крайней мере один посетитель получит свою шляпу? Оказывается, что при возрастании n эта вероятность быстро стремится к $1-(1/e)$, то есть немногим больше $^1/_2$. Здесь e — знаменитая иррациональная константа (число Эйлера), равная 2,71828... В задачах теории вероятностей она встречается так же часто, как число π в геометрических задачах.

Стаканы профессора Квиббла

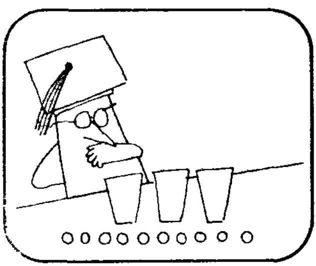


У профессора Квиббла имеется для вас задача-головоломка.

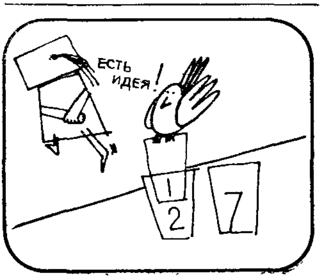
Проф. Квиббл. Возьмите 3 стакана для сбивания молочного коктейля и попробуйте разложить по ним 11 монет так, чтобы в каждом стакане число монет было нечетным.



Проф. Квиббл. Задачка не из трудных, не так ли? И решений она допускает много. Например, в один стакан можно положить 3 монеты, в другой — 7 монет, а в третий — 1 монету.



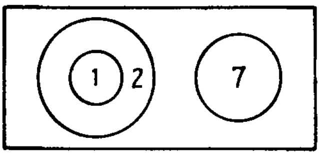
Проф. Квиббл. А сумеете ли вы разложить по тем же 3 стаканам 10 монет так, чтобы число монет в каждом стакане было нечетным? Сделать это можно, хотя и не просто!



Проф. Квиббл. Надеюсь, вы не отступили перед трудностями? Вам нужно было лишь догадаться вставить один стакан в другой. После этого уже совсем нетрудно разложить монеты так, чтобы в каждом стакане оказалось нечетное число монет.

Подмножества Квиббла

Счастливая идея, позволяющая сразу же решить головоломку проф. Квиббла, сводится к тому, что одни и те же монеты могут одновременно находиться более чем в одном стакане. На языке теории множеств решение задачи допускает следующее описание: имеется два множества монет, одно из которых содержит 7 элементов, а другое — 3 элемента, причем в последнем множестве выделено подмножество, содержащее 1 элемент. Наглядно полученное решение можно изобразить в виде следующей диаграммы:



Найти все остальные решения мы предоставляем читателю. Додуматься до 10 решений, одно из которых предложил проф. Квиббл, не составит особого труда, но найти еще 5 решений (всего существует 15 решений задачи) не так-то просто: необходимо «озарение».

После того как вам удастся найти все 15 решений, попробуйте обобщить задачу, варьируя число монет, стаканов и отличительные особенности числа монет, разложенных по стаканам.

Основная идея «счастливой находки», позволившей решить задачу проф. Квиббла (элементы какого-то множества принадлежат другому множеству и при подсчете учитываются дважды), встречается во многих известных головоломках и парадоксах. Приведем лишь одну из таких задач, носящую шуточный характер.

После того как один школьник пропустил целую неделю занятий, его навестил учитель. Школьник принялся объяснять, почему ему некогда ходить в школу.

— Я сплю 8 часов в сутки. Это составляет $8 \times 365 = 2920$ часов в году, или, так как в сутках 24 часа, $2920 : 24$ (около 122) суток.

По субботам и воскресеньям школа не работает, что составляет за год 104 дня.

60 дней в году приходятся на летние каникулы.

На завтрак, обед и ужин у меня уходит 3 часа в день, то есть $3 \times 365 = 1095$ часов, или $1095 : 24$ (около 45 суток) в год.

По крайней мере 2 часа в день мне необходимы для отдыха, что составляет $2 \times 365 = 730$ часов, или $730 : 24$ (около 30 суток) в год.

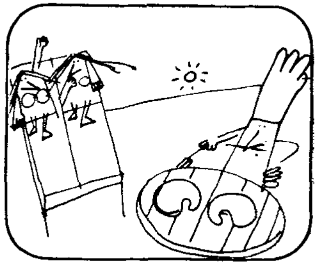
Школьник выписал названные им числа в столбец и просуммировал:

На сон	122
Субботы и воскресенья	104
Летние каникулы	60
Завтраки, обеды и ужины	45
Отдых	30
Итого	361 день

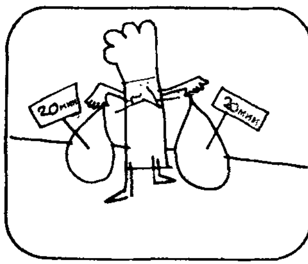
— Видите,— продолжал школьник,— у меня остается всего-навсего 4 дня в год на болезни, а о праздниках я и не говорю!

Учитель внимательно проверил все выкладки, но не смог обнаружить в них ошибки. Проверьте этот парадокс на своих приятелях. Многие из них сумеют найти ошибку? А ошибка кроется в том, что некоторые подмножества дней года сосчитаны более одного раза: множества, на которые школьник разбил 365 дней в году, перекрываются (пересекаются) так же, как множества монет в стаканах проф. Квибла.

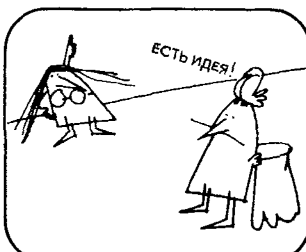
Как поджарить ромштексы?



На лужайке перед домом мистер Джонсон соорудил небольшую плиту, на которой за один час можно поджарить 2 ромштекса. Его жена и дочь Бетси очень проголодались и хотят поесть как можно скорей. Как быстрее всего поджарить 3 ромштекса?

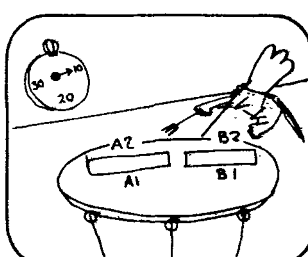


Мистер Джонсон. Чтобы поджарить с двух сторон 1 ромштекс, требуется 20 мин (по 10 мин на каждую сторону). Значит, за 20 мин можно приготовить 2 ромштекса. Еще 20 мин мне понадобится, чтобы поджарить третий ромштекс, поэтому всего на приготовление 3 ромштексов придется затратить 40 мин.

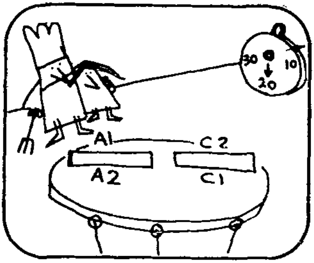


Бетси. Папочка, ромштексы можно поджарить гораздо быстрее! Я только что придумала, как можно сэкономить 10 мин.

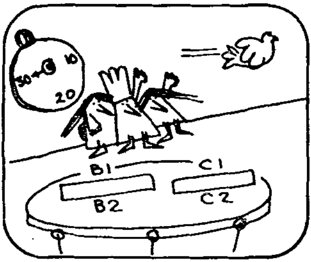
Какая удачная мысль позволила Бетси сократить приготовление обеда на 10 мин?



Чтобы объяснить предложенное Бетси решение, обозначим ромштексы *A*, *B* и *C*, а их стороны — цифрами 1 и 2. За первые 10 мин следует поджарить стороны *A*1 и *B*1.



Отложим ромштекс *B* в сторону и поджарим за следующие 10 мин стороны *A*2 и *C*1. К концу 20-й минуты ромштекс *A* будет готов.



Еще через 10 мин поджарятся стороны *B*2 и *C*2. Таким образом, на приготовление всех 3 ромштексов уйдет всего 30 мин, что и утверждала Бетси.

Общая стратегия

Рассмотренная нами простая комбинаторная задача относится к одному из разделов современной математики, известному под названием «исследование операций». На ее примере хорошо видно, что если серию операций необходимо произвести в кратчайший срок, то оптимальная последовательность операций может оказаться не вполне очевидной. Последовательность, которая на первый взгляд кажется оптимальной, в действительности может допускать существенное усовершенствование. В нашей проблеме удачная мысль сводится к тому, что после того, как ромштекс поджарен с одной стороны, отнюдь не обязательно тотчас же поджаривать его с другой стороны.

Как обычно, рассмотренная нами простая задача допускает не одно обобщение. Например, условия задачи можно варьировать, изменяя число ромштексов, которые можно одновременно поджаривать на плите, число ромштексов, которые требуется поджарить, или то и другое одновременно. Другой подход к обобщению задачи состоит в увеличении числа сторон, с которых требуется «обжарить» тот или иной предмет. Например, кому-нибудь может понадобиться окрасить со всех сторон в красный цвет n кубов, окрашивая за один раз по одной грани k кубов.

Исследование операций находит применение при решении практических задач в торговле, промышленности, военном деле и многих других областях человеческой деятельности. Чтобы по достоинству оценить решение даже столь простой задачи, как рассмотренная нами задача о наиболее быстром способе приготовления 2 ромштексов, рассмотрим следующий вариант.

Из длинного списка хлопотливых домашних дел мистеру и миссис Джонс осталось выполнить три пункта:

1) произвести уборку на первом этаже (у семейства Джонсов имеется 1 пылесос, на уборку первого этажа уходит 30 мин);

2) подстричь газон перед домом (у семейства Джонсов имеется 1 машинка для стрижки газона, на выполнение этого задания необходимо затратить 30 мин);

3) накормить и уложить спать ребенка (на это также требуется затратить 30 мин).

Как следует распределить обязанности супругам Джонс, чтобы завершить все работы по дому в кратчайший срок? Если предположить, что мистер и миссис Джонс работают одновременно, то трудно удержаться от искушения дать ответ: «На выполнение 3 пунктов программы у супругов Джонс уйдет 60 мин». Но если одну из работ, например уборку первого этажа, разделить на 2 равные части и выполнение второй половины отложить (как в задаче с поджариванием ромштексов) до завершения другой работы, то на выполнение намеченной программы у супругов Джонс уйдет лишь $^3/_4$ времени (по сравнению с первым вариантом), или 45 мин.

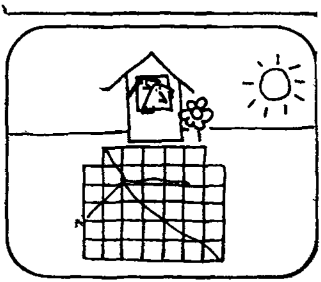
А вот более хитроумная задача на исследование операций: требуется как можно быстрее обжарить с двух сторон 3 ломтика хлеба и каждый из них с одной стороны намазать маслом. В нашем распоряжении имеется тостер устаревшей модели с дверцами на пружинках справа и слева. Тостер вмещает одновременно 2 ломтика хлеба и поджаривает их только с одной стороны. Чтобы поджарить тосты с двух сторон, необходимо открыть дверцы и перевернуть ломтики на другую сторону.

Чтобы положить ломтик хлеба в тостер, требуется затратить 3 с. Еще 3 с уходит на то, чтобы вынуть каждый ломтик из тостера, и 3 с требуется для того, чтобы повернуть ломтик на другую сторону, не вынимая его из тостера. Каждую из этих операций необходимо производить двумя руками. Это означает, что ни одну из них нельзя выполнить одновременно над двумя ломтиками хлеба. Кроме того, пока мы кладем ломтик хлеба в тостер, вынимаем его оттуда или переворачиваем, его нельзя намазать маслом. Ломтик хлеба поджаривается с одной стороны за 30 с. Намазать ломтик хлеба маслом можно за 12 с.

Каждый тост требуется намазать маслом только с одной стороны. Намазывать маслом неподжаренную сторону запрещается. Ломтик хлеба, поджаренный и намазанный маслом с одной стороны, можно снова положить в тостер, чтобы поджарить с другой стороны. Сразу после включения тостер нагревается до рабочей температуры. Сколько времени потребуется, чтобы поджарить с двух сторон 3 ломтика хлеба и каждый из них намазать маслом?

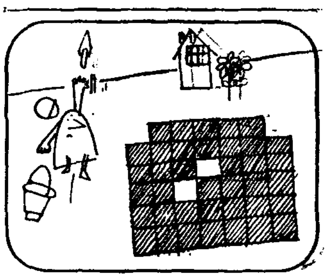
Нетрудно спланировать все операции так, чтобы 3 ломтика поджаренного хлеба с маслом были готовы за 2 мин. Но 9 с можно сэкономить, если вам удастся набрести на следующую счастливую идею: ломтик хлеба можно поджарить с одной стороны не до конца, затем вынуть из тостера и дожарить позже. При таком подходе время на приготовление 3 ломтиков поджаренного хлеба с маслом удается сократить до 114 с. Но даже для тех, кому удается подобрать ключ к решению, составление оптимального графика выполненных операций остается далеко не легкой задачей. Что же касается бесчисленных проблем на составление самых экономичных последовательностей операций в различных областях человеческой деятельности, то они требуют для своего решения сложных математических методов, обращения к ЭВМ и современной теории графов.

Упрямые плитки

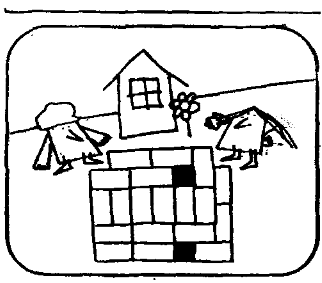


Площадка перед домом мистера Брауна выложена 40 квадратными плитками. Со временем некоторые плитки треснули, и мистер Браун решил покрыть площадку заново.

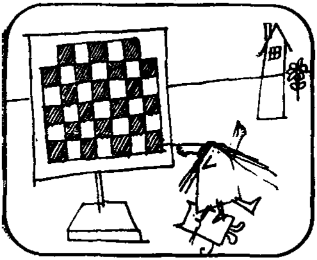
Он отправился в магазин и выбрал новые плитки, которые имели форму прямоугольников, составленных из двух квадратов размером в старую плитку.
Владелец магазина. Сколько вам нужно плиток, мистер Браун?
Мистер Браун. Мне нужно покрыть 40 квадратов. Думаю, что 20 плиток будет достаточно.



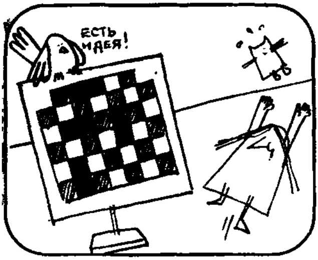
Но когда м-р Браун попытался вымостить площадку новыми плитками, то ничего хорошего из этого не получилось. Как он ни старался, уложить плитки так, чтобы они покрыли всю площадку, это ему не удалось.



Бетси. Что случилось, папа? Чем ты так озабочен?
М-р Браун. Никак не могу уложить эти проклятые плитки! Как ни бьюсь, два квадрата остаются непокрытыми. С ума можно сойти!

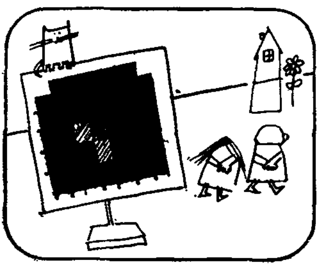


Дочь мистера Брауна начертила план площадки, раскрасила квадраты в шахматном порядке и в течение нескольких минут внимательно разглядывала свой рисунок.



Бетси. Есть идея! Я поняла, почему у тебя ничего не получается, папа! Все дело в том, что каждая новая плитка должна накрывать один белый и один черный квадрат.

Какое отношение это имеет к делу? Что Бетси имеет в виду?



На плане площадки 21 черный квадрат и 19 белых квадратов. Следовательно, после того, как уложено 19 новых плиток, 2 черных квадрата неизменно остаются непокрытыми, и покрыть их одной новой плиткой невозможно. Единственный способ выйти из затруднения — расколоть новую плитку на два квадрата.

Проверка на четность

Дочь мистера Брауна нашла способ покрыть площадку прямоугольными плитками, воспользовавшись рассуждением, известным под названием «проверка на четность». Мы говорим о двух числах, что их четность одинакова, если они либо оба четны, либо оба нечетны. Если одно число четно, а другое нечетно, то говорят, что их четность различна. С подобными ситуациями неоднократно приходится сталкиваться в комбинаторной геометрии.

В нашей задаче два квадрата одного цвета обладают одинаковой четностью, а четность двух квадратов различных цветов различна. Прямоугольная плитка покрывает только квадраты различной четности. Бетси доказала, что если 19 прямоугольных плиток уложить на площадке перед домом, то 2 оставшихся квадрата можно было бы покрыть последней прямоугольной плиткой, если бы их четность была одинаковой. А поскольку четность двух оставшихся квадратов всегда одинакова, то покрыть их последней плиткой невозможно. Следовательно, покрыть площадку перед домом новыми плитками также невозможно.

Проверка на четность в самых различных вариантах лежит в основе доказательств многих теорем «несуществования» в математике. Кто не помнит, например, знаменитое доказательство иррациональности числа $\sqrt{2}$, предложенное Евклидом. Иррациональность $\sqrt{2}$ Евклид доказывает от противного, то есть сначала предполагает, что число $\sqrt{2}$ рациональное и его можно представить в виде несократимой дроби с целым числителем и знаменателем. Числитель и знаменатель этой дроби не могут быть оба четными, так как тогда дробь не была бы несократимой. Следовательно, либо они оба нечетны, либо один из них четен, а другой нечетен. Затем Евклид доказывает, что и в том, и в другом случае дробь, которая была бы равна $\sqrt{2}$, не существует. Иначе говоря, числитель и знаменатель дроби, которая была бы равна $\sqrt{2}$, не могли бы быть ни одинаковой, ни различной четности. Но все дроби подразделяются на два непересекающихся класса: к одному относятся дроби с числителем и знаменателем одинаковой четности, к другому принадлежат дроби с числителем и знаменателем различной четности. Следовательно, число $\sqrt{2}$ непредставимо в виде дроби с целым числителем и знаменателем, то есть иррационально.

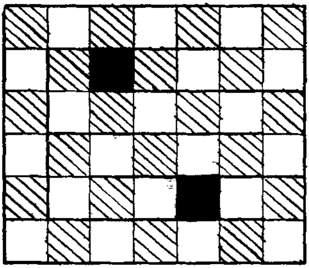
Теория покрытия одних плоских фигур другими изобилует задачами, в которых доказать несуществование решения было бы трудно, если бы не проверка на четность. Задача, с которой столкнулся мистер

Браун, чрезвычайно проста, поскольку в ней речь идет о покрытии площадки плитками в форме костей домино — простейших нетривиальных полимино. (Каждая «кость» полимино составлена из квадратов, примыкающих друг к другу по целой стороне). Предложенное Бетси доказательство неразрешимости задачи применимо к любой фигуре из единичных квадратов, у которой после раскрашивания квадратов в шахматном порядке клеток одного цвета оказывается по крайней мере на одну больше, чем клеток другого цвета.

В рассмотренной нами задаче площадку перед домом можно рассматривать как прямоугольник размером 6×7 единиц с двумя недостающими клетками одного цвета. Если из прямоугольника вырезать 2 клетки одного цвета, то ясно, что покрыть 20 костями домино 40 остальных клеток невозможно. С исходной задачей тесно связан следующий ее интересный вариант: всегда ли 20 костями домино можно покрыть прямоугольник размером 6×7 единиц, из которого вырезаны 2 клетки разного цвета? Проверка на четность не позволяет доказать неразрешимость новой задачи, но это отнюдь не означает, будто бренные останки прямоугольника всегда можно покрыть 20 костями домино. От перебора всех фигур, возникающих при удалении из прямоугольника размером 6×7 единиц двух клеток разного цвета, следует заранее отказаться, так как их слишком много, что затрудняет анализ задачи. Не существует ли простое доказательство разрешимости задачи, позволяющее разом охватить все прямоугольники размером 6×7 с двумя недостающими клетками разного цвета?

Такое доказательство, простое и изящное, действительно существует. Идею его предложил Ральф Гомори. Оно также использует проверку на четность. Предположим, что прямоугольник размером 6×7 целиком заполнен замкнутой дорожкой шириной в 1 клетку (рис. 4). Если удалить 2 клетки разного цвета, то, где бы они ни были расположены в прямоугольнике, замкнутая дорожка распадется на две части, каждая из которых состоит из четного числа клеток, цвета которых чередуются. Ясно, что каждый

4



такой отрезок дорожки можно выложить костями домино. Следовательно, задача всегда допускает решение. Может быть вам захочется испытать свои силы и применить остроумную идею Гомори к доказательству разрешимости аналогичных задач для прямоугольников других размеров и форм, из которых вырезано более двух клеток.

Теория «покрытия» — обширный раздел комбинаторной геометрии, интерес к которому все возрастает. Области, которые требуется покрыть, могут быть любой формы, конечными или бесконечными. Форма фигур, которыми требуется покрыть заданную фигуру, варьируется от задачи к задаче. Иногда требуется покрытие не конгруэнтными фигурами, а фигурами нескольких различных форм. Доказательство несуществования решения таких задач нередко удается получить, раскрасив клетки покрываемой фигуры специальным образом в несколько цветов.

Трехмерным аналогом домино служит кирпич размером $1 \times 2 \times 4$ единиц. Такими кирпичами нетрудно заполнить ящик размером $4 \times 4 \times 4$ единиц (заполнение пространственных тел принято называть упаковкой). Можно ли заполнить кирпичами ящик размером $6 \times 6 \times 6$ единиц? Решение этой задачи аналогично решению задачи о покрытии площадки перед домом мистера Брауна. Представим себе, что ящик разделен на 27 кубиков размером $2 \times 2 \times 2$ единиц. Раскрасим кубики в шахматном порядке в черный и белый цвет («шахматная доска» при этом получится не обычная, а трехмерная). Подсчитав, сколько черных и белых кубиков вмещает ящик, мы обнаружим, что кубиков одного цвета на 8 больше, чем кубиков другого.

Независимо от того, как расположен кирпич внутри ящика, он всегда покрывает столько же белых кубиков, сколько и черных. Но кубиков одного цвета в ящике на 8 больше, чем кубиков другого цвета. Независимо от того, как расположены в ящике первые 26 кирпичей, в нем всегда остается еще 8 кубиков одного цвета. Покрыть их двадцать седьмым кирпичом невозможно. Доказать то же утверждение, перебирая все возможные случаи упаковки ящика, было бы чрезвычайно трудно.

Теория упаковки кирпичей — лишь небольшой фрагмент теории упаковки в трехмерном пространстве. Проблемам этой теории, среди которых имеется немало нерешенных, посвящена обширная и все возрастающая литература. Многие из задач относятся к рациональному выбору стандартной упаковки промышленных товаров, хранению товаров на складе и т. д.

Четность играет важную роль и в физике элементарных частиц. В 1957 г. два американских физика китайского происхождения, Ли Цзундао и Янг Чжэньнин, получили Нобелевскую премию за теоретическое предсказание несохранения четности. Их знаменитая работа носит слишком специальный характер, чтобы мы могли разобрать ее здесь, но сохранение четности можно продемонстрировать на примере одного замечательного фокуса с монетами.

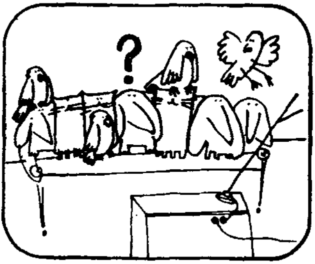
Наберите пригоршню монет и, бросив ее на стол, сосчитайте, сколько монет выпало вверх гербом. Если число гербов окажется четным, мы скажем, что гербы имеют «четную четность». Если число гербов на столе окажется нечетным, мы скажем, что гербы имеют «нечетную четность». Выбрав наугад две монеты, переверните их и повторите эту операцию сколько угодно раз (выбирая пары монет каждый раз наугад). Вы обнаружите удивительную закономерность: независимо от того, сколько пар монет перевернуто, четность гербов остается неизменной.

Если сначала она была нечетной, то она останется нечетной, а если была четной, то останется четной.

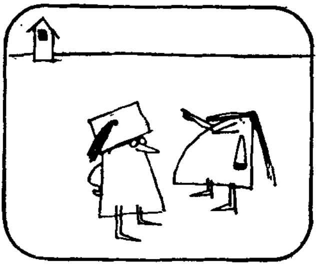
Сохранение четности гербов лежит в основе остроумного фокуса с монетами. Повернувшись спиной к столу, на котором разложены монеты, попросите кого-нибудь перевернуть наугад сколько угодно пар монет и, выбрав любую монету по своему усмотрению, накрыть ее рукой. Повернувшись лицом к столу и взглянув на монеты, вы можете безошибочно сказать, как лежит закрытая рукой монета — вверх или вниз гербом. Секрет фокуса очень прост. Прежде чем отвернуться от стола, вы пересчитываете монеты, лежащие вверх гербом, и запоминаете, какое число — четное или нечетное — получилось. Переворачивание любого числа пар монет не изменяет четности числа гербов. Поэтому повернувшись к столу, вы лишь пересчитываете заново монеты, лежащие вверх гербом, и узнаете, как лежит закрытая рукой монета — гербом вверх или вниз.

Фокус можно показывать и по-другому. Пусть ваш помощник закроет рукой не одну, а две монеты. Вы сможете безошибочно сказать, лежат ли они обе вверх гербом или «решкой», или же одна монета лежит гербом вверх, а другая — гербом вниз. Аналогичные проверки на четность лежат в основе многих хитроумных карточных фокусов.

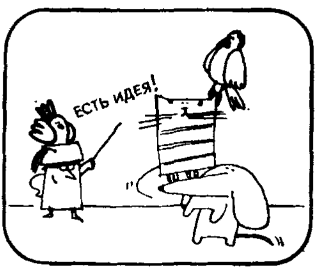
Проф. Квиббл и его домашние животные



Перед вами снова проф. Квиббл.
Проф. Квиббл. У меня есть для вас новая головоломка. Сколько у меня домашних животных, если все они, кроме двух, собаки, все они, кроме двух, кошки и все они, кроме двух, попугаи?



Ну как, решили?



У проф. Квиббла всего 3 домашних животных: собака, кошка и попугай. Все они, кроме двух, собаки, все они, кроме двух, кошки, и все они, кроме двух, попугаи.

Один за «всех» и «все» за одного

Эту задачу-головоломку, кажущуюся на первый взгляд неприступной, легко решить «в уме», если понять, что слово «все» может относиться и к одному-единственному животному. Требуемое решение мы получаем в простейшем случае, когда имеется 1 собака, 1 кошка и 1 попугай. Однако решение задачи полезно представить в алгебраическом виде.

Пусть x — число собак, y — число кошек, z — число попугаев, а n — общее число животных. Тогда условия задачи позволяют записать следующую систему из 4 уравнений:

$$n = x + 2,$$
$$n = y + 2,$$
$$n = z + 2,$$
$$n = x + y + z.$$

Решить ее можно многими стандартными способами. Из первых трех уравнений видно, что $x = y = z$. Так как $n = x + 2$ и $n = 3x$ (из последнего уравнения), то $x + 2 = 3x$, откуда $x = 1$, и мы получаем полный ответ задачи: $x = y = z = 1$.

Поскольку x, y и z в таких задачах принимают, как правило, целые положительные значения (кто станет держать у себя треть кошки или четверть попугая?), то задачу о домашних животных проф. Квибла можно отнести к так называемым диофантовым задачам. Так принято называть задачи, сводящиеся к решению алгебраических уравнений в целых числах. Иногда диофантовы уравнения не имеют решений или допускают только одно решение. Существуют также диофантовы уравнения, имеющие более одного решения и даже бесконечно много решений. Вот, например, еще одна несколько более трудная диофантова задача о трех видах домашних животных, также сводящаяся к решению системы линейных уравнений.

Корова стоит 10 долларов, свинья — 3 доллара, а овца — 50 центов. Фермер купил по крайней мере 1 корову, 1 свинью и 1 овцу, израсходовав на покупку всего 100 долларов. Сколько и каких животных он купил?

Пусть x — число коров, y — число свиней и z — число овец. Тогда условия задачи можно записать в виде двух уравнений:

$$10x + 3y + z/2 = 100,$$
$$x + y + z = 100.$$

Умножив правую и левую часть первого уравнения на 2, избавимся от двойки в знаменателе, после чего вычтем из первого уравнения второе. Тем самым мы исключим z и получим «укороченное» уравнение

$$19x+5y=100.$$

Какие целочисленные значения могут принимать x и y? Один из способов получить ответ на этот вопрос состоит в том, чтобы преобразовать уравнение, оставив в левой части только член с наименьшим коэффициентом при неизвестном: $5y=100-19x$. Разделив обе части уравнения на 5, получим $y=$ $=(100-19x)/5$. Разделим теперь 100 и $19x$ на 5, выделив заведомо целую часть и дробный остаток (если он существует):

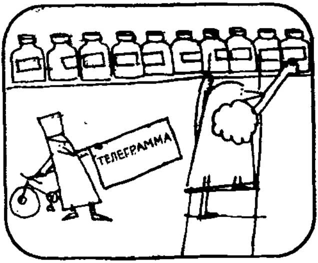
$$y=20-3x-4x/5.$$

Ясно, что выражение $4x/5$ должно принимать целочисленные значения. Следовательно, x должен быть кратен 5. Наименьшее кратное 5 равно 5, что соответствует $y=1$ и (если вернуться к любому из двух исходных уравнений) $z=94$. При остальных значениях x, кратных 5 (и бо́льших 5), y принимает отрицательные значения. Значит, наша задача допускает единственное решение: фермер купил 5 коров, 1 свинью и 94 овцы.

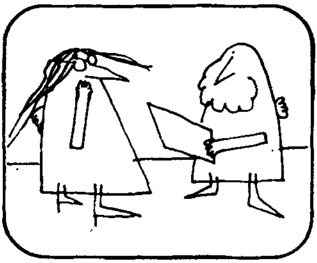
Варьируя цены на коров, свиней и овец, можно самостоятельно открыть многие премудрости элементарной теории диофантовых уравнений. Предположим, например, что коровы продаются по 4 доллара, свиньи — по 2 доллара и овцы — по $^1/_3$ доллара за голову. Сколько животных купил фермер на 100 долларов, если известно, что он купил по крайней мере 1 корову, 1 свинью и 1 овцу? Эта задача допускает 3 решения. А что можно сказать, если корова стоит 5 долларов, свинья — 2 доллара и овца — 50 центов? Оказывается, что в этом случае решения не существует.

Теория диофантовых уравнений представляет собой обширный раздел теории чисел, имеющий бесчисленные применения во многих областях науки и техники. Одна из знаменитых задач на решение диофантовых уравнений известна под названием великой (или последней) теоремы Ферма. В ней требуется найти при любых целых положительных $n > 2$ решение в целых числах уравнения $x^n + y^n = z^n$ (при $n = 2$ эти решения называются пифагоровыми тройками; существует бесконечно много пифагоровых троек, начиная с $3^2 + 4^2 = 5^2$). Великая теорема Ферма — наиболее известная из нерешенных проблем теории чисел. До сих пор никому еще не удалось ни найти хотя бы одно решение уравнения $x^n + y^n = z^n$ в целых числах (при $n > 2$), ни доказать, что такого решения не существует.

Небольшой переполох в аптеке

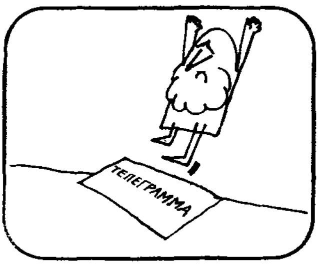


Как-то раз в аптеку доставили 10 флаконов лекарства. В каждом флаконе по 1000 пилюль. Не успел провизор мистер Уайт расставить флаконы на полке, как почтальон принес телеграмму.



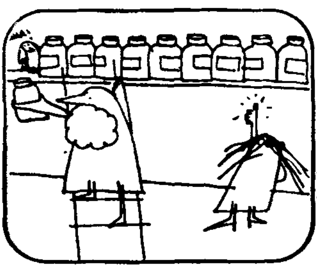
Мистер Уайт читает телеграмму управляющей аптекой мисс Блек.

Мистер Уайт. Срочно. Воздержитесь от продажи лекарства. По ошибке фармацевта в одном из флаконов каждая пилюля содержит на 10 мг лекарства больше допустимой дозы. Просьба незамедлительно вернуть флакон с повышенной дозой лекарства.



Мистер Уайт встревожился.

Мистер Уайт. Нечего сказать, повезло! Теперь мне придется брать по пилюле из каждого флакона и взвешивать. Веселенькое занятие!

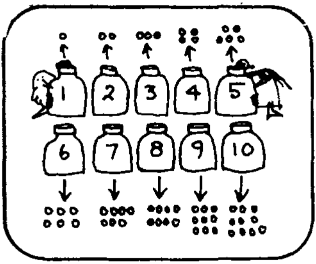


Тяжело вздохнув, мистер Уайт хотел было приступить к неожиданно свалившейся на него работе, как мисс Блек остановила его.

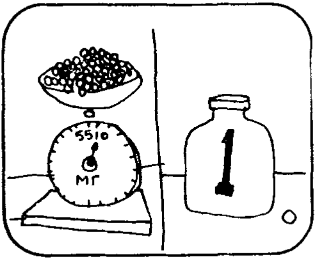
Мисс Блек. Минуточку! Взвешивать 10 раз совсем не нужно! Достаточно произвести 1 взвешивание.

Каким образом при помощи 1 взвешивания можно установить, в каком флаконе пилюли содержат повышенную дозу лекарства?

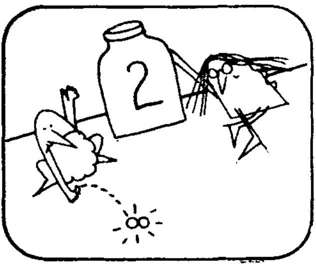
Идея мисс Блек состояла в том, чтобы взять 1 пилюлю из первого флакона, 2 пилюли из второго флакона, 3 пилюли из третьего флакоиа, ..., 10 пилюль из десятого флакоиа...



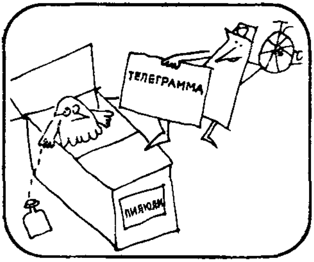
...положить 55 отобранных пилюль на одну чашу весов и взвесить их. Предположим, что пилюли весили бы 5510 мг, или на 10 мг больше, чем следует. Тогда мисс Блек заключила бы, что среди отобранных пилюль имеется 1 пилюля с повышенной дозой лекарства, а ровно 1 пилюля была извлечена из первого флакона.



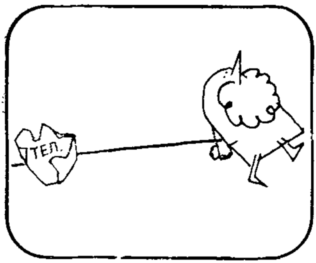
Если бы вес 55 пилюль оказался на 20 мг больше нормы, то это означало бы, что среди отобранных пилюль имеются 2 пилюли с повышенной дозой лекарства. Их можно было извлечь только из второго флакоиа. Так мисс Блек сумела поиизить число взвешиваний до 1. Меньше не бывает!



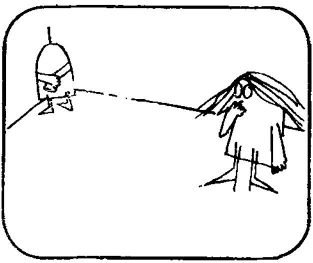
Большой переполох в аптеке



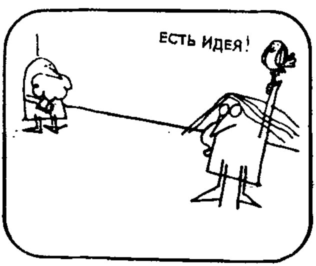
Через 6 месяцев в аптеку доставили еще 10 флаконов того же лекарства. И на этот раз не успели распаковать коробку с флаконами, как почтальон принес телеграмму с извещением о том, что иа этот раз фармацевт допустил более серьезную ошибку.



В посылке могло оказаться от 1 до 10 флаконов с пилюлями, каждая из которых на 10 мг тяжелее нормы. Мистер Уайт был вне себя от ярости.



Мистер Уайт. Что делать, мисс Блек? Ваш метод, который позволил нам так блестяще выйти из затруднения в прошлый раз, неприменим!
Мисс Блек задумалась.



Мисс Блек. Вы правы, мистер Уайт. Но если слегка модифицировать мой метод, то при помощи 1 взвешивания и на этот раз можно определить, в каких флаконах пилюли содержат повышенную дозу лекарства.
Что имела в виду мисс Блек?

Как определить непригодные пилюли?

По условиям первой задачи на взвешивание пилюль все более тяжелые пилюли находятся в одном флаконе. Взяв из различных флаконов различное число пилюль (проще всего взять из каждого флакона число пилюль, равное его номеру), мы установим взаимно-однозначное соответствие между множеством номеров и множеством флаконов.

Чтобы решить вторую задачу, необходимо воспользоваться последовательностью, которая бы сопоставляла каждому флакону отличный от других номер и обладала бы еще одним дополнительным свойством: сумма членов любой ее подпоследовательности должна быть отличной от суммы членов любой другой ее подпоследовательности. Существуют ли такие последовательности? Да, существуют. Примером может служить хотя бы геометрическая прогрессия со знаменателем 2 и первым членом 1: 1, 2, 4, 8, 16, ... Все члены этой последовательности — степени числа 2, причем показатель возрастает от 0 с единичным шагом. Именно эта последовательность лежит в основе двоичной системы счисления.

Решение задачи состоит в том, чтобы, выстроив флаконы в ряд, взять 1 пилюлю из первого флакона, 2 пилюли из второго флакона, 4 пилюли из третьего флакона и т. д., затем собрать все отобранные пилюли и взвесить. Предположим, что пилюли оказались на 270 мг тяжелее, чем нужно. Так как каждая пилюля с повышенной дозой лекарства тяжелее нормальной на 10 мг, то, разделив 270 на 10, мы получим 27 — число более тяжелых пилюль.

Запишем число 27 в двоичной системе: 11011. Двоичные разряды, в которых стоят единицы, говорят нам, какие степени числа 2 в сумме дают двоичное число 11011 (или десятичное число 27): 1, 2, 8 и 16. Единицы стоят в первом, втором, четвертом и пятом двоичных разрядах. Следовательно, непригодные пилюли с повышенным содержанием лекарства находятся в первом, втором, четвертом и пятом флаконах.

Двоичная система счисления находит столь широкое применение именно потому, что каждое положительное целое число можно представить в виде суммы степеней числа 2 единственным способом. Без двоичной системы счисления в наши дни немыслима работа ЭВМ. Немалую роль двоичная система играет во многих областях прикладной математики. Почетное место отведено двоичной системе и в занимательной математике.

Вот простой карточный фокус, который позволит вам удивить и позабавить ваших друзей. Хотя внешне он ничем не напоминает задачу об отыскании флаконов с непригодными пилюлями, и задача, и фокус по существу «двоичны» — в основе их лежит двоичная система счисления.

Пусть кто-нибудь из зрителей тщательно перетасует колоду карт. Положив ее в карман, попросите вашего помощника назвать любое число от 1 до 15, после чего, сунув руку в карман, достаньте карты, значения которых в сумме равны названному числу (туз считается равным 1).

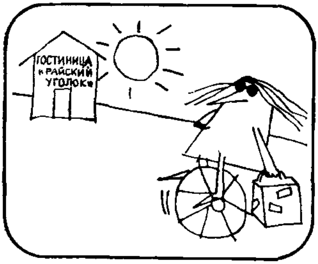
Секрет фокуса прост. Вы заранее кладете в карман туз, двойку, четверку и восьмерку. Определить на глаз недостачу четырех карт в колоде невозможно, и ваши зрители будут пребывать в уверенности, что вы попросили перетасовать полную колоду. Перетасованную колоду вы подкладываете под четыре карты, уже лежащие в кармане. После того как число названо, вы мысленно представляете его в виде суммы степеней числа 2 (например, если названо число 10, то вы мысленно разлагаете его в сумму $8+2=10$) и, сунув руку в карман, достаете двойку и восьмерку.

На том же двоичном принципе построены и карточки «для чтения мыслей на расстоянии». На рис. *1* из гл. 3 показаны 6 карт, позволяющие безошибочно отгадывать любое задуманное число от 1 до 63. Попросите кого-нибудь, задумав любое число в этом диапазоне (например, свой возраст), отобрать и вручить вам все карточки, на которых оно встречается, и вы немедленно назовете задуманное число. Секрет этого фокуса также прост: вы просто суммируете степени числа 2, стоящие в левом верхнем углу каждой таблицы. Например, если были отобраны и вручены вам таблицы C и F, то вы суммируете числа 4 и 32 и узнаете, что было задумано число 36.

По какому принципу выбраны числа на каждой карточке? Каждое число, имеющее в двоичной записи единицу в первом разряде справа, заносится в таблицу A. Следовательно, в эту таблицу вписаны все нечетные числа от 1 до 63. В карточку B заносятся все числа, имеющие в двоичной записи единицу во втором разряде справа, в карточку C — все числа, имеющие единицу в третьем разряде справа и т. д. Заметим, что число 63 в двоичной системе записывается как 111111, то есть имеет единицы во всех шести разрядах, и поэтому встречается на всех шести карточках.

Иногда фокусники придают этому фокусу налет таинственности, окрашивая карточки в различные цвета и запоминая, какой цвет соответствует той или иной степени числа 2. Пусть, например, красная карточка означает 1, оранжевая — 2, желтая — 4, зеленая — 8, голубая — 16 и фиолетовая — 32 (мы выбрали 6 цветов радуги по порядку, пропустив синий). Фокусник становится в дальнем конце комнаты и просит кого-нибудь из зрителей отложить в сторону карточки, на которых встречается задуманное число. По цвету отложенных карточек фокусник без промедления может назвать задуманное число.

Распиленный браслет

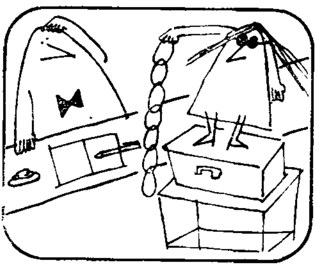


Однажды юная Глория из Арканзаса отправилась в Калифорнию. Ей необходимо было снять на неделю номер в гостинице.

Портье в гостинице встретил ее весьма нелюбезно.

Портье. Могу предложить только номер за 20 долларов в сутки. Плата наличными.

Глория. Простите, сэр, у меня нет при себе денег. Есть только этот золотой браслет. Каждое из его 7 звеньев стоит дороже 20 долларов.

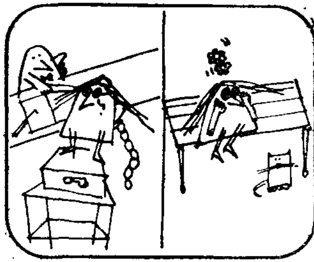


Портье. Так и быть, давайте сюда ваш браслет.

Глория. Не торопитесь. Я попрошу какого-нибудь ювелира распилить браслет и буду отдавать вам по 1 звену в день, а к концу недели, когда мне пришлют из дому деньги, отдам браслет в починку.

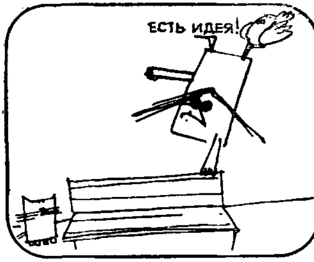
После долгих споров, портье согласился. Но перед Глорией встала задача: как распилить браслет?

Глория. Торопиться не следует. Ведь ювелир потребует с меня плату за каждое распиленное и вновь запаянное звено браслета.



Поразмыслив, Глория поняла, что ей вовсе не нужно распиливать все звенья, поскольку отдельные части браслета можно комбинировать так, чтобы число оставшихся у портье звеньев каждый раз соответствовало плате за номер.

Сколько звеньев вы бы приказали распилить на месте Глории?



Достаточно распилить лишь одно-единственное звено: третье с любого конца цепи. Браслет распадется на 3 части длиной в 1 звено, 2 звена и 4 звена. Отдавая их в необходимой комбинации портье и получая предыдущие, Глория сможет оставлять у портье каждый день на 1 звено больше, чем накануне.

Решающее звено

Чтобы решить эту задачу, необходимо принять во внимание два соображения. Во-первых, понять, что наименьший набор отрезков золотой цепочки, позволяющий оставить у портье любое число звеньев от 1 до 7, состоит из 3 отрезков длиной в 1, 2 и 4 звена. Как мы уже знаем из решения предыдущей задачи, эти числа — не что иное, как последовательные степени числа 2, положенные в основу двоичной системы счисления.

Во-вторых, необходимо понять, что разделить браслет на части длиной в 1, 2 и 4 звена можно распилив *одно-единственное* звено.

Задача допускает обобщение на случай, когда браслет или цепочка состоят более чем из 7 звеньев. Например, пусть у Глории имеется с собой золотая цепочка из 67 звеньев, которую необходимо распилить с той же целью, что и злосчастный браслет,— для уплаты за проживание в гостиничном номере от 1 до 67 суток по 1 звену за сутки. Оказывается, что в этом случае достаточно распилить лишь 3 звена. Вы знаете, какие именно? Может быть, вы можете предложить общий метод решения задачи, позволяющий распиливать минимальное число звеньев цепи произвольной длины?

Интересный вариант этой задачи возникает в том случае, если первоначально концы n-звенной цепочки соединены так, что цепочка превратилась в замкнутую петлю. Например, предположим, что у Глории есть золотая цепочка из 79 звеньев. Сколько звеньев необходимо распилить, чтобы Глория могла оплатить от 1 до 79 суток пребывания в гостинице из расчета по 1 звену за сутки?

Глава 2

Геометрические находки

НЕОЖИДАННЫЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ О ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ТЕЛАХ И ФИГУРАХ

Геометрия занимается изучением свойств тел и фигур, хотя такое определение настолько широко, что почти лишено смысла. Так, оно позволяет считать геометром члена жюри любого конкурса красоты, поскольку тот судит о «свойствах тел и фигур», хотя под телами и фигурами он понимает нечто иное, чем геометр. Когда о какой-нибудь линии кто-либо замечает, что она необычайно изящна или выразительна, то, хоть речь идет о кривой, то есть объекте, действительно изучаемом в геометрии, само высказывание относится скорее к области эстетики, чем к математике.

Попробуем уточнить, что такое геометрия, и определим ее с помощью такого понятия, как симметрия. Под симметрией принято понимать такое преобразование фигуры, которое оставляет фигуру неизменной. Например, буква Н симметрична относительно поворота на 180°. Это означает, что если букву Н повернуть на 180° (поставить «вверх ногами»), то она перейдет в фигуру, неотличимую от буквы Н в исходном положении (разумеется, при условии, если перекладина в букве Н находится строго посредине). Слово «АНА», стоящее на обложке этой книги, обладает зеркальной, или двусторонней симметрией: если приставить к нему справа или слева зеркало, то зеркальное отражение слова будет неотличимо от оригинала.

Любой раздел геометрии можно определить как науку о свойствах фигур, не изменяющихся при определенных преобразованиях симметрии. Например, евклидова геометрия на плоскости занимается изучением свойств, остающихся неизменными (инвариантных) при движении фигуры по плоскости, поворотах, зеркальных отражениях и равномерных сжатиях и растяжениях. Аффинная геометрия занимается изучением свойств, инвариантных относительно «перекашивания» фигуры. Проективная геометрия изучает свойства, инвариантные относительно проецирования. Топология имеет дело со свойствами, которые сохраняются неизменными, когда фигура претерпевает сколь угодно сильные искажения без разрывов и склеиваний, аналогичные деформациям фигуры, изготовленной из гибкого, растяжимого и прочного материала.

Хотя геометрические мотивы встречаются во всех главах нашей книги, в этой главе мы собрали задачи, в которых геометрический аспект имеет явное преимущество перед всеми остальными. При отборе предпочтение отдавалось таким задачам, которые при надлежащем подходе (и «везении») допускают простые и ясные решения. Первая же задача — о разрезании сыра — отчетливо показывает, как тесно переплетаются даже в простейших задачах «сферы влияния» самых различных разделов математики: ее можно рассматривать как задачу по планиметрии, стереометрии, комбинаторике, теории чисел. В этой же задаче нетрудно усмотреть и зачатки исчисления конечных разностей.

«Пасутся кони на другом поле», как ни странно,— топологическая задача. Метод нитей и пуговиц позволяет свести ее к задаче о точках на простой замкнутой кривой. Форма замкнутой кривой для решения задачи не имеет ни малейшего значения — важны лишь топологические свойства кривой. Мы приводим решение задачи для случая, когда точки расположены на окружности, но с тем же успехом мы могли взять кривую, образующую периметр квадрата или треугольника.

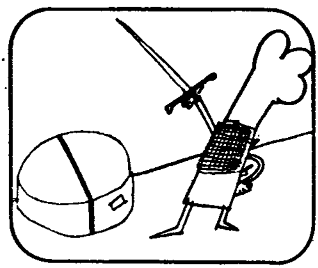
Следующие две задачи («Невиданный меч» и «Пари на полюсе») снова выводят нас из плоскости в евклидову геометрию трехмерного пространства. При взгляде на маршруты полетов невольно вспоминается другая знаменитая задача о путях — задача о четырех черепахах. На ее примере мы видим, что иногда простые идеи позволяют избежать применения несравненно более сложных методов математического анализа. Задача об искусном землемере Рэнсоме возвращает нас на плоскость и знакомит с такими главами евклидовой геометрии, как теория разрезаний и разбиений. Задачи на разбиение земельных участков относятся к так называемой комбинаторной геометрии плоскости. Задача мисс Евклид о разрезании куба принадлежит к комбинаторной геометрии пространства.

Задача о ковровом покрытии для кольцевого коридора и ее трехмерный аналог — задача о просверленной насквозь сфере — могут служить прекрасными примерами того, как некая величина, которая, казалось бы, должна изменяться в зависимости от значений других параметров, в действительности принимает лишь одно значение. Кто мог бы ожидать, что при просверливании в сфере сквозного цилиндрического канала заданной длины объем оставшейся части сферы при постоянной длине канала не зависит ни от радиуса сферы, ни от диаметра канала? Впервые столкнувшись с теоремой о таком удивительном постоянстве, математик выразит свое изумление и почти заведомо скажет: «Красивый результат!»

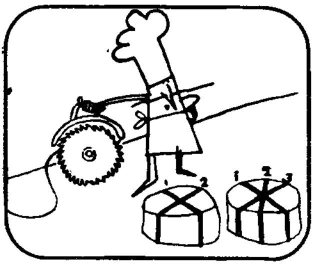
Что именно имеют в виду математики, называя теорему или формулу красивой, точно не известно. Красота в их понимании каким-то образом связана с неожиданной простотой, но сколь ни трудно объяснить, в чем состоит эстетическая привлекательность математического утверждения, все математики умеют отличать красивую теорему или изящное доказательство с такой же легкостью, с какой мы отличаем красавицу от дурнушки. Геометрия, изучающая объекты, доступные не только мысленному взору, но и непосредственному созерцанию, необычайно богата красивыми теоремами и доказательствами. Некоторые из них вы встретите в этой главе.

Как разделить головку сыра

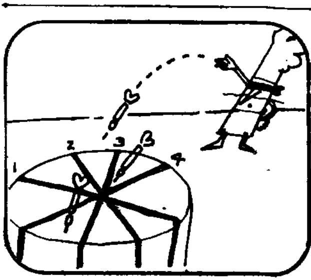
Кухня в ресторане «У Джо» оставляет желать лучшего, зато выбор сыров у Джо отменный.



Цилиндрическая головка сыра таит в себе немало интересных задач на разрезание. Проведя лишь 1 прямолинейный разрез, ее нетрудно разделить на 2 одинаковые части.



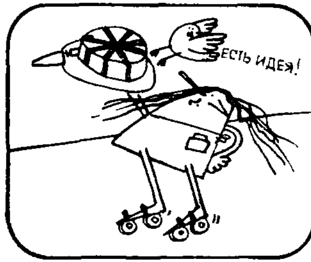
Два прямолинейных разреза позволяют разделить головку сыра на 4 одинаковые части, а 3 прямолинейных разреза — на 6 равных частей.



Однажды официантка Рози попросила Джо разрезать сыр на 8 одинаковых частей.

Джо. Хорошо, Рози. Сделать это совсем нетрудно. Я разделю сыр на 8 одинаковых частей четырьмя прямолинейными разрезами.

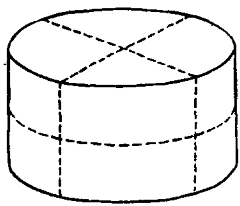
Подавая сыр иа стол, Рози вдруг поияла, что Джо мог действовать и более экоиомио: чтобы разделить головку на 8 одинаковых частей, достаточно провести лишь 3 прямолинейных разреза.
Как это сделать?



Три разреза?

Рози пришло в голову, что цилиндрическая головка сыра представляет собой не плоскую фигуру, а тело, которое можно разрезать по горизонтальной плоскости, проходящей через его центр. На рис. *1*

1



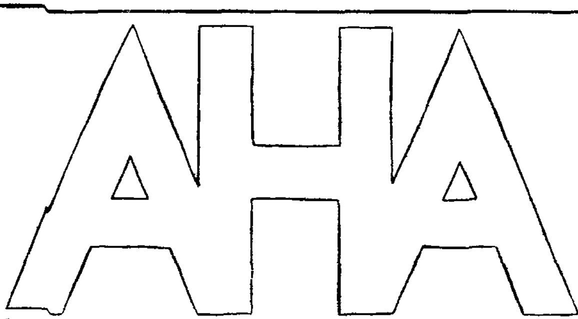
показано, как тремя разрезами разделить сыр на 8 одинаковых порций. В этом решении предполагается, что все три разреза проведены одновременно. Если же разрезы проводить последовательно, один за другим, и перед каждым разрезом переставлять куски сыра наиболее удобным образом, то тремя разрезами сыр можно разрезать по-другому (так, как он разрезан на подносе в руках Рози): для этого один из двух кусков, получившихся после первого разреза, нужно поставить на другой, провести еще один разрез, взять одну из «двухэтажных» половин, поставить на другую и провести третий разрез. После третьего разреза головка сыра окажется разделенной на 8 одинаковых порций.

Решение Рози столь просто, что кажется почти травиальным, и тем не менее оно может служить хорошим введением в серию важных задач на разрезание, теория которых связана с исчислением конечных разностей, а многие доказательства проводятся методом математической индукции. Конечные разности служат мощным средством получения формул общих членов числовых последовательностей. Интерес к числовым последовательностям неуклонно возрастает, что объясняется по крайней мере двумя причинами: во-первых, тем, что числовые последовательности встречаются во многих числовых задачах, и, во-вторых, быстротой, с которой ЭВМ позволяют производить над числовыми последовательностями любые действия.

Изобретенный Рози первый метод разрезания сыра (без перекладывания кусков) состоит в проведении прямолинейных или, лучше сказать, плоских разрезов, проходящих через центр верхнего основания головки сыра, плоского, как у круглого пирога. Выясним, какие числовые последовательности может порождать разрезание верхней поверхности сыра прямыми, пересекающимися в центре (ясно, что n одновременно проведенных разрезов позволяют разделить сыр не более чем на $2n$ кусков).

Можно ли считать, что $2n$ — максимальное число частей, на которые n прямых, проходящих через одну точку, могут разделить любую плоскую фигуру, ограниченную простой замкнутой кривой? Нет: нетрудно построить невыпуклую фигуру (например, такую, как на рис. 2), которую одной прямой можно разделить на значительно большее число частей. А можно ли

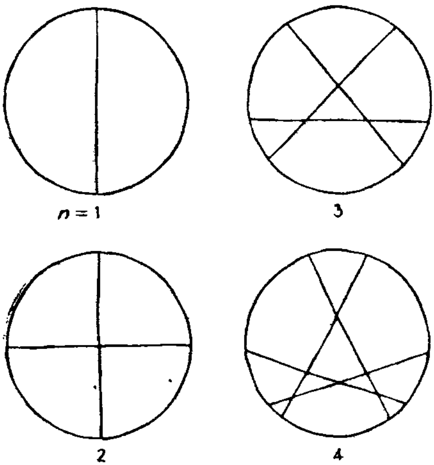
2



построить фигуру, которую одной прямой можно было бы разделить на любое конечное число *конгруэнтных* частей? Если да, то какими свойствами должен обладать периметр фигуры, чтобы одной прямой от нее можно было отсечь n конгруэнтных частей?

Задача о разрезании пирога или сыра становится еще более интересной, когда линии разреза не пересекаются в одной точке. Нетрудно видеть, что начиная с $n=3$ при таком способе разрезания исходный круг будет распадаться более чем на $2n$ частей (пока нас не интересует, будут ли эти части конгруэнтными или равновеликими). На рис. *3* показано, каким

3



образом достигается максимальное число частей при числе разрезов n, равном 1, 2, 3 и 4 (круг делится соответственно на 2, 4, 7 и 11 частей).

Числа 2, 4, 7 и 11 образуют отрезок известной последовательности с общим членом, задаваемым формулой

$$\frac{n(n-1)}{2}+1,$$

где n — число разрезов. Полагая $n=0$, 1, 2, ..., 9, получаем первые десять членов последовательности:

1, 2, 4, 7, 11, 16, 22, 29, 37, 46, ... Первые разности равны 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, ..., вторые разности равны 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, ... Постоянство вторых разностей основательно подкрепляет нашу догадку о том, что общий член этой последовательности квадратичен по n.

Мы говорим о догадке потому, что формула, получаемая при помощи конечных разностей, может оказаться «ограниченно применимой» — порождать лишь часть членов бесконечной последовательности. Применимость формулы «конечно-разностного происхождения» ко всем без исключения членам числовой последовательности каждый раз необходимо доказывать особо. В случае круглого пирога такое доказательство действительно существует. Его нетрудно найти, если воспользоваться методом математической индукции.

После этих замечаний, носящих сугубо предварительный характер, вы достаточно вооружены, чтобы смело вступить на неизведанную территорию и проложить по ней десятки увлекательных маршрутов в самых разных направлениях, многие из которых приводят к необычным числовым последовательностям, формулам и доказательствам методом математической индукции. Определить максимальное число частей, на которые можно разделить:

1) подковообразный пирог n прямыми;

2) головку сыра в форме шара или цилиндра n плоскими разрезами;

3) пирог n круговыми разрезами, проводимыми специальным ножом;

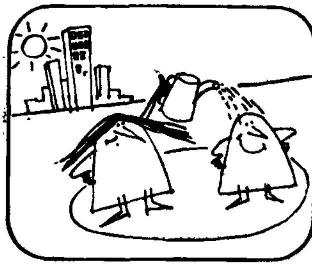
4) пирог, испеченный в форме кольца (с круглым отверстием посредине) n прямыми;

5) бублик (тор) n плоскими разрезами.

Во всех этих задачах предполагается, что разрезы проводятся одновременно. Как изменятся ответы, если будет разрешено проводить разрезы последовательно и после каждого разреза перекладывать образовавшиеся куски?

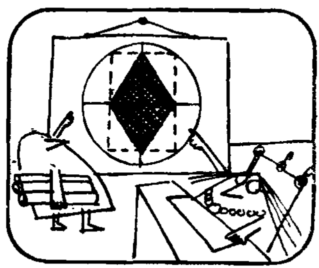
Невидимые размеры

В центре городского парка находится круглая площадка для игр. Магистрат вознамерился устроить на этой площадке бассейн в форме ромба.



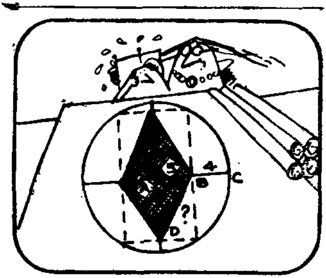
Мэр города Дорис Райт, рассмотрев представленные архитектором проекты, высказала свое мнение.

Мэр Райт. Мне нравится вот этот проект бассейна, облицованного красным кафелем. Какова длина каждой стороны ромба?



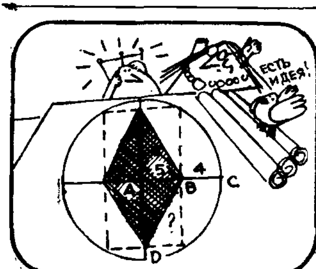
Вопрос мэра поставил в тупик архитектора Фрэнка Лойда Ронга.

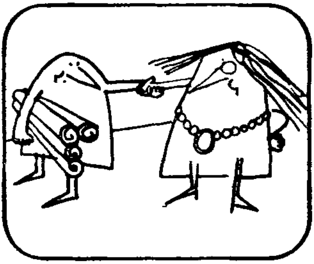
Мистер Ронг. Сейчас прикину. Расстояние от *A* до *B* равно 5 м, а расстояние от *B* до *C* — 4 м. По этим данным можно найти длину стороны *BD*, например вычислить ее по теореме Пифагора.



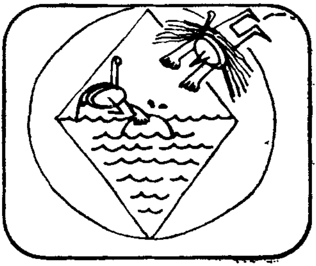
Мистер Ронг приступил было к вычислениям, как вдруг достопочтенную миссис Райт осенило.

Мэр Райт. Есть идея! Длина стороны бассейна — ровно 9 м. Тут и считать нечего.





Мистер Ронг. Вы абсолютно правы!



Что позволило мэру и архитектору с такой легкостью найти длину стороны бассейна?

Диагональ и радиус

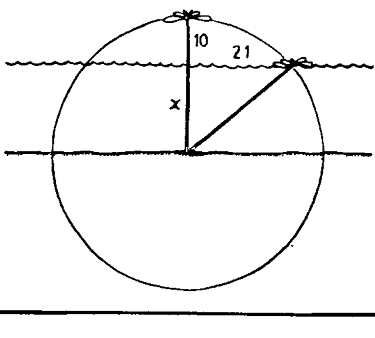
Миссис Райт заметила, что каждая сторона бассейна совпадает с диагональю некоего прямоугольника, другая диагональ которого равна радиусу круглой площадки для игр. Диагонали прямоугольника равны. Следовательно, длина стороны бассейна равна радиусу круглой площадки для игр. А поскольку этот радиус составляет $5 + 4 = 9$ м, то и длина каждой стороны бассейна равна 9 м. Теорема Пифагора не понадобилась.

Вы сможете лучше оценить все остроумие догадки миссис Райт, если попытаетесь вычислить длину стороны бассейна более традиционным способом. Если вы захотите воспользоваться только теоремой Пифагора и подобием треугольников, то решение получится чрезмерно громоздким. Известная из планиметрии теорема о пересекающихся хордах, гласящая, что произведение длин отрезков, на которые точка пересечения делит хорды, одинаково для всех хорд, пересекающихся в данной точке, позволяет несколько сократить решение. Применяя эту теорему, вы вычислите высоту прямоугольного треугольника (составляющего четверть бассейна), равную $\sqrt{56}$. Затем по теореме Пифагора, зная два катета, вы найдете гипотенузу, равную 9 м.

С задачей о бассейне, так изящно решенной миссис Райт, тесно связана знаменитая задача о водяной лилии, встречающаяся в одном из произведений Лонгфелло. Когда стебель лилии стоит вертикально, цветок ее на 10 см возвышается над поверхностью озера. Если лилию оттянуть в сторону, не давая стеблю провиснуть, то цветок ее коснется воды в точке, отстоящей на 21 см от того места, в котором выходил из воды прямостоящий стебель. Какова глубина озера в том месте, где растет лилия?

Задачу Лонгфелло нетрудно решить, если начертить схему, изображенную на рис. 4. По существу эта схема ничем не отличается от проекта бассейна, представленного архитектором Ронгом. Требуется определить длину отрезка x. Как и задачу о длине стороны

4



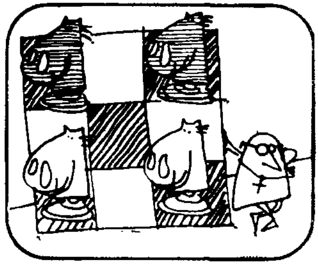
бассейна, задачу о лилии можно решить разными способами. Но если воспользоваться теоремой о пересекающихся хордах, то ответ получается особенно легко и быстро.

А вот еще одна замечательная задача о бассейне, трудная с виду, но легко решаемая, если сообщить, в чем ее изюминка. Дельфин находится у западного края круглого бассейна в точке A, проплывает по прямой 12 м и упирается «носом» в край бассейна в точке B. Повернувшись, он проплывает по прямой в другом направлении 5 м и снова касается края бассейна в точке C, диаметрально противоположной точке A. Какое расстояние пришлось бы преодолеть дельфину, если бы он из точки A поплыл прямо в точку C?

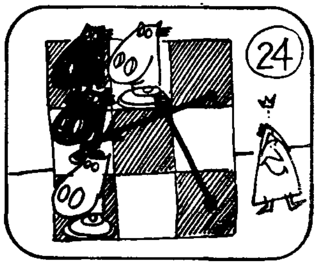
Задача о дельфине решается легко и просто, если воспользоваться теоремой о том, что любой вписанный угол, опирающийся на диаметр окружности,— прямой, и заметить, что угол ABC именно такой угол. Катеты прямоугольного треугольника ABC равны 5 м и 12 м. Следовательно, гипотенуза равна 13 м. Мораль всех этих задач ясна: во многих случаях геометрическую задачу можно решить до смешного просто, если вовремя вспомнить соответствующую теорему евклидовой геометрии.

Пасутся кони на другом поле

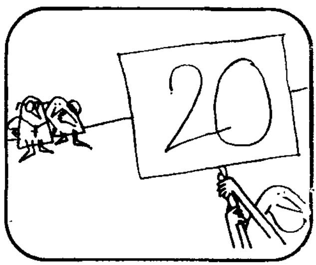
На заседании шахматного клуба мистер Бишоп предложил следующую задачу.
Мистер Бишоп. Как поменять позиции черных и белых коней за наименьшее число ходов?



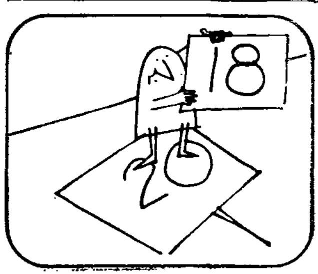
Один из членов клуба сделал 2 первых хода так, как показано на диаграмме. Переставить белых коней в верхние углы доски, а черных — в нижние он сумел за 24 хода.

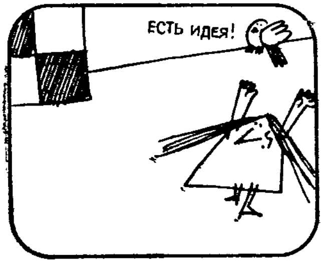


Другому члену клуба удалось решить задачу мистера Бишопа за 20 ходов.

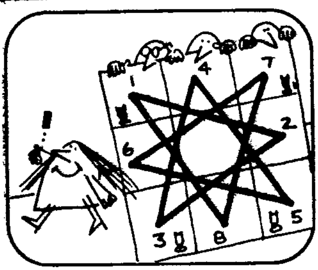


Но никому не удавалось решить задачу менее чем за 18 ходов, пока не появилась Фанни Фиш.

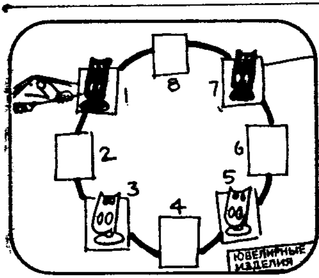




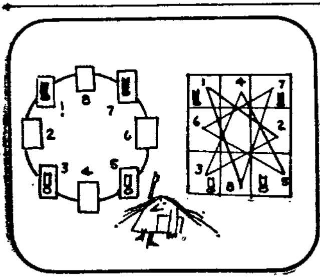
Мисс Фиш. Есть идея! Я знаю, как решить задачу за 16 ходов, и могу доказать, что ее нельзя решить за меньшее число ходов.



Прежде чем приступить к объяснению, Фанни начертила диаграмму, на которой отрезками прямых изображены возможные ходы каждого коня.

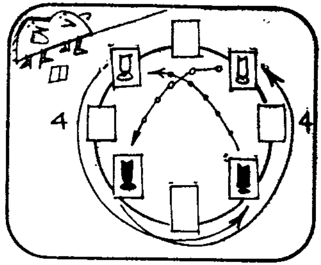


Мисс Фиш. Представьте себе, что отрезки прямых — это нити, а восемь клеток нанизаны на них, как бусины, и их можно расположить по окружности.

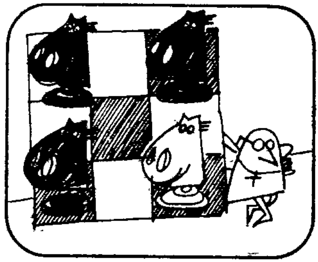


Мисс Фиш. Каждый ход на доске соответствует вполне определенному ходу на окружности. Чтобы поменять позиции коней, их необходимо переместить по окружности, двигая в одном направлении.

Мистер Бишоп. Вы совершенно правы, Фанни. Чтобы перейти на новую позицию, каждый из 4 коней должен совершить по 4 хода. Таким образом, задачу можно решить за 16 ходов, а более экономного решения не существует.



Фанни заменила одного из белых коней красным и задала членам шахматного клуба новую задачку: как поменять местами белого и красного коня за наименьшее число ходов?
Как, по-вашему, почему Фанни улыбалась, предлагая эту задачку?



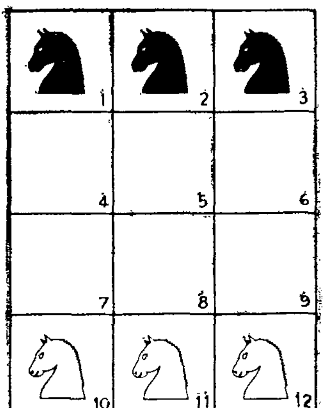
Шахматные кони и звездчатые фигуры

Фанни решила шахматную задачу, сведя ее к изоморфной задаче, допускавшей простое (хотя и далеко не тривиальное!) решение. Поставленную Фанни задачу можно решить тем же методом. Соединив нитями клетки, занятые конями, и развернув получившееся «ожерелье» в окружность, мы увидим, что кони нанизаны на нити в следующем порядке: черный, черный, красный, белый. Фанни улыбалась, так как понимала, что переставить красного и белого коней невозможно: они следуют друг за другом в неизменном порядке, потому что ни один конь не может перепрыгнуть через другого коня, если они оба движутся по кругу (в любом направлении) и обгон запрещен. Понятно ли вам почему?

При движении по окружности по часовой стрелке белый конь всегда следует непосредственно за красным. Если бы белый и красный кони могли поменяться полями, которые они занимали на доске с самого начала, то порядок следования был бы изменен на обратный и красный конь двигался бы по кругу непосредственно за белым. Ясно, что такое перестроение невозможно. Действительно, оно означало бы, что один из коней (либо белый, либо красный) перепрыгнул через двух черных коней. Сведя минишахматную задачу к топологической задаче о расположении четырех точек на простой замкнутой кривой, мы получили возможность весьма просто доказать, что решения исходной задачи не существует. Получить доказательство «несуществования» другим способом было бы чрезвычайно трудно. Попробуйте, и вы убедитесь в этом сами.

Вам понравилась задача о перестановке шахматных коней? Вот еще одна такая задача, по трудности даже превосходящая обе предыдущие. Рассмотрим позицию на шахматной доске 3×4, изображенную на рис. *5*. Как и прежде, трех черных и трех белых коней требуется поменять местами так, чтобы белые

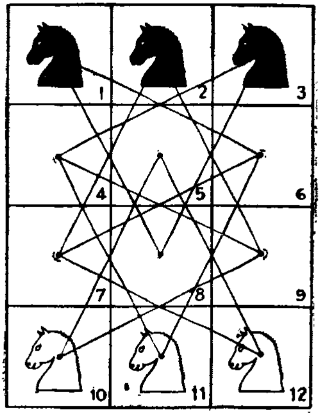
5



кони оказались на верхней горизонтали, а черные заняли нижнюю горизонталь, причем выполнить перестановку за наименьшее число ходов.

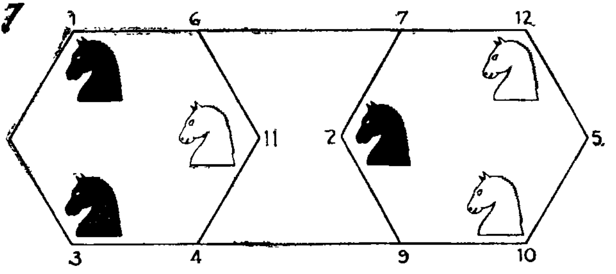
В этом случае, как видно на рис. *6*, изоморфный граф более сложен. Этот граф представляет собой диаграмму, на которой показаны все возможные ходы коней, Предположив, что вершины нашего гра-

6



фа — пуговицы или бусины, а ребра — нити, мы обнаружим, что развернуть его в окружность, как в предыдущей задаче, невозможно, но наш граф из нитей и пуговиц нам удастся уложить так, как показано на рис. *7*. Числа на этом рисунке соответствуют номерам клеток на рис. *4* и *5*.

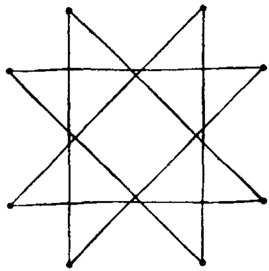
7



Ясно, что задача о перестановке шахматных коней на этом графе изоморфна исходной задаче, но решается несравненно легче. Удастся ли вам найти минимальное решение в 18 ходов?

Метод нитей и пуговиц позволяет проанализировать одну старинную игру. Для нее нам понадобится особая «доска» — звездчатый граф, изображенный на рис. 8, и семь монет или небольших фишек.

8



Игра состоит в следующем. Положив монету на любую вершину графа, вы можете сдвинуть ее вдоль черной ломаной линии (ребер графа) в любую другую вершину. После того как ход закончен, прикасаться к монете и перемещать ее в другую вершину запрещается.

Затем вы кладете вторую монету на любую незанятую вершину графа и передвигаете ее вдоль ребер в любую другую незанятую вершину. Так вы продолжаете действовать до тех пор, пока все семь монет не займут свое место на вершинах графа.

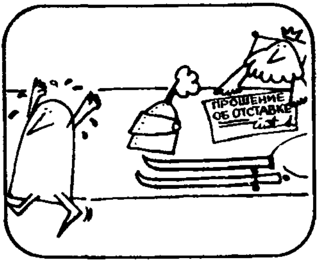
Очень скоро вы обнаружите, что расставить все семь монет удается, если действовать по тщательно продуманному плану: малейшая небрежность приводит к позиции, не позволяющей достичь в игре успеха. Не могли бы вы указать, каких правил следует придерживаться при расстановке и перемещении монет, чтобы вам неизменно сопутствовал успех?

Звездчатый граф можно полностью «раскрыть» подобно графам в двух первых задачах о перестановке шахматных коней, его удается развернуть в окружность. После того как это сделано, семь монет нетрудно расположить на окружности и проанализировать, как они могут двигаться. Справиться с этой задачей можно многими способами. Одна из наиболее простых выигрышных стратегий состоит в том, чтобы делать любой ход первой монетой, а все следующие монеты ставить и передвигать всегда так, чтобы по окончании хода они заняли вершину, которую занимала в исходном положении предыдущая монета.

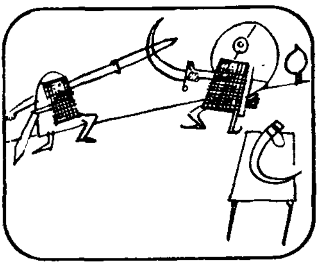
Предложите сыграть в эту игру своим друзьям. Лишь очень немногие из них смогут расставить все семь монет, даже если вы один раз быстро продемонстрируете им, как следует играть.

Невиданный меч

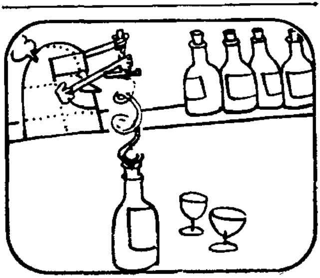
Присмотритесь повнимательнее к этой картинке. Что художник нарисовал неправильно?



Взгляните на меч в руке рыцаря: его невозможно вложить в ножны.



Эти два меча (если только они не имеют утолщений) можно вложить в ножны соответствующей формы. Можете ли вы придумать еще какую-нибудь форму для меча и парных ему ножен?



Вам пришла в голову мысль перейти от плоских кривых к пространственным? Оказывается, помимо двух традиционных форм мечей, вкладывающихся в ножны, тем же свойством обладают только мечи, выкованные в форме винтовой линии.

Незаменимая кривая

Винтовая линия играет важную роль в современной науке, особенно в биологии и физике элементарных частиц. Молекулы ДНК имеют форму винтовой линии. В отличие от своих одно- и двумерных двоюродных сестер — прямых и окружностей — винтовая линия обладает «закрученностью», то есть может быть правой и левой. Прямая и окружность неотличимы от своих зеркальных отражений, но отличить винтовую линию от ее зеркального отражения не составляет ни малейшего труда. В зеркале винтовая линия, по выражению Алисы из Зазеркалья (Льюис Кэрролл), «идет наоборот».

Существует множество примеров винтовых линий в природе и в повседневной жизни. Винтовая линия по традиции считается правой, если она закручивается по часовой стрелке по мере удаления от вас. Винты, болты и гайки, как правило, имеют правую нарезку. Винтовые лестницы, стебли сахарного тростника, пружины, волокна в канатах и кабелях и стружки могут закручиваться как вправо, так и влево.

К числу примеров встречающихся в природе винтовых линий относятся рога многих животных, раковины морских моллюсков, гигантский зуб нарвала, ушная раковина человека, пуповина. В мире растений винтовая линия встречается в строении стеблей, побегов, усиков, семян, цветов, шишек, листьев и т. д. Взбираясь на вершину дерева или спускаясь с нее, белка описывает винтовую линию. Вылетая из пещеры, летучие мыши также движутся по винтовым линиям. Винтовые линии, навитые на конус, можно без труда обнаружить в таких атмосферных явлениях, как вихри или смерчи. Вода, стекая в раковине, также закручивается в воронку, сотканную из винтовых линий. Много других примеров винтовых линий вы найдете в книге М. Гарднера «Этот правый, левый мир» *.

Правильная винтовая линия — это кривая, навитая на круговой цилиндр под постоянным углом к

* Гарднер М. Этот правый, левый мир. — М.: Мир, 1967.

образующим (напомним, что образующими называются прямые на поверхности цилиндра, параллельные его оси). Пусть ϑ — угол, под которым винтовая линия пересекает образующие цилиндра. При $\vartheta = 0^\circ$ винтовая линия, как нетрудно видеть, вырождается в прямую, а при $\vartheta = 90^\circ$ — в окружность. Аналитически в этом можно удостовериться, если записать параметрические уравнения винтовой линии и проварьировать входящий в них угол ϑ от 0° до 90°. И прямая, и окружность — предельные формы более общей пространственной кривой, получившей название винтовой линии. Правильная винтовая линия — единственная пространственная кривая постоянной кривизны. Этим и объясняется, почему мечи, вкладывающиеся в ножны, можно изготовить только в форме правильной винтовой линии (что выглядело бы несколько необычно) и двух ее предельных случаев — прямой и окружности.

Проекция винтовой линии на плоскость, перпендикулярную ее оси, имеет форму окружности. Спроецировав винтовую линию на плоскость, параллельную оси, мы получим синусоиду. В этом нетрудно убедиться, если снова воспользоваться параметрическими уравнениями кривой. Многие свойства синусоиды можно изучать по ее близкой родственнице — винтовой линии.

В этой связи мы хотим рассказать одну забавную историю-задачу, допускающую (при надлежащем подходе) очень простое решение. Внутри цилиндрической башни высотой 100 м ходит лифт. Снаружи башни имеется винтовая лестница, образующая с вертикалью постоянный угол $\vartheta = 60^\circ$. Диаметр башни 13 м.

Однажды мистер и миссис Пицца поднялись на лифте на смотровую площадку, расположенную на вершине башни. Их сын Томато Пицца предпочел идти наверх пешком. Когда он добрался до смотровой площадки, вид у него был не блестящий.

— Не мудрено, что ты устал, сынок,— заметил мистер Пицца.— Ведь тебе пришлось проделать вчетверо больший путь, чем нам, и все пешком.

— Ты ошибаешься, папа,— ответил Том.— Я прошел лишь *вдвое* больший путь, чем вы проехали.

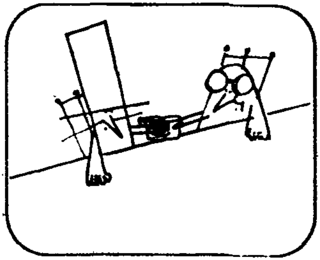
Кто прав: Том или его отец?

Кое-кто склонен думать, будто для того, чтобы вычислить длину винтовой лестницы, необходимо знать диаметр башни. В действительности информация о диаметре башни совершенно лишняя!

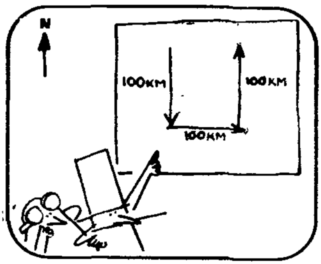
Дело в том, что винтовую лестницу можно развернуть в гипотенузу прямоугольного треугольника с острым углом 30° и высотой 100 м, а гипотенуза такого треугольника вдвое больше высоты (катета, лежащего против угла 30°). Следовательно, прав был Том.

Убедиться в этом вы можете, развернув какую-нибудь картонную трубку. Возможно, исход эксперимента несколько удивит вас: вы увидите, что длина шва (винтовой линии, как бы навитой на трубку) не зависит от диаметра цилиндра, в который скручен прямоугольный треугольник.

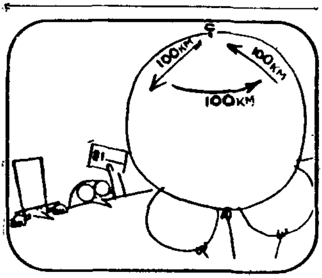
Пари на полюсе



Знаменитый игрок Дэи, по прозвищу Ставлю Доллар, сидел в баре со своим другом Диком, по профессии пилотом.

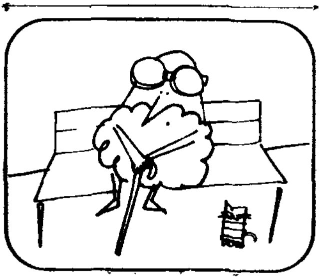


Дэн. Дик, ставлю доллар, что ты не сможешь решить простой задачки. Самолет пролетает 100 км, держа курс на юг, затем 100 км на восток и 100 км на север, после чего оказывается в исходной точке Откуда он вылетел?



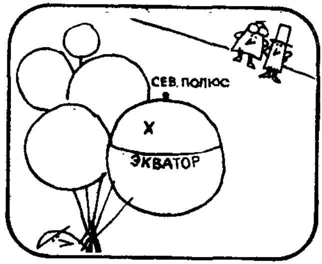
Дик. Принимаю пари, Дэн. Задачка твоя давно известна. Самолет вылетел с Северного полюса.

Дэн. Правильно. Держи доллар. Ставлю еще доллар, что ты ни за что не догадаешься, откуда еще мог вылететь самолет.

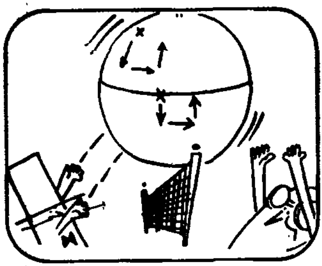


Дик погрузился в размышления.

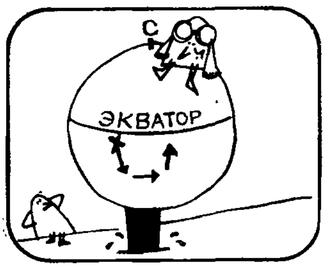
Дик. Другой точки, кроме Северного полюса, нет и быть не может, и я берусь доказать это. Предположим, что самолет вылетает из точки, расположенной между Северным полюсом и экватором.



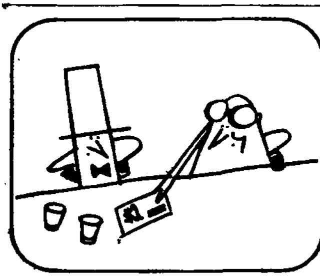
Дик. Ясно, что в этом случае конечная точка маршрута не может совпадать с исходной. Если же самолет вылетает из точки, расположенной на экваторе, то конечная точка маршрута оказывается примерно в 100 км от исходной точки.

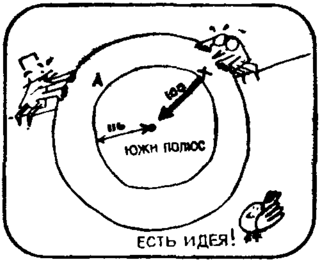


Дик. Если же самолет вылетает из точки, расположенной в южном полушарии, то конечная точка будет отстоять от исходной более чем на 100 км.

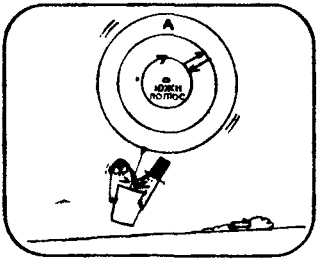


Дэн. Может, ты хочешь поспорить на 2 доллара, что самолет не мог вылететь ниоткуда, кроме Северного полюса?
Дик принял пари и проиграл. Почему?

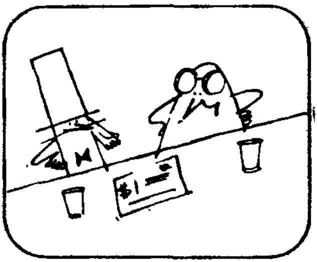




Предположим, что самолет стартовал из точки, расположенной на параллели A, отстоящей на расстоянии 116 км от Южного полюса, и пролетел к югу 100 км.

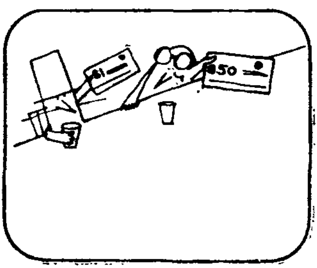


Пролетев 100 км на восток, он совершит полный оборот вокруг Южного полюса. Пролетев затем 100 км на север, он непременно вернется в исходную точку.



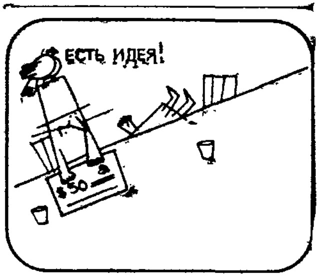
Дик. Ты прав, вот твои 2 доллара.

Дэн. Ставлю еще доллар, что, по-твоему, я не смогу указать других мест на земном шаре, вылетев откуда и пролетев сначала 100 км на юг, затем 100 км на восток и 100 км на север, самолет сможет вернуться в исходную точку. Под «другими местами» я понимаю точки, не лежащие на параллели A и не совпадающие с Северным полюсом.



Дик. Тогда ставлю 50 долларов, что таких точек на земном шаре нет.

Бедный Дик снова проиграл. Какую важную идею он упустил из виду?



Откуда вылетать?

Заключая второе пари, Дик упустил из виду весьма важное обстоятельство: точка, откуда вылетает самолет, может быть выбрана так близко от Южного полюса, что, пролетев 100 км на восток, он опишет вокруг полюса не один оборот, как в предыдущем решении, а *два* полных оборота. Так возникает новая параллель, все точки которой служат решениями исходной задачи. Аналогичным образом самолет может вылететь из любой точки еще меньшей окружности и, держа курс на восток, совершить три, четыре и т. д. оборота вокруг полюса. При любом целом положительном n можно указать соответствующую параллель, вылетев из любой точки которой и держа курс на восток, самолет совершит n оборотов вокруг полюса. Следовательно, точки, из которых может вылететь самолет, заполняют бесконечно много параллелей, стягивающихся к полюсу.

А вот еще одна навигационная задача, связанная с замечательной кривой на сфере — локсодромой, или линией постоянного курса. Самолет вылетает из точки, расположенной на экваторе, и берет курс на северо-восток. Где закончится его полет, если запасы горючего можно считать неограниченными? Какова длина маршрута и как он выглядит?

Возможно, вы удивитесь, когда узнаете, что маршрут полета имеет вид спирали, пересекающей все меридианы под одним и тем же углом и заканчивающейся на Северном полюсе. Такую кривую правильнее было бы рассматривать как винтовую линию, навитую на сферу, стягивающуюся к Северному полюсу и успевающую описать вокруг полюса бесконечно много витков. Если самолет условно принять за точку, то маршрут, хотя и успевает совершить бесконечно много оборотов вокруг полюса, имеет конечную длину, которая поддается вычислению. Следовательно, поддерживая в полете постоянную скорость, самолет достигнет Северный полюс за конечное время.

При нанесении на плоскую карту форма локсодромы искажается в зависимости от выбора картографической проекции. На меркаторской проекции, известной по карте мира, локсодрома переходит в прямую. Именно поэтому меркаторская проекция находит столь широкое применение в решении навигационных задач. Если судно или самолет следуют постоянным курсом, то, чтобы проложить его на карте, достаточно провести прямую.

А что произойдет, если самолет, взлетев с Северного полюса, возьмет курс на юго-запад? Эта задача обратна предыдущей. Полет, как и прежде, будет происходить по локсодроме, но сказать, где приземлится самолет в конце пути, мы не можем. В этом можно легко убедиться, обратив время: из какой бы точки, расположенной на экваторе, ни вылетел самолет, он, двигаясь вспять, неизменно окажется на Северном полюсе. Если же самолет, достигнув экватора, пересечет его и будет лететь тем же курсом, то локсодрома стянется к Южному полюсу.

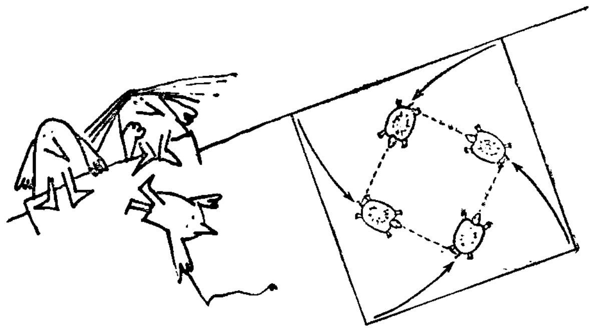
При проецировании на плоскость, касательную к полюсу (и параллельную плоскости экватора), локсодрома переходит в равноугольную, или логарифмическую, спираль. Эта спираль пересекает радиус-вектор под постоянным углом.

Задача о четырех жуках, входит в сокровищницу занимательной математики. Она также связана с построением маршрутов и логарифмической спиралью, но допускает неожиданно простое решение, избавляющее от необходимости производить утомительные выкладки. Вы познакомитесь с ней, прочитав небольшой рассказ о семействе Пицца и их любимцах — четырех черепашках.

Том Пицца, тренер и художественный руководитель черепашек, выдрессировал своих питомцев так, что Абнер (A) всегда полз к Берте, Берта (B) — к Чарлзу, Чарлз (C) — к Далиле (D) и Далила — к Абнеру. Однажды он расставил черепашек по углам квадратной комнаты так, что они образовали вершины квадрата $ABCD$, включил секундомер и принялся наблюдать за тем, что произойдет.

— Интересно получается, сынок,— сказал мистер Пицца. — Каждая черепашка ползет прямиком к своему соседу справа. Все черепашки движутся с одинаковой скоростью и поэтому в любой момент времени находятся в вершинах некоторого квадрата (рис. 9).

9



— И квадрат этот все время поворачивается и уменьшается,— добавил Том.— Смотри! Видишь? Черепашки сошлись в центре!

Предположим, что каждая черепашка ползет с постоянной скоростью 1 см/с и что комната, где они находятся, имеет форму квадрата со стороной 3 м. Через сколько времени черепашки встретятся в центре комнаты? (Каждую черепашку мы условно принимаем за точку.)

Мистер Пицца попытался было решить задачу, интегрируя по траектории черепашки, и уже достал из кармана программируемый микрокалькулятор последней модели, как вдруг миссис Пицца воскликнула:

— Не нужно никакой высшей математики, Пепероне! Задача решается очень просто! Черепашки встречаются в центре комнаты через 5 мин.

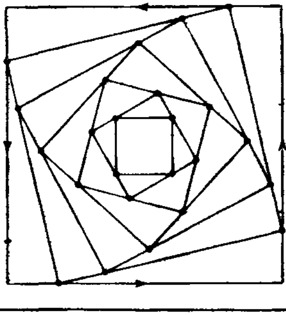
Какая идея пришла в голову миссис Пицца?

Рассмотрим каких-нибудь двух черепашек, расположенных в двух соседних вершинах квадрата, например Абнера и Берту. В каждый момент Берта движется под прямым углом к Абнеру, ползущему к ней, так как Абнер всегда ползет к Берте, а Берта всегда ползет к Чарлзу. Именно поэтому черепашки все время находятся в вершинах квадрата. Поскольку Берта никогда не ползет к Абнеру и не уползает от него, то ее движение не увеличивает и не уменьшает разделяющее их расстояние и при подсчете времени движением можно пренебречь. Дело обстоит так, как если бы Берта оставалась в своем углу комнаты, а Абнер полз к ней вдоль стенки.

В этом и состоит ключ к решению задачи. Криволинейный путь Абнера должен совпадать по длине со стороной начального квадрата, а так как эта сторона равна 300 см и Абнер ползет со скоростью 1 см/с, то он доползет до Берты за 300 с, или 5 мин. То же можно сказать и о всех остальных черепашках. Следовательно, все черепашки встречаются в центре комнаты по истечении 5 мин.

При помощи микрокалькулятора можно построить траектории черепашек — кривые, описываемые вершинами вращающегося и одновременно сжимающегося квадрата, если нанести на диаграмму последовательные положения вершин через определенные промежутки времени. Результат такого рода выкладок представлен на рис. *10*.

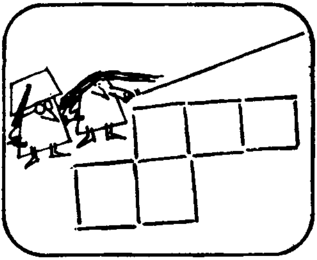
10



Можете ли вы обобщить задачу на случай, когда в исходной позиции точки расположены в вершинах любого правильного многоугольника? Начните с равностороннего треугольника, затем перейдите к правильному пятиугольнику и т. д. Можете ли вы указать общую формулу, позволяющую по известной длине стороны исходного многоугольника вычислять длину пути? Что произойдет в предельном случае, когда бесконечно много точек (черепашек) начинают двигаться по направлению к своим соседям справа (или слева) и вершин многоугольника с бесконечным числом сторон? Встретятся ли они когда-нибудь? Предположим теперь, что исходные многоугольники неправильные. Что произойдет, например, если четыре черепашки займут исходные позиции в вершинах прямоугольной, а не квадратной комнаты?

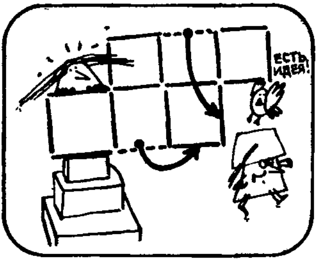
Предположим, что черепашки Тома Пиццы после встречи в центре комнаты расползаются, причем каждая из них движется по прямой от своего соседа слева? Можно ли утверждать, что черепашки непременно расползутся по углам комнаты?

Экономия на спичках

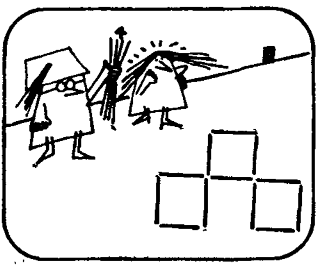


Однажды Мабель вздумала показать проф. Квибблу головоломку из спичек.

Мабель. Нужно построить четыре одинаковых по размеру квадрата, передвинув только 2 спички. Ломать спичку, укладывать их по две или так, чтобы они пересекались, не разрешается.



Проф. Квиббл. Ваша головоломка, милая Мабель, известна давным-давно. Чтобы решить ее, нужно передвинуть вот эти 2 спички.



Затем проф. Квиббл отложил 4 спички, после чего на столе осталось 12 спичек.

Проф. Квиббл. Попробуйте составить из этих 12 спичек 6 единичных квадратов (со стороной, равной длине спички).

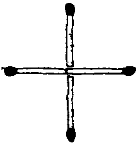
Сколько Мабель ни билась, решить головоломку проф. Квиббла ей так и не удалось. Не могли бы вы помочь Мабель?

Игры со спичками

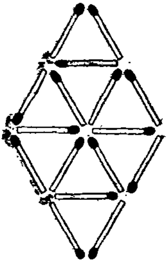
Мабель упустила из виду одно важное обстоятельство: ставя задачу, проф. Квиббл не говорил, что спички должны оставаться на плоскости. Если же выйти из плоскости в трехмерное пространство, то из 12 спичек можно составить 12 ребер куба, у которого, как известно имеется 6 квадратных граней. Мы видим, что ключ к решению спичечной головоломки проф. Квиббла аналогичен идее, позволившей Рози по-новому разрезать головку сыра.

Более известен другой вариант той же задачи, в котором из 6 спичек требуется составить 4 одинаковых равносторонних треугольника. Решение состоит в том, чтобы из 6 спичек построить каркас правильного тетраэдра.

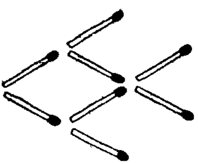
А вот еще 6 «спичечных» задач на сообразительность. Удастся ли вам их решить?



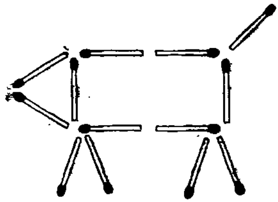
1. Передвинув как можно меньше спичек, составьте квадрат.



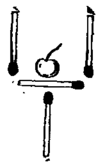
2. Уберите как можно меньше спичек так, чтобы оставшиеся спички образовали 4 равносторонних треугольника таких же размеров, как и 8 треугольников в исходной конфигурации, и нигде не торчали свободные концы.



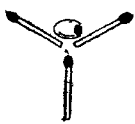
3. Передвинув как можно меньше спичек, заставьте рыбку плыть в противоположную сторону.



4. Передвинув как можно меньше спичек, заставьте поросенка повернуться в противоположную сторону.



5. Передвинув как можно меньше спичек, извлеките вишенку из бокала. «Пустой» бокал не обязательно должен стоять на ножке: он может лежать на боку. Передвигать вишенку запрещается.

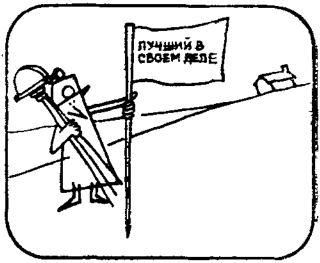


6. Передвинув как можно меньше спичек, извлеките оливу из бокала для коктейля. Как и в предыдущей задаче, пустой бокал не обязательно должен стоять. Передвигать оливу запрещается.

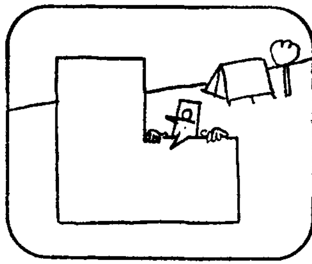
Поместив решения этих забавных головоломок, мы бы только испортили вам удовольствие. Сообщаем лишь, что первую задачу можно решить, передвинув 1 спичку, вторую — убрав 4 спички, третью, четвертую и пятую — передвинув соответственно 3, 2 и 2 спички, шестую — не передвинув ни одной спички.

Хитроумные разбиения

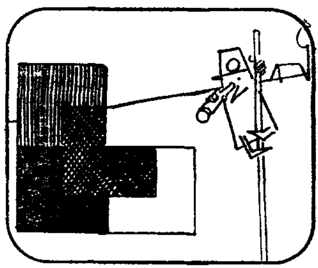
Рэнсом — землемер, который специализируется в разбиении участков самой причудливой формы на конгруэнтные части.



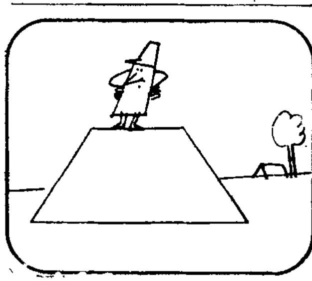
Однажды его попросили разделить вот такой участок на 4 одинаковые части. Как это сделать?

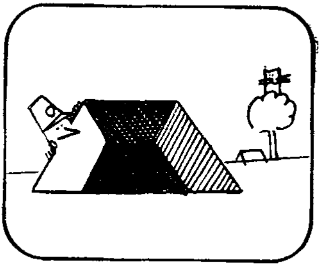


Разделить участок можно единственным способом — так, как показано на рисунке.

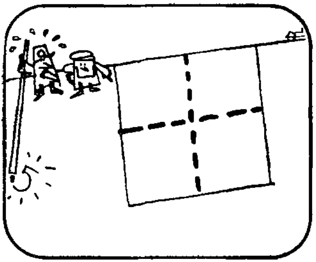


В следующий раз Рэнсому понадобилось разделить на 4 конгруэнтные части участок, имевший форму равнобочной трапеции. Сделать это было нелегко.

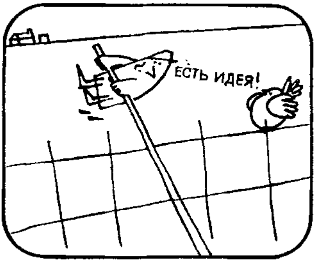




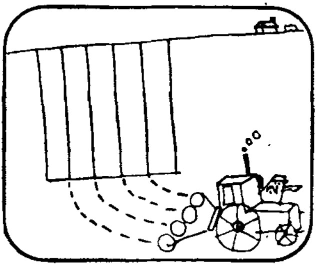
Однако Рэнсом не отступил перед трудностями и сумел найти единственное решение.



Разделить на 4 конгруэнтные части квадратный участок для такого специалиста, как Рэнсом, было сущей забавой, но когда его попросили разделить квадратный участок на 5 конгруэнтных частей, он стал в тупик.



Рэнсом. Как же это сделать? Ведь должно же существовать какое-то решение... Есть идея! Все ясно!
Не могли бы вы сказать, как Рэнсом решил разделить квадратный участок?



Рэнсом. Мой метод до смешного прост и позволяет делить квадрат на любое число конгруэнтных частей.

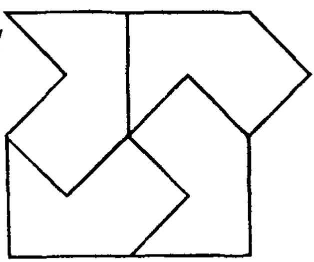
Задачи на разрезание

Если хотите позабавиться, предложите своим друзьям решить три задачи Рэнсома. В двух первых задачах участки в форме угла и равносторонней трапеции удается разбить на 4 одинаковые части — уменьшенные копии исходного участка. Эти решения косвенно наводят на мысль о том, что и квадрат должен быть разбит на 5 частей довольно причудливой формы, так как его нельзя разделить на 5 квадратов.

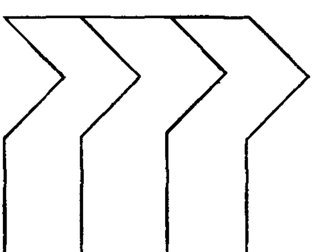
Предложенное Рэнсомом простое решение приходит в голову очень немногим. Можно доказать, что квадрат можно разделить на 5 конгруэнтных частей только так, как это сделал Рэнсом, и никак иначе.

Если ваш приятель «попадется» на третьей задаче, вам удастся поймать его вторично, задав ему четвертую задачу, тесно связанную с предыдущей. Прежде всего покажите ему, как поле, изображенное на рис. *11*, можно разделить на 4 конгруэнтные части,

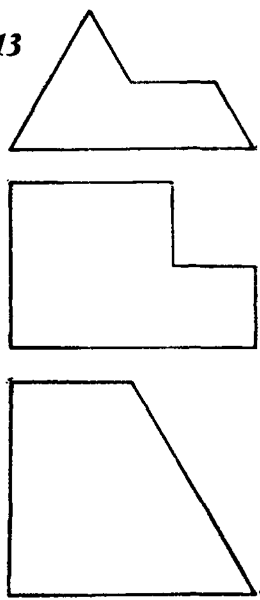
11



12



13



и спросите, можно ли это поле разделить на 3 конгруэнтные части?

После нескольких попыток ваш друг скорее всего признает себя побежденным и преисполнится уверенности, что ему досталась необычайно трудная задача. Каково же будет его удивление, когда он узнает, что эта задача допускает неожиданно простое решение, аналогичное предложенному Рэнсомом разбиению квадрата на 5 конгруэнтных частей. Это решение приведено на рис. *12*. Как и в случае квадрата, метод позволяет производить разбиение поля на любое число конгруэнтных частей.

Задачи, которые приходится решать землемеру Рэнсому и ресторатору Джо, относятся к одному из увлекательнейших разделов занимательной математики, называемому иногда теорией разбиений. Их неожиданные решения могут подсказать, как следует браться за многие практические задачи геометрии на плоскости и в пространстве. Две первые задачи Рэнсома представляют особый интерес, поскольку в каждой из них участок делится на меньшие участки, повторяющие по форме исходный. Фигуры, которые можно без просветов и наложений, как плитками, вымостить уменьшенными их копиями (репликами), принято называть *реп-плитками.*

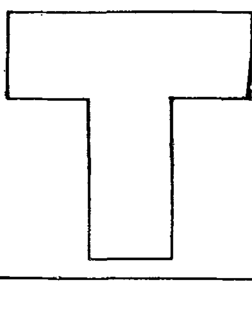
На рис. *13* показано еще несколько реп-плиток. Можете ли вы разрезать каждую из них на несколько конгруэнтных частей, повторяющих по форме исходную фигуру? Располагай мы неограниченным запасом реп-плиток любой формы, из них можно было бы построить непериодическое разбиение плоскости. Например, рассмотрим Г-образную фигуру, «реп-плиточность» которой доказал, решив первую задачу, Рэнсом. Сложенные вместе, четыре такие фигуры образуют новую Г-образную фигуру, которая в 4 раза больше исходной. Из четырех новых фигур в свою очередь можно составить еще большую Г-образную фигуру. Этот процесс можно продолжать сколь угодно долго и выложить Г-образными фигурами все возрастающих размеров бесконечную плоскость. Неограниченно долго можно продолжать не только составление все более крупных Г-образных реп-плиток, но и разрезание их на все более мелкие фигуры.

О реп-плитках мы знаем немного. Все известные реп-плитки помимо непериодического разбиения плоскости порождают еще и периодическое разбиение плоскости, то есть позволяют выложить ими всю плоскость так, что, подвергая фундаментальную область узора только параллельным переносам без поворотов и отражений, ею можно покрыть всю плоскость. Существует ли реп-плитка, порождающая только непериодическое разбиение плоскости? Этот трудный вопрос теории разбиений остается пока без ответа.

Еще меньше известно об объемных реп-плитках. К числу их заведомо принадлежит куб, так как из 8 кубов можно составить 1 куб большего размера так же, как из 4 квадратов можно сложить 1 квадрат побольше. Можете ли вы назвать еще какие-нибудь объемные реп-плитки?

Если конгруэнтные части по форме не должны повторять составленную из них фигуру, то возможности для придумывания задач-головоломок расширяются. Например, Т-образная фигура на рис. *14* составлена

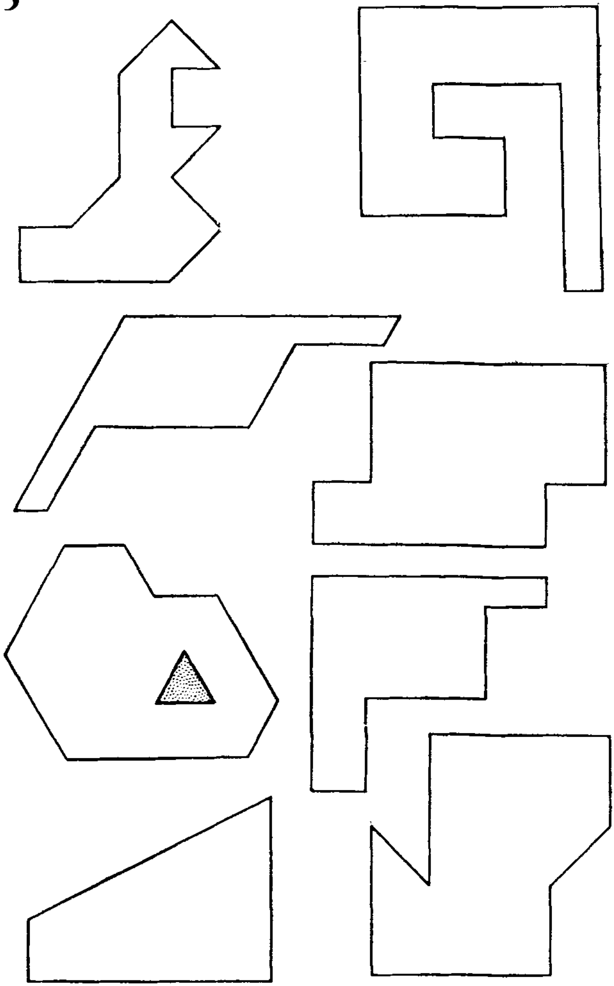
14



из 5 квадратов. Ее невозможно разрезать на четыре Т-образные фигуры, но, может быть, вам удастся разбить ее на 4 конгруэнтные фигуры какой-нибудь другой формы?

Разрезание плоскости фигуры даже на две конгруэнтные части может оказаться трудной задачей. На рис. *15* вы видите несколько фигур, на которых можете испытать силу своего геометрического воображения.

15

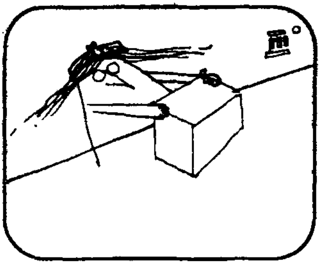


Решения (способы разрезания) приведены в конце книги.

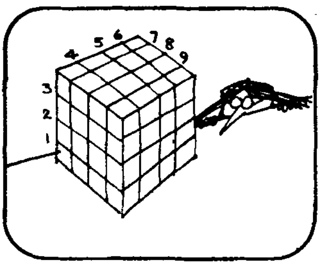
Еще один интересный класс задач на разрезание образуют задачи на разрезание одного заданного многоугольника на наименьшее число частей любой формы, из которых можно составить другой заданный многоугольник. Например, на сколько частей достаточно разрезать квадрат, чтобы из них можно было составить равносторонний треугольник? (На 4 части.) Наиболее полно теория разбиений и весь круг вопросов, связанных с разрезанием, изложен в книге Гарри Линдгрена «Занимательные задачи на разрезание» *.

* Линдгрен Г. Занимательные задачи на разрезание. — М.: Мир, 1977.

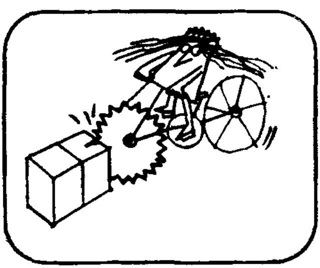
Мисс Евклид и ее кубики



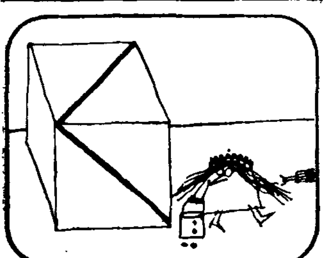
Мисс Евклид поставила на кафедру большой деревянный куб.
Мисс Евклид. Сегодня я проведу с вами контрольную. Я задам вам всего 3 вопроса об этом кубе.



Мисс Евклид. Этот куб можно распилить на 64 единичных куба. Для этого требуется провести 9 разрезов.



Мисс Евклид. Если бы перед каждым разрезом части куба разрешалось бы перекладывать, то можно было бы ограничиться 6 разрезами. Мой первый вопрос к вам: как доказать, что число разрезов не может быть меньше 6?

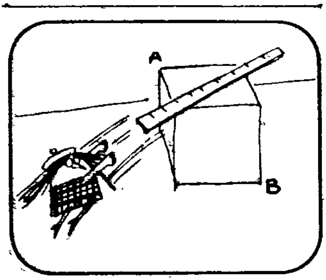


Пока класс трудился над ответом на первый вопрос, мисс Евклид провела на двух гранях куба диагонали, проходящие через общую вершину.
Мисс Евклид. Мой следующий вопрос: чему равен угол между этими двумя диагоналями?

Прежде чем задать свой третий вопрос, мисс Евклид положила на верхнюю грань куба линейку.

Мисс Евклид. Как с помощью этой линейки проще всего измерить длину диагонали куба AB?

На сколько вопросов мисс Евклид вы смогли бы ответить? Я смог ответить на 2 из 3 вопросов.



Каверзные задачи

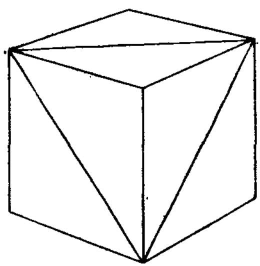
Решение задачи 1. Докажем, что куб $4\times4\times4$ невозможно разрезать на 64 кубика менее чем 6 плоскими разрезами (при условии, что после каждого разреза части куба разрешается перекладывать). Рассмотрим для этого любой из 8 внутренних кубиков. Ни один из внутренних кубиков не имеет «готовых» граней, которые бы совпадали с гранями большого куба. Следовательно, каждую из 6 граней внутреннего куба необходимо выделить, для чего требуется провести 1 плоский разрез. Поскольку ни одна плоскость не может выделить более одной грани куба, то число разрезов, которые необходимо провести, чтобы высечь все 6 граней куба, должно быть не меньше 6.

Существует ли общий метод, позволяющий распилить любой прямоугольный параллелепипед с целочисленными длинами ребер на единичные кубы при минимальном числе разрезов (части параллелепипеда разрешается переставлять)? Да, такой метод существует и заключается в следующем. Рассмотрим 3 разных куба, длины ребер которых равны длине, ширине и высоте параллелепипеда. Для каждого куба определим минимальное число разрезов, которые необходимо провести, чтобы разделить его на слои единичной толщины. Для этого проведем плоский разрез перпендикулярно ребру куба через целую точку, расположенную как можно ближе к середине ребра (если в длине ребра укладывается четное число единиц, то распил делит ребро пополам; если же в длине ребра укладывается нечетное число единиц, то распил проходит на расстоянии половины единицы длины от середины ребра), переложим полученные части и будем повторять всю процедуру до тех пор, пока весь куб не распадется на слои единичной толщины. Сумма трех минимумов (по одному для каждого ребра) даст нам ответ задачи.

Например, чтобы распилить на единичные кубики прямоугольный параллелепипед $3 \times 4 \times 5$, необходимо провести 7 плоских разрезов: 2 для ребра 3, 2 для ребра 4 и 3 для ребра 5. Доказательство этого алгоритма было впервые опубликовано в журнале Mathematics Magazine в 1952 г.

Решение задачи 2. Задача решается просто, если сообразить, что на еще одной грани куба можно провести третью диагональ, соединяющую концы диагоналей, проведенных мисс Евклид (рис. *16*).

16

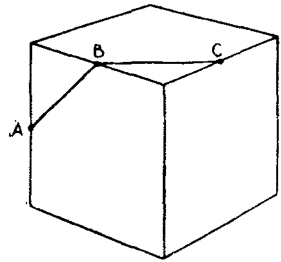


Три диагонали образуют равносторонний треугольник. Так как каждый из углов равностороннего треугольника равен 60°, то и угол между проведенными мисс Евклид диагоналями равен 60°.

Вторая задача мисс Евклид допускает изящное обобщение. Предположим, что мисс Евклид провела на поверхности куба две прямые, соединяющие середины A, B и C трех ребер (рис. *17*). Чему равен угол ABC между этими прямыми?

Решение задачи находим по аналогии с предыдущим решением. Прежде всего соединим отрезками прямых середины ребер на четырех остальных гранях так, чтобы все шесть отрезков образовали замкнутую

17



ломаную. Ясно, что все шесть отрезков имеют одинаковую длину и углы между любыми двумя смежными отрезками также одинаковы. Следовательно, если бы нам удалось доказать, что все шесть вершин ломаной лежат в одной плоскости, то мы могли бы утверждать, что наша шестизвенная замкнутая ломаная имеет форму правильного шестиугольника. Доказать нужное нам утверждение нетрудно, но в его справедливости вы можете убедиться экспериментально, распилив деревянный куб на две половинки вдоль плоскости, проходящей через середины шести ребер.

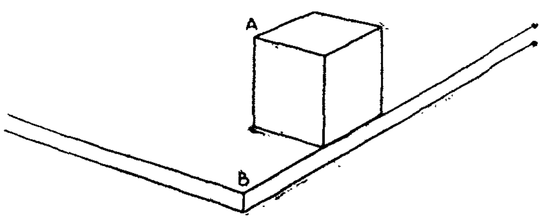
То, что поперечное сечение, делящее куб на две половины, может иметь форму правильного шестиугольника, неожиданно и в какой-то мере противоречит интуиции. Ну, а коль скоро мы знаем, что две проведенные мисс Евклид линии являются двумя смежными сторонами правильного шестиугольника, то найти угол между ними не составляет никакого труда: он равен 120°.

Рис. *17* наводит на мысль о еще одной интересной задаче. Предположим, что муха хочет проползти по поверхности куба из точки A в точку C. Можно ли считать путь, образованный отрезками AB и BC, кратчайшим?

Эту задачу легко и просто решит тот, кто догадается, что кратчайший путь из точки A в точку B на поверхности куба можно найти, если две смежные грани куба развернуть так, чтобы их плоскости совпали: кратчайшим будет отрезок прямой, соединяющий на развертке точки A и C. Развернуть две смежные грани куба так, чтобы плоскости их совпали, можно двумя способами, выбрав либо переднюю и верхнюю грань, либо переднюю и правую грань, поэтому при решении задачи необходимо соблюдать осторожность. В первом случае мы получаем путь длиной $\sqrt{2}$, во втором — путь длиной $\sqrt{2{,}5}$. Следовательно, на рис. *17* изображен кратчайший путь на поверхности куба из A в C.

Решение задачи 3. Разумеется, длину диагонали куба можно определить, измерив линейкой длину ребра и дважды применив теорему Пифагора. Но диагональ куба можно измерить линейкой гораздо более простым способом. Поставив куб на край стола, отмерим отрезок, равный по длине ребру куба, и концы отрезка пометим, после чего сдвинем куб на длину ребра вдоль края стола (рис. *18*). Расстояние от A до B в точности равно диагонали куба, и его можно измерить линейкой.

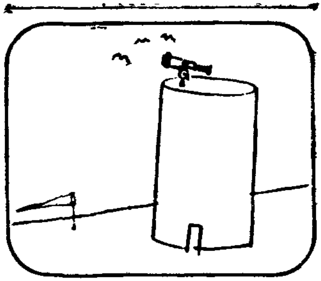
18



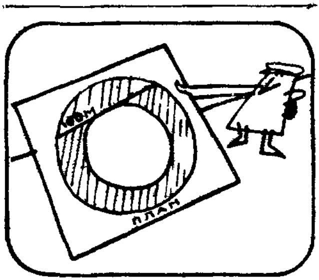
Как вы стали бы измерять радиус большого шара, если бы у вас под рукой была только линейка, длина которой составляет $^2/_3$ от диаметра шара? Один из простых способов состоит в том, чтобы запачкать шар сажей или губной помадой и прижать его к стене так, чтобы на стене в точке касания осталась отметка. Измерив линейкой расстояние от пола до отметки, вы определите радиус шара. Можете ли вы предложить аналогичные методы, позволяющие при помощи какого-нибудь ухищрения измерить высоту конуса или пирамиды? Можете ли вы точно измерить радиус цилиндрической трубы, если под рукой у вас имеется только плотницкий угольник?

По ковровой дорожке

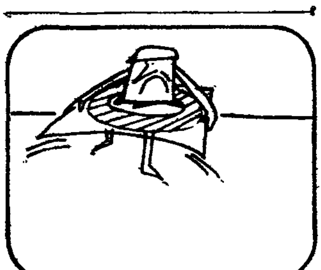
Ковровое покрытие для кольцевого коридора в здании нового аэропорта было поручено изготовить компании, возглавляемой мистером Тэком.



Увидев план коридора, мистер Тэк решил, что над ним подшутили, и разгневался: единственным размером, указанным на чертеже, была длина хорды, касательной к внутренней стене коридора.

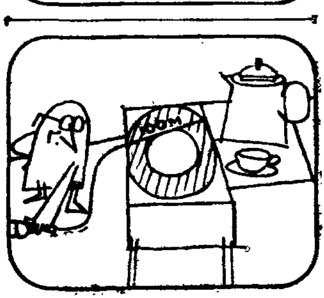


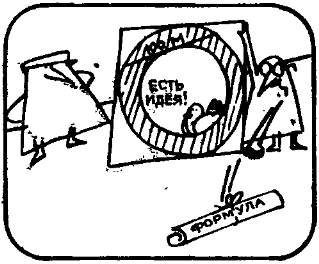
Мистер Тэк. Уберите чертеж, чтобы я его больше не видел! Как, скажите на милость, я смогу представить смету на ковровое покрытие, если мне не известна площадь коридора? Посоветуюсь-ка я с моим дизайнером мистером Шарпом.



Мистер Шарп, искусный геометр, выслушал мистера Тэка спокойно.

Мистер Шарп. Длина этой хорды, мистер Тэк, — единственный размер, который мне нужен. Я подставлю его в известную мне формулу и узнаю площадь коридора.





Мистер Тэк с минуту удивленно смотрел на мистера Шарпа, а потом улыбнулся.

Мистер Тэк. Благодарю вас, мистер Шарп, я могу назвать вам площадь коридора и без этого. Знаете ли вы, как мистер Тэк сумел определить площадь кольцевого коридора?

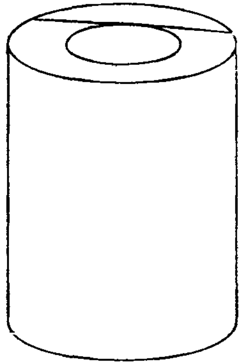
Удивительная теорема

Мистер Тэк рассуждал следующим образом. Мистер Шарп пользуется заслуженной репутацией искусного и сведущего геометра, поэтому, если он говорит, что у него есть формула, позволяющая вычислять площадь кольца по длине хорды, касательной к внутренней окружности, то она у него действительно есть. Если длина хорды, касательной к внутренней окружности, будет оставаться равной 100 м, то, как бы ни изменялись радиусы внешней и внутренней окружностей, по формуле мистера Шарпа площадь кольца должна оставаться неизменной.

Далее мистер Тэк спросил себя, что произойдет, если радиус внутреннего кольца уменьшится до нуля — своего минимального значения. Кольцо в этом случае превратится в круг, а хорда длиной 100 м станет диаметром круга. Площадь круга равна $\pi \cdot 50^2$ кв. м $\approx$ 7854 км. м. Следовательно, если предположить, что формула мистера Шарпа существует, то площадь кольца также должна быть равна 7854 кв. м.

В общем случае кольцо имеет такую же площадь, как круг с диаметром, равным длине наибольшего отрезка прямой, который только умещается в кольце. Эту удивительную теорему нетрудно доказать, если воспользоваться формулой для площади круга.

Трехмерный аналог этой задачи звучит так: найти объем отрезка толстостенной цилиндрической трубы, если помимо его длины известна длина самого длинного отрезка, который только умещается на одном из торцов трубы (рис. *19*). Этот отрезок соответ-

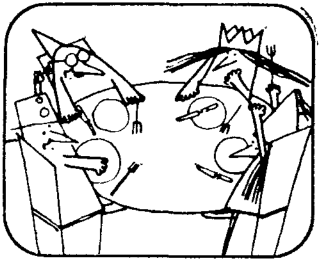


ствует касательной в двумерной задаче, и, зная его длину, мы без труда находим площадь поперечного сечения трубы. Умножив площадь сечения на длину отрезка трубы, найдем его объем.

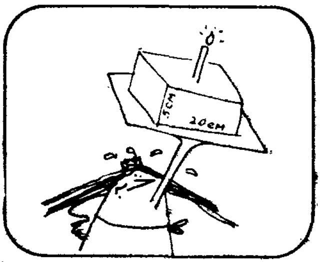
Менее очевидным трехмерным аналогом задачи о площади кольца является следующая красивая задача. Через центр шара просверлено сквозное цилиндрическое отверстие. Длина канала 6 см. Чему равен объем оставшейся части сферы? И в этом случае кажется, что ответить на вопрос задачи невозможно: слишком скудны сведения, которыми мы располагаем. Однако исходя из совершенно элементарных соображений, можно показать, что оставшаяся часть сферы имеет такой же объем, как сплошная сфера, диаметр которой равен длине просверленного канала.

Как и в предыдущем случае, ответ задачи мы получаем сразу же, как только предположим, что задача разрешима! Действительно, если решение задачи существует, то объем части сферы, оставшейся после просверливания сквозного отверстия, не должен зависеть от диаметра отверстия. Устремим поэтому диаметр отверстия к наименьшему значению — нулю. Отверстие при этом сжимается в прямую — диаметр сплошной сферы. Следовательно, объем оставшейся части сферы равен $^4/_3 \cdot \pi \cdot 3^3$ куб. см $= 36\pi$ куб. см.

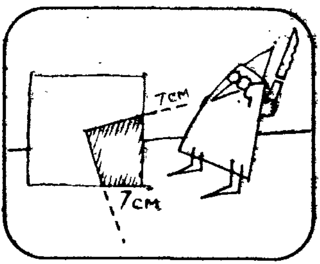
Торт для именинницы



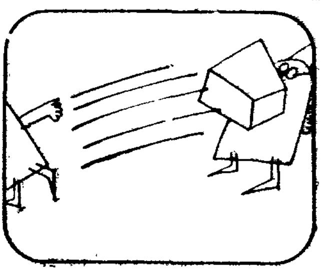
Обед шел к концу. Мистер Джонс сидел за столом вместе с женой, десятилетним сыном и семилетней дочерью Сьюзен.



Был день рождения Сьюзен, и миссис Джонс испекла небольшой квадратный торт 20 см × × 20 см и толщиной 5 см, обильно покрытый глазурью сверху и с четырех сторон.



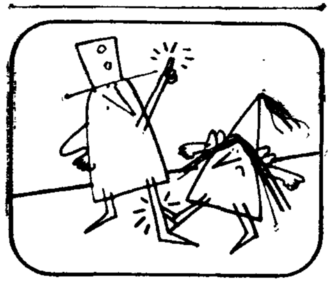
Мистер Джонс. Замечательный торт! Всем хватит. Первый кусок торта я отрежу для Сьюзен. Ей сегодня исполнилось 7 лет, и я отступлю на 7 см от углов и проведу разрезы через центр.



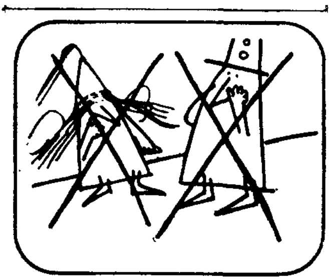
Кусок получился причудливой формы, и Сьюзен, которой он достался, пожаловалась.

Сьюзен. Папа, ты отрезал мне маленький кусочек, меньше четверти! Даже если ты отрезал мне четверть торта, то глазури на ней маловато!

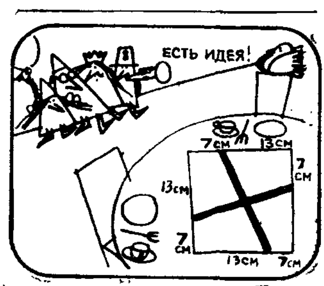
Брат Сьюзен придерживался другого мнения.
Брат. Какая ты жадина, Сьюзен! Мне кажется, что папа отрезал тебе слишком много. Не мешало бы тебе кое с кем поделиться излишками.



Мистер Джонс. Вы оба заблуждаетесь. Сьюзен получила ровно четверть торта и ровно четверть глазури.
Не могли бы вы объяснить, прав ли мистер Джонс?



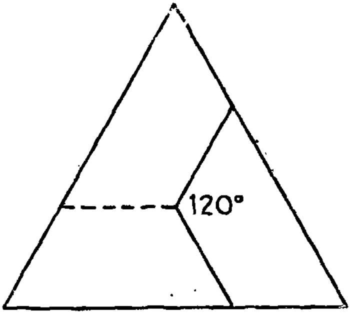
Чтобы убедиться в правоте мистера Джонса, достаточно продолжить линии разрезов за центр до пересечения с противоположными сторонами торта. Продлив каждый разрез, вы тотчас же убедитесь, что они делят торт на четыре конгруэнтные части.



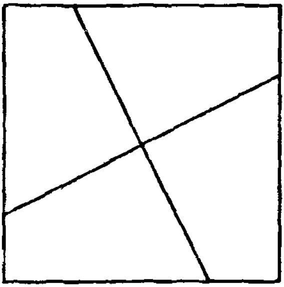
Как разрезать праздничный пирог?

Задача о разрезании пирога легко обобщается с квадрата на другие правильные многоугольники. Предположим, например, что торт или праздничный пирог испечены в форме равностороннего треугольника и разрезы проведены под углом 120° из центра (рис. **20**). Ясно, что каждый кусок составляет треть пирога. В этом нетрудно убедиться, если провести штриховую линию. Если пирог испечен в форме правильного пятиугольника, то, проведя из центра два разреза под углом 72°, мы отрежем от пирога

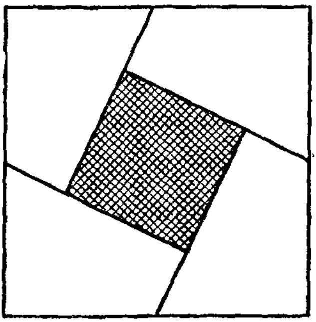
20



21



22



одну пятую. Если пирог имеет форму правильного шестиугольника, то, чтобы отрезать от него одну шестую, необходимо провести из центра два разреза под углом $360° : 6 = 60°$. Тот же метод обобщается и на правильные многоугольники с большим числом сторон, хотя угол между разрезами не всегда выражается целым числом градусов.

Разрезание квадрата на 4 конгруэнтные части другой формы долгое время было одной из излюбленных задач на разрезание. Если, разрезав картонный квадрат на 4 части так, как показано на рис. ***21***, вы предложите кому-нибудь из своих знакомых составить квадрат из четвертушек, то, как правило, ваш приятель сочтет задачу трудной. После того как он успешно справится с ней, попросите его составить из тех же четвертушек *два* квадрата.

Последняя задача в отличие от предыдущих носит несколько жульнический характер: решить ее ваш приятель сможет лишь в том случае, если догадается, что одним из двух квадратов служит отверстие в середине другого квадрата (рис. *22*). Размеры отверстия зависят от угла, который линия разреза составляет со стороной исходного квадрата. Если этот угол равен 90°, то отверстие исчезает. Если угол равен 45°, то отверстие достигает наибольших размеров.

Глава 3

Находки в мире чисел

НЕОЖИДАННЫЕ РЕШЕНИЯ АРИФМЕТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Говоря об арифметике, разные люди вкладывают в это понятие различное содержание. Мы будем понимать под арифметикой все, что так или иначе связано с изучением свойств целых чисел и операций сложения, вычитания, умножения и деления, производимых над числами.

Когда-то, на заре человечества (точную дату не может назвать ни один антрополог), первобытные люди открыли, что предметы можно считать и результат счета не зависит от того, в каком порядке сосчитаны предметы. Например, если вы приметесь считать двух овец по пальцам, то результат будет одним и тем же независимо от того, с какой овцы вы начнете считать и будете ли вы загибать пальцы с мизинца или с большого пальца. У вас всегда получится 2, а если вы сосчитаете две овцы, а потом еще одну, то у вас всегда получится 3.

Такие арифметические теоремы, как «$2 + 1 = 3$», созревали и становились достоянием умов на протяжении нескольких столетий. Если бы мы могли прокрутить назад пленку, на которой была бы запечатлена история человечества, то вряд ли нам удалось найти какой-то век, о котором можно было бы с уверенностью сказать: «Именно тогда человечество открыло арифметику». Маленькие дети овладевают понятием числа так же постепенно и незаметно. В один прекрасный день ребенок может впервые заявить изумленным родителям: «Один плюс один — два», но смысл этого утверждения ясен малышу задолго до того, как он выскажет свою первую арифметическую теорему.

Все истинные теоремы арифметики следуют непосредственно из аксиом и определений числовой системы, но это отнюдь не означает, будто истинность или ложность любого арифметического утверждения легко распознается на слух. Если кто-нибудь скажет, что при умножении 12 345 679 на 9 получается 111 111 111, вы можете не верить ему до тех пор, пока сами не умножите одно число на другое. Существуют арифметические теоремы, которые просто сформулировать, но так трудно доказать, что никто пока не знает, верны ли они. Примером таких утверждений может служить знаменитая гипотеза Гольбаха: всякое четное число больше 2 представимо в виде суммы двух простых чисел. Никому до сих пор не удалось ни доказать ее, ни построить контрпример.

В этой главе мы рассмотрим несколько задач о числах, допускающих неожиданно простые решения, додуматься до которых не так-то просто. При выборе задач мы отдавали предпочтение таким, которые при всей элементарности служили бы ступенькой, позволяющей читателю подняться на более высокую ступень арифметики, получившей название теории чисел. Например, рассказ-задача «Разбитые грампластинки» вводит в круг простейших идей диофантова анализа — решения уравнений в целых числах. Другая задача «Один лишний» познакомит вас с важным понятием наименьшего общего кратного и интересным фокусом, основанным на замечательной «китайской теореме об остатках».

Дихотомия (последовательное разбиение множества на 2 части), играющая важную роль в вычислительной технике и теории автоматической сортировки данных, лежит в основе задачи об угадывании номера телефона Элен и позволяет читателю войти в круг вопросов, связанных с двоичной системой счисления. Принцип «птичка в клетке», известный также под названием принципа Дирихле, позволяет доказывать многие важные факты из теории чисел. Мы используем его для доказательства двух забавных утверждений: о бумажных долларах и о числе волос на голове человека. Свойство двух целых чисел быть взаимно простыми (не иметь общих делителей, кроме единицы) позволяет доказать, что, за исключением 12 часов, часовая, минутная и секундная стрелки часов никогда не совпадают (обычно это вычисление доказывают, проделывая довольно громоздкие выкладки).

Задача о счете по бутылкам легко решается, если воспользоваться понятием сравнения по модулю, и заставляет вспомнить о знаменитой задаче Иосифа Флавия, которую можно удивительно наглядно продемонстрировать при помощи колоды игральных карт.

Хотя задачи, собранные в этой главе, математики сочли бы тривиальными, открываемые ими направления для исследований в теории чисел далеко не тривиальны и не могут не поражать изяществом и идейным богатством древнейшей из всех дедуктивных систем — системы, оперирующей с символами, обозначающими знакомые всем числа.

Разбитые грампластинки

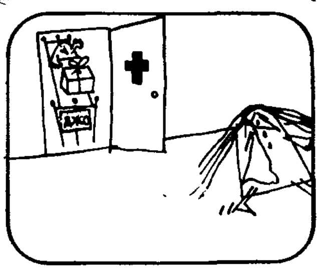
Больше всего на свете Боб и Элен любили всякого рода головоломки. Особенно им нравилось ставить в тупик друг друга и своих друзей каверзными вопросами.

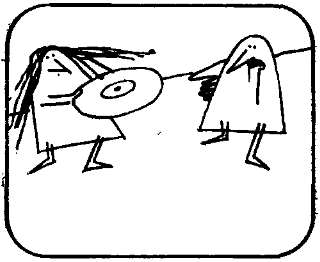
Однажды, когда Боб и Элен проезжали мимо магазина грампластинок, Боб задал Элен вопрос.

Боб. Ты все еще собираешь пластинки с джазовой музыкой?

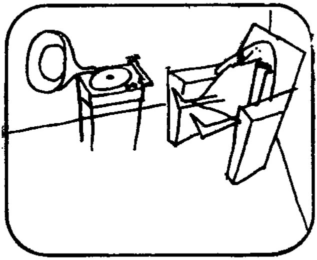
Элен. Нет, половину всех пластинок и еще полпластинки я подарила Сьюзен.

Элен. Половину оставшихся пластинок и еще полпластинки я подарила Джо.





Элен. После этого у меня осталась одна пластинка. Я подарю ее тебе, если ты скажешь, сколько пластинок было у меня в коллекции до того, как я начала ее раздавать.



Боб не сразу смог решить задачу, так как не мог понять, зачем Элен понадобилось дарить друзьям половинки пластинок.

Внезапно его осенила блестящая мысль, и он понял, что ни одна пластинка не была разбита на половинки. Боб ответил на вопрос Элен, и та подарила ему последнюю пластинку из своей коллекции.
Какая мысль пришла Бобу в голову?

Половинки целого

Неужели вы попались в ловушку и не подумали, что половина чего-то и $^1/_2$ могут оказаться целым числом? Если да, то, должно быть, попытались решить задачу, ведя счет на половинки грампластинок, и, запутавшись вскоре в вычислениях, оставили затею как безнадежную. Неожиданно простым решение получается, если догадаться, что половина от нечетного числа и еще половина равны целому числу.

По словам Элен, у нее после того, как она преподнесла свой второй подарок, осталась 1 пластинка, Значит, до того, как она подарила часть своих пластинок Джо, у нее должны были остаться 3 пластинки. Половина от 3 составляет $^3/_2$, а $^3/_2 + {}^1/_2 = 2$, поэтому Элен подарила Джо 2 пластинки, после чего у нее осталась 1 пластинка. Продолжая решать задачи «задним ходом», нетрудно установить, что сначала у Элен было 7 пластинок и что 4 пластинки она подарила Сьюзи.

Разумеется, задачу можно было бы решать и алгебраически. Составление и решение соответствующего уравнения — превосходное упражнение по элементарной алгебре. Удивительно, что такая простая задача приводит к такому сложному уравнению:

$$x - \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\right) - \left[\frac{x - \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\right)}{2} + \frac{1}{2}\right] = 1.$$

Новые головоломки того же типа мы получим, варьируя параметры задачи. Предположим, например, что Элен каждый раз дарит кому-нибудь половину своих пластинок и еще полпластинки, проделывает это не дважды, а трижды и остается не с одной пластинкой, а без единой пластинки. Сколько пластинок было у нее сначала? Возможно, вам покажется странным, что ответ остается прежним — 7 пластинок, но удивительного здесь ничего нет: в третий раз Элен дарит последнюю оставшуюся у нее пластинку. А сколько пластинок было у нее сначала, если она дарит каждый раз половину своих пластинок и еще полпластинки и проделывает эту процедуру 4 раза, после чего у нее остается 1 пластинка? А если Элен дарит пластинки 5 раз? Какого рода последовательность порождают возникающие в этой серии задач числа?

Долю, которую составляют отобранные для очередного подарка пластинки, также можно изменять. Предположим, что Элен отдает каждый раз треть своих пластинок и еще треть пластинки и после того, как она преподносит 2 подарка, у нее остается 3 пластинки. Сколько пластинок было у Элен сначала? Существует ли решение задачи в том случае, если процедуру усечения коллекции на одну треть и еще треть пластинки Элен повторяет трижды, после чего у нее остаются 3 пластинки? Варьируя параметры задачи (число подарков, долю, которую составляют отобранные для очередного подарка пластинки, и число оставшихся у Элен пластинок), вы обнаружите, что решение существует не всегда, то есть не всегда возникает необходимость дарить часть пластинки. При каких ограничениях в задачах этого типа необходимость дарить пластинки «частями» вообще отпадает?

Доля, которую осколки «разбитой» пластинки составляют от целого, может варьироваться от подарка к подарку. Вот, например, задача, в которой эта доля не остается постоянной.

Один мальчик с увлечением занимался разведением золотых рыбок, потом это занятие ему надоело и он решил продать всех своих рыбок. Свое решение он осуществил в 5 этапов:

1. Продал половину всех своих рыбок и еще полрыбки.

2. Продал треть оставшихся рыбок и еще треть рыбки.

3. Продал четверть оставшихся рыбок и еще четверть рыбки.

4. Продал пятую часть оставшихся рыбок и еще одну пятую рыбки.

После этого у него осталось 19 рыбок. Разумеется, с золотыми рыбками он обращался бережно и ему и в голову не приходило делить рыбку на части. Сколько рыбок было у мальчика сначала? Ответ: 101 рыбка, но решить эту задачу не так просто, как предыдущие. Попробуйте и вы убедитесь в этом сами.

А вот еще одна разновидность задач того же типа.

У одной дамы было в сумочке несколько купюр достоинством в 1 доллар каждая. Других денег у нее с собой не было.

1. Половину денег дама израсходовала на покупку новой шляпки, а 1 доллар заплатила за освежающий напиток.

2. Зайдя в кафе позавтракать, дама израсходовала половину оставшихся у нее денег и еще 2 доллара заплатила за сигареты.

3. На половину оставшихся у нее денег она купила книгу и по дороге домой зашла в бар и заказала

коктейль за 3 доллара, после чего у нее остался 1 доллар. Сколько долларов было у нее первоначально, если предположить, что ей ни разу не пришлось разменивать долларовые купюры?

Ответ приведен в конце книги.

Заметим, что во всех вариантах в условиях задачи непременно говорится, сколько грампластинок, золотых рыбок или купюр остается у действующего лица по окончании всех перипетий. Во многих случаях ответ задачи можно получить и без такой информации, но для этого пришлось бы решать в целых числах некоторые неопределенные уравнения. Наиболее известная задача такого рода легла в основу рассказа американского писателя Бена Эймса Уильямса «Кокосовые орехи».

Действие рассказа происходит на острове, на который после кораблекрушения попадают 5 человек и 1 обезьяна. Первый день они собирают кокосовые орехи. Ночью один из людей просыпается и решает забрать причитающуюся ему долю орехов. Он раскладывает орехи на 5 одинаковых кучек, отдает лишний орех обезьяне и, спрятав свою долю, укладывается снова спать.

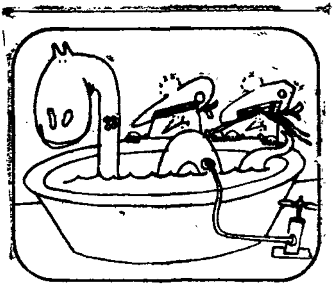
Вскоре просыпается другой товарищ по несчастью и проделывает то же самое: раскладывает орехи на 5 одинаковых кучек, отдает оставшийся орех обезьяне и, спрятав свою долю, укладывается снова спать. Затем по очереди просыпается третий, четвертый и пятый невольный обитатель острова, и каждый делает то же, что и первые два. Утром вся пятерка делит оставшиеся орехи на 5 равных частей. На этот раз ни одного лишнего ореха не остается.

Сколько кокосовых орехов было собрано первоначально?

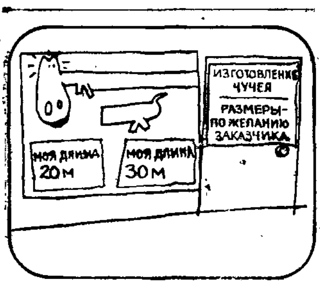
Задача допускает бесконечно много решений. Наименьшее из них — 3121 орех. Решить задачу не очень просто.

Коль скоро мы заговорили о кокосовых орехах, я хочу предложить вам одну задачу, которую можно решить сразу. При расчистке джунглей было собрано 25 кокосовых орехов, обезьяна стащила все орехи, кроме 7. Сколько орехов осталось? Ответ: *не* 18.

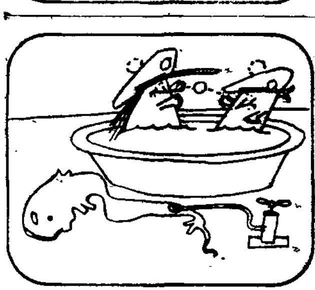
Лохнесское чудовище



Боб. Лохнесское чудовище имеет в длину 20 м и еще половину своей длины. Чему равна его длина?



Элен. Дай подумать. Двадцать и половина от двадцати — итого тридцать. Значит, лохнесское чудовище имеет в длину 30 м.



Боб. Не узнаю тебя, Элен! Твой ответ противоречит условию задачи, а ты этого не замечаешь. Как может лохнесское чудовище иметь в длину и 20 м и 30 м одновременно?

Элен. Ты прав, я ошиблась. Условие задачи означает, что длина лохнесского чудовища равна сумме 20 м и половины его длины. Теперь мне все стало ясно.

Чему, по-вашему, равна длина лохнесского чудовища?

Половина длины?

По словам Боба, лохнесское чудовище имеет в длину 20 м и еще половину своей длины, то есть длина чудовища равна сумме 2 слагаемых: 20 м и половины длины чудовища. Разделите мысленно длину чудовища пополам. Если вся длина равна сумме 2 слагаемых, из которых одно равно половине длины, а другое 20 м, то на 20 м приходится другая половина длины. Следовательно, полная длина составляет 40 м.

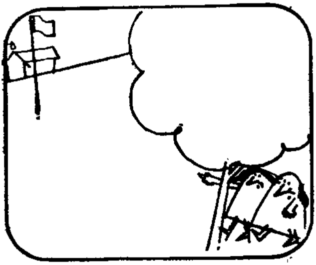
Задача Боба допускает простое алгебраическое решение: если x — полная длина лохнесского чудовища, то

$$x = 20 + x/2.$$

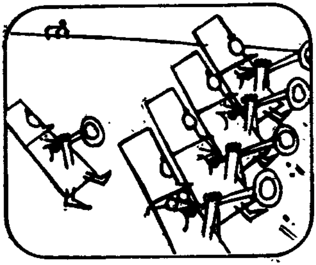
Теперь вы убедились, что задача, предложенная Бобом, до смешного проста. Интересно, как быстро вам удастся справиться со следующим ее вариантом. Кирпич иа одной чаше весов уравновешен на другой чаше $^3/_4$ кирпича и гирей в $^3/_4$ кг. Чему равна масса кирпича?

Задача о лохнесском чудовище показывает, как важно точно понять, что именно спрашивается, прежде чем пытаться ответить на вопрос. Если первая интерпретация задачи приводит к противоречию, то либо на вопрос невозможно ответить, либо вы неправильно поняли постановку задачи.

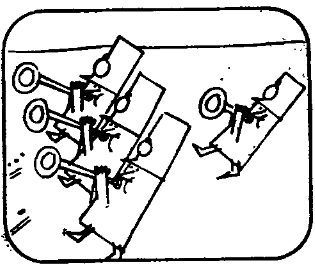
Один лишний



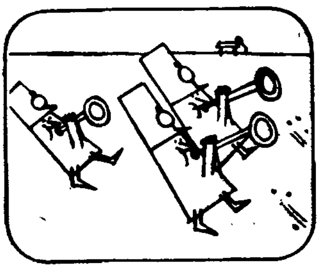
Однажды, гуляя по парку, Боб и Элен увидели школьный духовой оркестр, готовящийся к параду.



Оркестр был выстроен в колонну по четыре, а один парнишка, несчастный Спиро, замыкал шествие, бредя вне строя. Одинокая фигура, маячившая сзади, по мнению дирижера, портила общее впечатление от оркестра.

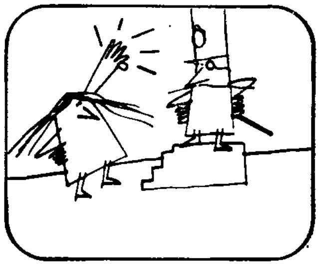


Чтобы избавиться от нее, дирижер приказал музыкантам перестроиться в колонну по три, но несчастный Спиро опять остался единственным замыкающим.

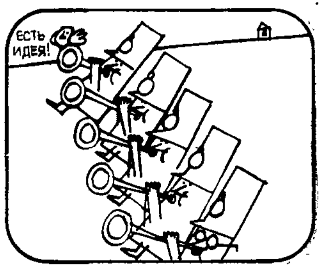


Даже когда музыканты разбились на пары, Спиро все равно остался без партнера.

Хотя это было не ее дело, Элен подошла к дирижеру.
Элен. Позвольте мне дать вам один совет?
Дирижер. Мне сейчас не до вас, милая девушка! И без того голова идет кругом.



Элен. Хоть вы и не очень вежливы, я все равно скажу вам, что нужно делать. Перестройте музыкантов в колонну по пять!
Боб. Я как раз собирался предложить то же самое!
Когда оркестр перестроили в колонну по пять, все шеренги оказались заполнены.
Сколько музыкантов было в оркестре?



Как восстановить все число по остаткам

Элен просто пересчитала всех музыкантов в оркестре и обнаружила, что число их кратно 5. Но как можете вы, не видя всего оркестра, определить, сколько в нем музыкантов?

Сделать это можно следующим образом. Пусть N — число музыкантов в оркестре. Мы знаем, что при делении на 2, 3 и 4 оно дает остаток 1 (живым воплощением остатка служит Спиро, в одиночестве марширующий вслед за оркестром). Наименьшее число, обладающее этим свойством, на 1 больше наименьшего общего кратного (НОК) чисел 2, 3 и 4, то есть числа 12. Рассмотрим теперь все числа, кратные 12. Увеличив любое из них на 1, мы получим число, которое при делении на 2, 3 и 4 дает остаток 1.

Когда оркестр перестраивается в колонну по 5, то остаток равен 0. Следовательно, N делится на 5 без остатка. Решением задачи служат числа, кратные 5, которые встречаются в последовательности

13, 25, 37, 49, 61, 73, 85, 97, 109, 121, 133, 145, ...

Поскольку число 145 слишком велико для школьного оркестра, то N равно либо 85, либо 25. Имеющаяся у нас информация не позволяет отдать предпочтение какому-нибудь из этих двух чисел.

Хорошим вариантом предыдущей задачи может служить следующая задача. При перестроениях оркестра в колонну по два, три и четыре в последней шеренге каждый раз *недостает* одного человека, а при построении в колонну по пять все шеренги оказываются заполненными. Сколько музыкантов в оркестре? На этот раз мы должны выписать последовательность чисел, которые на 1 меньше кратных двенадцати и делятся на 5 без остатка: 35, 95, 155, ...

Следующий, более трудный вариант задачи принадлежит известному американскому мастеру головоломок Сэму Лойду. По традиции в день св. Патрика члены ирландской общины проводят в Нью-Йорке торжественное шествие. В тот год, о котором рассказывается в новелле Сэма Лойда, Великий маршал ордена св. Патрика безуспешно пытался выстроить участников шествия в колонну по 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3 и 2 человека, но каждый раз в последней шеренге недоставало одного человека. Суеверные участники шествия решили даже, что среди них незримо витает дух скончавшегося незадолго до дня св. Патрика хромого Кейси, без которого не обходилось ни одно шествие. Вконец отчаявшись, Великий маршал приказал участникам шествия построиться в колонну по одному. Сколько людей приняло участие в шествии, если ирландская община в Нью-Йорке насчитывала в ту пору не более 7000 человек? Задача Сэма Лойда — прекрасный пример на нахождение НОК нескольких чисел. НОК чисел 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3 и 2 равно 2520. Вычтя из этого числа скончавшегося от пневмонии хромого Кейси, мы узнаем, что в шествии приняло участие 2519 человек.

Не следует думать, будто решение задачи становится сложнее оттого, что остатки при делении на различные числа не совпадают. В качестве примера, подтверждающего необоснованность подобных опасений, мы приведем старинную задачу-головоломку, прототип которой встречается в древнеиндийских трактатах по арифметике VII в.

Старушка несла на базар корзину яиц. Испугавшись пронесшейся мимо лошади, она выронила из рук корзину, и часть яиц разбилась. На вопрос, много ли яиц было в корзине, старушка ответила, что не сильна в арифметике и точное число яиц назвать не может. Правда, потом она все-таки вспомнила, что когда пересчитывала яйца парами, тройками, четверками и пятерками, у нее оставались лишние яйца (1, 2, 3 и 4 соответственно). Сколько яиц старушка несла на базар?

На первый взгляд кажется, что эта задача намного труднее предыдущих. В действительности же она ничем не отличается от первой части нашей второй задачи, так как остаток от деления каждый раз на единицу меньше делителя. Решается она таким же способом: нужно найти НОК чисел 2, 3, 4, 5 и вычесть из него единицу.

Задача действительно становится более трудной, если разность между делителем и остатком зависит от делителя. Если у вас есть микрокалькулятор, вы можете на досуге показать своим друзьям забавный фокус.

Фокусник садится в кресло спиной к аудитории. Кто-нибудь из зрителей задумывает любое число не больше 1000, делит задуманное число на 7, 11 и 13, называя каждый раз вслух остаток от деления.

Чтобы не задерживать аудиторию, все вычисления зритель может производить на микрокалькуляторе. Остаток от деления проще всего находить по следующему рецепту: произвести деление, вычесть из полученного частного целую часть, а дробную умножить на делитель, после чего округлить произведение до ближайшего целого числа.

Фокусник, зная лишь три остатка, может отгадать задуманное число. Для этого он достает из кармана свой микрокалькулятор и производит вычисления по следующей «тайной» формуле, которую можно записать на небольшом клочке бумаги и приклеить к передней панели микрокалькулятора:

$$\frac{715a + 364b + 924c}{1001},$$

где a, b и c — остатки от деления задуманного числа на 7, 11 и 13. Задуманное число равно остатку от деления числителя формулы на знаменатель.

Секрет формулы раскрывается просто. Первый коэффициент равен наименьшему кратному произведения bc, которое на единицу больше числа, кратного a. Найти такое число можно по определенным правилам, но когда делители a, b и c не слишком велики, как в нашем случае, то проще всего действовать прямым подбором: выписать кратные произведения bc (143, 286, 429, 572, 715, ...) и найти среди них то, которое при делении на a дает остаток 1. При $a=7$ таким кратным является число 715.

Аналогичным образом вычисляются и остальные коэффициенты. Второй коэффициент равен наименьшему кратному произведения ac, которое на единицу больше числа, кратного b, а третий коэффициент равен наименьшему кратному произведения ab, которое на единицу больше числа, кратного c. В знаменателе формулы стоит просто произведение abc. Пользуясь этим алгоритмом, вы можете заготовить «тайную» формулу для любого набора взаимно простых чисел (то есть чисел, не имеющих общих делителей, кроме единицы). Сами числа не обязательно должны быть простыми.

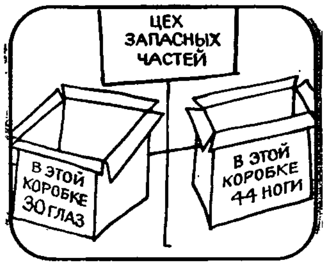
Доказательство формулы для общего случая требует знания так называемой теории вычетов и замечательной теоремы, известной под названием «китайской теоремы об остатках». Она играет важную роль в доказательстве многих нетривиальных теорем теории чисел и решении многих научных проблем.

В качестве упражнения попробуйте вывести «тайную» формулу для упрощенного варианта того же фокуса, восходящего к Сунцзу, китайскому математику, жившему в 1 в., одному из тех ученых, в честь которых теорема об остатках получила название китайской. Задумывать разрешается любое число от 1 до 105. Делить задуманное число следует на 3, 5 и 7. «Тайная» формула оказывается в этом случае столь простой, что после некоторой тренировки вы сможете проделывать все необходимые вычисления «в уме».

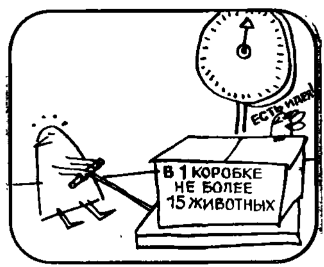
Глаза и ноги

Прежде чем закончить свою прогулку, Боб и Элен решили заглянуть в зоопарк. В одном вольере они увидели жирафов и страусов.

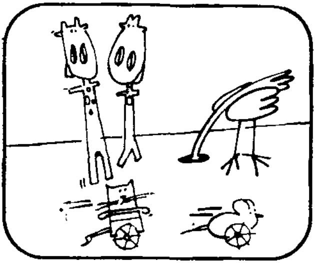
Выйдя из зоопарка, Боб обратился к Элен.
Боб. Ты не пересчитала жирафов и страусов?
Элен. Нет, а сколько их было?
Боб. Сосчитай сама. Всего у страусов и жирафов было 30 глаз и 44 ноги.



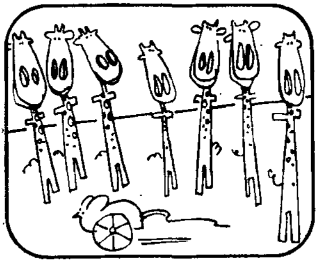
Элен сразу сообразила: 30 глаз означает, что в вольере было 15 животных.



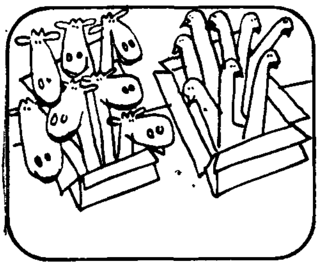
Элен. Я могла бы перебрать все возможные случаи от 0 жирафов и 15 страусов до 15 жирафов и 0 страусов, но в этом нет надобности.



Элен. Если бы все 15 животных ходили на 2 ногах, то всего у них было бы 30 ног.



Элен. Но ты, Боб, сказал, что у 15 животных 44 ноги, поэтому 14 ног «лишних». Они могут принадлежать только жирафам. Значит, в вольере 7 жирафов.



Боб. Все правильно! А раз в вольере 7 жирафов, то страусов должно быть 8.

Двуногие и четвероногие

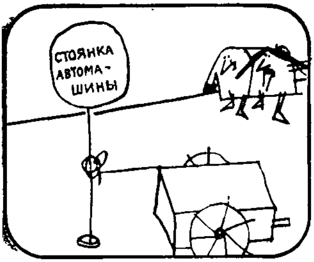
Идея, позволившая Элен найти решение задачи, проста, но, может быть, вам хочется проверить ответ алгебраически? Сходится ли ваш ответ с тем, который получился у Элен?

А вот забавная головоломка, придуманная по образу и подобию предыдущей задачи, но требующая для решения иного подхода. На арене небольшого цирка выступает группа наездников. Если пересчитать участников номера (лошадей и всадников) по головам и ногам, то всего наберется 18 голов и 50 ног. Кроме того, в зверинце при цирке содержатся дикие животные. Если пересчитать их по головам и ногам, то получится 11 голов и 20 ног. Среди них четвероногих вдвое больше, чем двуногих. Сколько наездников и лошадей выступает в цирке и сколько диких животных содержится в его зверинце?

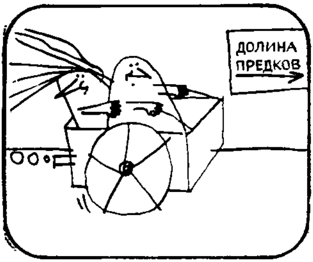
Вы без особого труда найдете, что в цирке выступают 11 наездников на 7 лошадях. Но когда вы попытаетесь определить число диких животных, то, к своему удивлению, получите отрицательное число.

Удастся ли вам решить задачу самостоятельно, не заглядывая в конец книги?

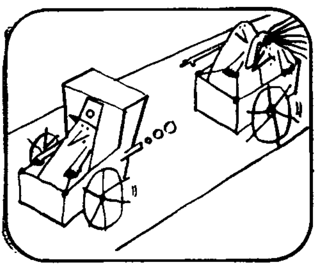
Столкновение на полном ходу



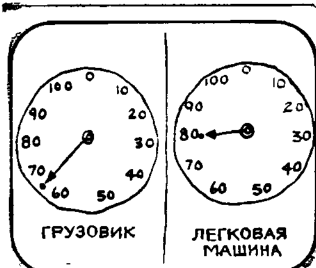
Когда друзья дошли до того места, где стояла спортивная машина Боба, он предложил подвести Элен к дому, куда недавно переехали ее родители.



По дороге Боб придумал для Элен хорошую задачку.

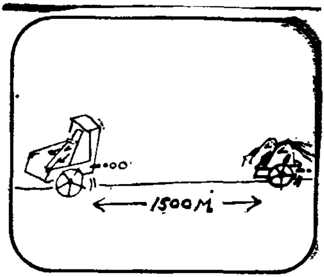


Боб. Видишь вон тот грузовик впереди? Он гонит вовсю, но я постараюсь его догнать.

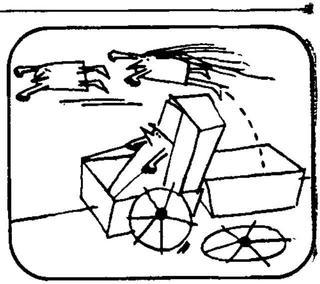


Боб. Предположим, что грузовик делает 65 км/ч, а я еду со скоростью 80 км/ч.

Боб. Предположим также, что мы находимся сейчас в 1500 м от грузовика.

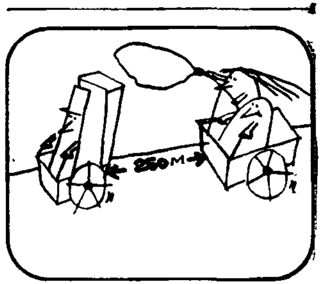


Боб. Если шофер грузовика и я будем выдерживать каждый свою скорость и я не сверну, мы заведомо врежемся в грузовик. Вот тебе и задачка, Элен: на каком расстоянии от грузовика мы будем за 1 мин до столкновения?



Элен. Ты мог бы придумать задачку потруднее. За 1 мин до столкновения нас будет разделять 250 м.

Элен не ошиблась. Не можете ли вы объяснить, каким образом она сумела так быстро решить задачу?



От конца к началу

Разумеется, задачу можно решать алгебраически, хотя решение получается довольно громоздким. Элен придумала неожиданный ход, позволивший получить ответ, не прибегая к алгебре: она догадалась, что задачу можно решать от конца к началу!

Грузовик развивает скорость 65 км/ч, а Боб едет со скоростью 80 км/ч. Следовательно, Боб движется относительно грузовика со скоростью 15 км/ч, или 15 000 м/ч, что составляет 250 м/мин. Значит, за минуту до столкновения легковая машина, в которой едут Боб и Элен, находится в 250 м позади грузовика.

Мы знаем также, что, когда Боб закончил рассказывать Элен задачу, их автомашина находилась в 1,5 км позади грузовика, но эта информация не нужна для решения задачи: ответ получается одним и тем же независимо от начального расстояния между машинами.

Следующие две классические головоломки также решаются «обратным ходом».

1. Два космических корабля сближаются, двигаясь по прямой навстречу друг другу. Один корабль летит со скоростью 8 км/мин, другой — со скоростью 12 км/мин. Предположим, что в некоторый момент времени корабли находятся на расстоянии ровно 5000 км друг от друга. На каком расстоянии они будут находиться друг от друга за 1 мин до столкновения?

В этой задаче так же, как и в предыдущей, ответ не зависит от начального расстояния между кораблями. Оно лишь вводит людей в заблуждение, поскольку те начинают думать, будто задачу нужно решать, следя за тем, как уменьшается со временем расстояние между кораблями. Задача решается легко и просто, если понять, что корабли сближаются со скоростью 20 км/мин и, следовательно, за 1 мин до столкновения они будут находиться на расстоянии 20 км друг от друга.

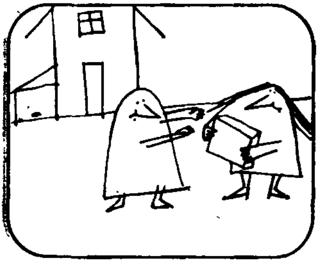
2. Некоему специалисту по молекулярной биологии удалось вывести редкую разновидность бактерий. Ежечасно каждая бактерия делится на 3 части, причем каждая часть мгновенно достигает размеров взрослой бактерии и час спустя претерпевает деление на 3 части.

Ровно в полдень биолог положил 1 бактерию в стерильный контейнер с питательной средой. К полночи контейнер оказался наполненным бактериями до отказа. Когда контейнер наполнился на одну треть?

Как и предыдущие задачи, эта головоломка решается «обратным ходом»: ясно, что на одну треть контейнер заполнился к 11 часам вечера, за час до полуночи.

А теперь мы предлагаем вам проверить свою сообразительность на новом замечательном варианте последней задачи. Все условия остаются прежними, за исключением одного: ровно в полдень биолог положил в стерильный контейнер с питательной средой не одну, а *три* бактерии. Когда наполнится контейнер? Ответ приведен в конце книги.

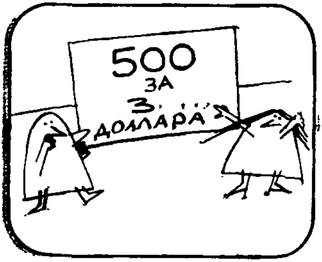
Загадочная покупка



Когда друзья доехали до дома, где жили родители Элен, она вручила отцу сверток.

Элен. Здесь то, что ты собирался купить для дома, папочка!

Мистер Браун. Спасибо, дочка! А сколько это стоило?



Элен. Пятьсот стоили 3 доллара.

Мистер Браун. 3 доллара? Значит, по 1 доллару за штуку.

Элен. Правильно, папочка.

Что, по-вашему, Элен купила в подарок отцу?

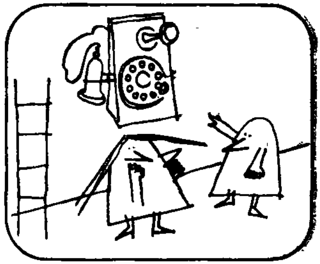
Плата поштучно

Возможно, вы догадались, что слово «пятьсот» может иметь 2 значения: число пятьсот и 3 цифры 500, написанные подряд. Если одна цифра стоит 1 доллар, то 3 цифры стоят 3 доллара: Элен купила три цифры для номера дома, в котором живут ее родители.

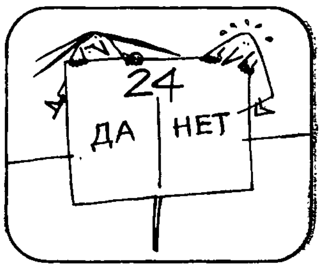
Эта задача-шутка наглядно показывает, что в поисках решения иной раз бывает полезно перечитать условия задачи.

Как отгадать номер телефона?

Боб. Кстати, Элен, ты до сих пор не дала мне номер своего нового телефона.

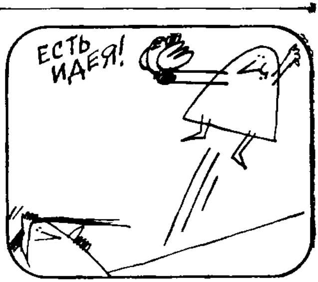


Элен. Ты знаешь, мы уговорились не сообщать его никому, но для тебя я готова нарушить уговор. Можешь задать мне любые 24 вопроса о номере телефона, на которые можно ответить «да» или «нет», и я отвечу на них.



Боб. Помилуй, Элен! Семизначных телефонных номеров почти 10 млн. Как я смогу отгадать один из них, задав всего 24 вопроса?
Элен. Подумай хорошенько, Боб, и я уверена, что ты сумеешь отгадать мой телефонный номер.

Боб не обманул ожиданий Элен и вскоре действительно придумал простой способ, позволяющий отгадывать любой семизначный телефонный номер, задавая не более 24 вопросов. Придумав такой способ, вы сможете испытать его на своих друзьях и знакомых.



Дихотомия, или разбиение на две части

Боб догадался, что с помощью вопросов, допускающих ответы «да» и «нет», выделенный элемент множества лучше всего искать, придерживаясь следующей стратегии. Если множество содержит четное число элементов, то его следует разделить на две равные части, содержащие одинаковое число элементов. Если множество содержит нечетное число элементов, то его следует разделить на две части так, чтобы они как можно меньше отличались по числу элементов. После того как множество разделено на две части, следует спросить, указывая на одну из них, содержится ли в ней выделенный элемент. Получив ответ и выбрав ту из двух частей, которая содержит выделенный элемент, надлежит повторить всю процедуру сначала. После конечного числа шагов (зависящего от числа элементов в исходном множестве) останется подмножество, содержащее только выделенный элемент — тот самый, который требовалось найти.

Чтобы найти выделенный элемент в множестве из 2 элементов, достаточно задать 1 вопрос, отвечать на который можно только «да» или «нет». В множестве из 4 элементов выделенный элемент будет найден за 2 таких вопроса, в множестве из 8 элементов — за 3 вопроса, в множестве из 16 элементов — за 4 вопроса и т. д. В общем случае n вопросов, допускающих ответы типа «да» или «нет», достаточно, чтобы найти выделенный элемент в множестве из 2^n элементов.

В задаче о телефонном номере 24 вопроса позволяют отгадать любое число от 1 до $2^{24} = 16\,777\,216$, что больше 9 999 999 — «наибольшего» из семизначных телефонных номеров. Двадцати трех вопросов может не хватить, так как число $2^{23}=8\,388\,608$ меньше некоторых семизначных телефонных номеров.

Прежде всего Бобу нужно спросить у Элен: «Номер твоего телефона больше 5 000 000?» Ответ на этот вопрос позволит Бобу отбросить половину номеров и тем самым вдвое сузить круг дальнейших поисков. Продолжая дихотомию, он заведомо «попадет» в номер телефона Элен, задав не более 24 вопросов.

Большинство людей с трудом верят, что с помощью 24 вопросов, допускающих ответы «да» или «нет», можно отгадать любое число от 1 до 16 777 216, поскольку не сознают, как быстро возрастают члены геометрической прогрессии со знаменателем 2. Именно этот чрезвычайно быстрый рост позволяет сравнительно легко отгадывать любое задуманное слово, задавая тому, кто его задумал, только вопросы, допускающие ответы «да» или «нет». Если вы достаточно поднаторели в дихотомии, то, хотя задуманное слово может означать что угодно, обычно его можно отгадать, задавая менее 20 вопросов.

Описанную нами процедуру отгадывания семизначного номера телефона специалисты по вычислительной технике называют алгоритмом двоичной сортировки. На том же принципе основан остроумный фокус с отгадыванием чисел. Необходимый реквизит состоит из 6 карточек, показанных на рис. *1*.

1

1	3	5	7	9	11	13	15
17	19	21	23	25	27	29	31
33	35	37	39	41	43	45	47
49	51	53	55	57	59	61	63

2	3	6	7	10	11	14	15
18	19	22	23	26	27	30	31
34	35	38	39	42	43	46	47
50	51	54	55	58	59	62	63

4	5	6	7	12	13	14	15
20	21	22	23	28	29	30	31
36	37	38	39	44	45	46	47
52	53	54	55	60	61	62	63

8	9	10	11	12	13	14	15
24	25	26	27	28	29	30	31
40	41	42	43	44	45	46	47
56	57	58	59	60	61	62	63

16	17	18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	29	30	31
48	49	50	51	52	53	54	55
56	57	58	59	60	61	62	63

32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47
48	49	50	51	52	53	54	55
56	57	58	59	60	61	62	63

Пусть кто-нибудь из зрителей задумает любое число от 1 до 64. Вручив ему карточки, попросите отобрать те из них, на которых стоит задуманное им число, и вернуть их вам. Получив карточки, вы сразу же называете задуманное число.

Секрет фокуса открывается просто: вы суммируете числа, стоящие в верхнем левом углу возвращенных вам карточек. Их сумма равна задуманному числу.

Карточки построены по системе, которая станет ясной, если все числа от 1 до 63 записать в двоичной системе, как это показано на рис. 2. Числа слева

2

Десятичная запись	Двоичная запись					
↓	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
0						0
1						1
2					1	0
3					1	1
4				1	0	0
5				1	0	1
6				1	1	0
7				1	1	1
8			1	0	0	0
9			1	0	0	1
10			1	0	1	0
11			1	0	1	1
12			1	1	0	0
13			1	1	0	1
14			1	1	1	0
15			1	1	1	1
16		1	0	0	0	0
17		1	0	0	0	1
18		1	0	0	1	0
19		1	0	0	1	1
20		1	0	1	0	0
21		1	0	1	0	1
22		1	0	1	1	0
23		1	0	1	1	1
24		1	1	0	0	0
25		1	1	0	0	1
26		1	1	0	1	0
27		1	1	0	1	1
28		1	1	1	0	0
29		1	1	1	0	1
30		1	1	1	1	0
31		1	1	1	1	1

Десятичная запись	Двоичная запись					
↓	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
32	1	0	0	0	0	0
33	1	0	0	0	0	1
34	1	0	0	0	1	0
35	1	0	0	0	1	1
36	1	0	0	1	0	0
37	1	0	0	1	0	1
38	1	0	0	1	1	0
39	1	0	0	1	1	1
40	1	0	1	0	0	0
41	1	0	1	0	0	1
42	1	0	1	0	1	0
43	1	0	1	0	1	1
44	1	0	1	1	0	0
45	1	0	1	1	0	1
46	1	0	1	1	1	0
47	1	0	1	1	1	1
48	1	1	0	0	0	0
49	1	1	0	0	0	1
50	1	1	0	0	1	0
51	1	1	0	0	1	1
52	1	1	0	1	0	0
53	1	1	0	1	0	1
54	1	1	0	1	1	0
55	1	1	0	1	1	1
56	1	1	1	0	0	0
57	1	1	1	0	0	1
58	1	1	1	0	1	0
59	1	1	1	0	1	1
60	1	1	1	1	0	0
61	1	1	1	1	0	1
62	1	1	1	1	1	0
63	1	1	1	1	1	1

записаны в десятичной системе. Справа от каждого числа указано, как оно записывается в двоичной системе. Шесть чисел вверху таблицы означают степени числа 2, участвующие в двоичной записи чисел.

На рис. *1* в левой верхней карточке выписаны (в десятичной системе) все числа, у которых в последнем столбце их двоичной записи стоит единица. На карточке внизу справа выписаны все числа, у которых единица стоит в первом столбце их двоичной записи. Аналогичным образом устроены и остальные карточки.

Карточки для отгадывания чисел можно составлять на основе не только двоичной, но и любой другой системы счисления. Например, с помощью рис. *3* можно составить карточки для отгадывания любого

3

ДЕСЯТИЧНАЯ ЗАПИСЬ ↓	ТРОИЧНАЯ ЗАПИСЬ		
	3^2	3^1	3^0
1			1
2			2
3		1	0
4		1	1
5		1	2
6		2	0
7		2	1
8		2	2
9	1	0	0
10	1	0	1
11	1	0	2
12	1	1	0
13	1	1	1
14	1	1	2
15	1	2	0
16	1	2	1
17	1	2	2
18	2	0	0
19	2	0	1
20	2	0	2
21	2	1	0
22	2	1	1
23	2	1	2
24	2	2	0
25	2	2	1
26	2	2	2

числа от 1 до 26 на основе троичной системы. Над каждым столбцом справа указана соответствующая степень числа 3 (именно она должна стоять в левом верхнем углу карточки). Если в столбце стоит единица, то число вписывается в нужную карточку один раз. Если в столбце стоит двойка, то число вписывается в карточку дважды.

Три карточки для отгадывания любого числа от 1 до 26, составленные на основе этого правила, приведены на рис. *4*.

4

1	14-14
2-2	16
4	17-17
5-5	19
7	20-20
8-8	22
10	23-23
11-11	25
13	26-26

3	15-15
4	16-16
5	17-17
6-6	21
7-7	22
8-8	23
12	24-24
13	25-25
14	26-26

9	18-18
10	19-19
11	20-20
12	21-21
13	22-22
14	23-23
15	24-24
16	25-25
17	26-26

Пусть кто-нибудь задумает любое число от 1 до 26. Попросите его отобрать карточки с задуманным числом и, возвращая их вам, назвать, сколько раз оно встречается на каждой из них. При суммировании ключевые числа тех карточек, на которых задуманное число встречается дважды, необходимо удвоить.

Возможно, вы захотите расширить набор с трех до шести троичных карточек. Как мы уже знаем, шесть двоичных карточек позволяют отгадывать любое число от 1 до 63. Шесть троичных карточек позволяют отгадывать любое число от 1 до 728. Теперь уже вам ясно, каким образом можно составить карточки для отгадывания чисел на основе системы счисления с любым основанием больше 3. Например, если мы остановим свой выбор на системе счисления с основанием 4, то одни числа будут встречаться на карточках по одному разу, другие — дважды, а третьи — трижды, и при суммировании вам придется одни ключевые числа брать сами по себе (с коэффициентом 1), другие — удвоенными, а третьи — утроенными.

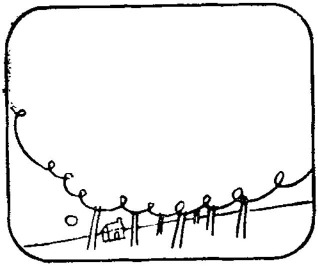
Четверичные карточки показывают, что «троичная сортировка» в некоторых отношениях превосходит двоичную. Если мы будем последовательно делить множество не на 2, а на 3 части и каждый раз нам будут говорить, какая из частей содержит выделенный элемент, то найти его можно, задавая меньше вопросов. Разумеется, сами вопросы становятся более сложными: если раньше они требовали «двоичных» ответов («да» или «нет»), то теперь ответ на каждый вопрос должен быть «троичным».

Необычайные возможности, таящиеся в троичной сортировке, наглядно демонстрирует следующий карточный фокус. Пусть кто-нибудь из зрителей задумает любую из $3^3 = 27$ отобранных вами карт. Сдайте отобранные карты в три стопки, переворачивая каждую карту перед тем, как выложить ее на стол, вверх лицом, попросите зрителя указать, в какой из стопок находится задуманная им карта, после чего сложите стопки вместе и повторите всю процедуру еще дважды. Сложив стопки в третий раз, попросите зрителя назвать вслух задуманную карту и, сняв верхнюю карту, покажите ее всем зрителям. У вас в руках окажется задуманная карта! Фокус можно показывать сколько угодно раз, не опасаясь «осечек» — их нет и быть не может!

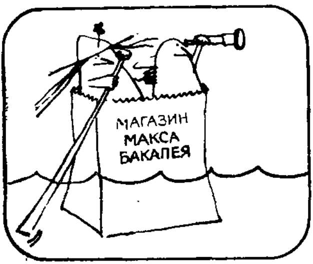
Секрет фокуса прост: необходимо лишь всякий раз, когда вы складываете стопки, держа карты вверх рубашкой, стопку с задуманной картой класть поверх остальных. Неукоснительно придерживаясь этого правила, вы будете автоматически производить троичную сортировку карт, которая и заставит «всплыть» задуманную карту из глубин.

Нетрудно понять, почему так происходит. Принцип здесь тот же, что и при отгадывании телефонного номера, только множество делится каждый раз не на две, а на три равные или почти равные части. После первой сдачи задуманная карта оказывается среди 9 верхних карт, после второй сдачи она оказывается уже среди 3 верхних карт, а после третьей сдачи оказывается первой картой сверху. Если вы проделаете всю процедуру от начала до конца, держа карты вниз рубашкой и сдавая их снизу, то сможете наблюдать, как задуманная карта постепенно, в три этапа, спускается «на дно» перевернутой мини-колоды. Автоматическая сортировка элементов различных множеств, основанная на аналогичных принципах, играет важную роль в современной информатике — науке о накоплении, хранении и обработке информации.

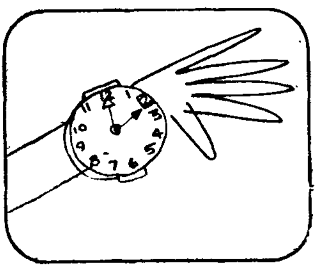
Унесенная ветром



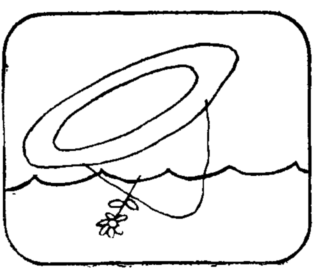
Боб и Элен решили провести летние каникулы в лесах штата Мэн, где в хижине жил дядюшка Генри.



Чтобы добраться до хижины, Бобу и Элен пришлось нанять лодку и идти на веслах вверх по течению.

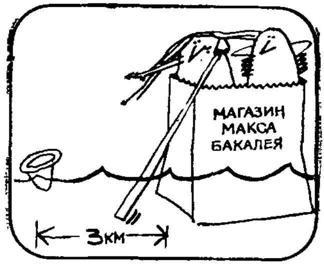


Разумеется, грести вызвался Боб, а Элен села на руль. В 2 часа дня Элен сняла свою новую соломенную шляпку и повесила ее на румпель у себя за спиной.

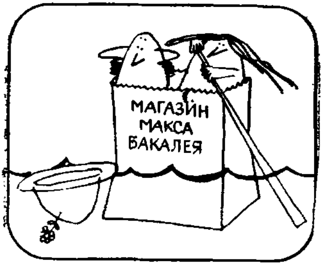


Порывом ветра шляпку унесло, но ни Элен, ни Боб не заметили, когда это случилось.

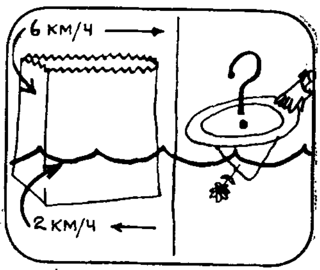
Они успели отмахать на веслах 3 км вверх по течению, прежде чем Элен вспомнила о шляпке.
Элен. Стой! Где моя новая шляпка? Должно быть, ее унесло ветром.



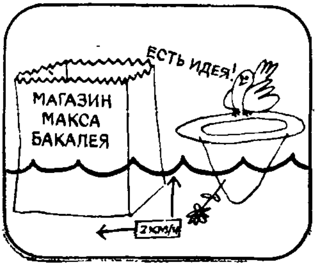
Делать нечего! Пришлось повернуть назад. Боб налег на весла, и некоторое время спустя лодка настигла шляпку, плывшую по реке.

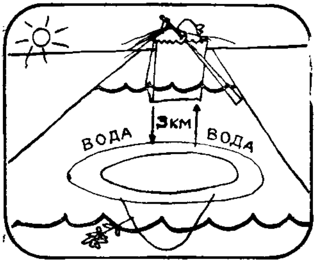


Предположим, что лодка всегда движется по воде со скоростью 6 км/ч, а скорость течения реки 2 км/ч.
В котором часу Боб и Элен догнали шляпку?

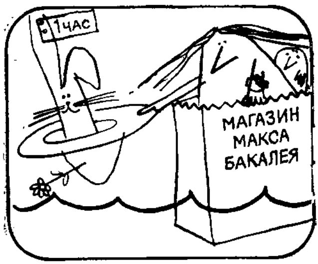


Вам удалось набрести на какую-нибудь идею, позволяющую легко и просто решить задачу? Хотите верьте, хотите проверьте, но течение одинаково сказывается на движении лодки и шляпки, и его воздействием можно пренебречь.





Значит, задачу можно решать так, как если бы лодка двигалась в стоячей воде, Боб и Элен уплыли от шляпки на расстояние 3 км, а затем вернулись, заметив пропажу. Их путь туда и обратно составил 6 км.



Так как лодка развивает скорость 6 км/ч, то весь путь туда и обратно Боб и Элен проделали за 1 ч. Следовательно, когда Элен выудила из воды шляпку, было 3 часа дня.

Относительная скорость

Потеряв шляпку, Элен и Боб сначала уплывают от нее вверх по реке, а затем, обнаружив пропажу, пускаются вдогонку за шляпкой вниз по реке. Время, затрачиваемое ими на весь путь туда и обратно (от шляпки и к шляпке), не зависит от скорости течения реки, потому что шляпка плывет по течению. В другом варианте задачи путь туда и обратно отсчитывается не от предмета, плывущего по течению, а от какого-нибудь неподвижного предмета на берегу.

Предположим, что никакого течения в реке нет. Боб и Элен идут на веслах 3 км вверх по реке от того места, где они взяли напрокат лодку, затем поворачивают и возвращаются назад. Весь путь туда и обратно занимает у них 20 мин.

Предположим теперь, что река, как ей и положено, течет от истока к устью со скоростью 2 км/ч, как в нашей задаче. Боб и Элен сначала поднимутся на веслах на 3 км вверх по реке, а затем снова вернутся туда, где взяли напрокат лодку. Сколько времени им придется затратить на весь путь туда и обратно на этот раз: больше или меньше 20 мин?

Трудно устоять перед искушением и не сказать, что время в пути останется прежним (20 мин), пояснив свою мысль примерно так: при движении вверх по реке течение уменьшает скорость лодки ровно на столько, на сколько увеличивает скорость лодки, идущей вниз по реке.

Это рассуждение не верно. Почему?

Правильное решение задачи мы получим, приняв во внимание, что на преодоление 3 км вверх по реке уходит *больше времени,* чем на преодоление тех же 3 км при движении вниз по реке. Следовательно, течение замедляет лодку дольше, чем подгоняет ее, и на путь туда и обратно по проточной воде требуется больше времени, чем на тот же путь в стоячей воде. Наш вывод нетрудно проверить, записав соответствующие алгебраические уравнения.

Те же соображения применимы к задачам о самолетах, летящих по ветру и против ветра. Если на преодоление расстояния из *А* в *В* и обратно в безветренную погоду самолет затрачивает определенное время, то на преодоление того же пути в ветреную погоду времени потребуется заведомо больше независимо от того, куда дует ветер: от *А* к *В* или от *В* к *А*.

Не менее известна еще одна хорошая задача на относительное движение. Девушка садится в последний вагон поезда. Обнаружив, что все места в вагоне заняты, она оставляет в тамбуре тяжелый чемодан и в тот самый момент, когда за окном проплывает фабрика детских игрушек «Зайки из байки», отправляется на поиск свободного места, идя размеренным шагом, и через 5 мин доходит до первого вагона. Убедившись, что свободных мест нигде нет, девушка поворачивается и идет назад с той же скоростью. В тот момент, когда она возвращается к чемодану, за окном мелькает магазин бакалейных товаров «Супы, крупы и ступы», находящийся от фабрики «Зайки из байки» на расстоянии 5 км. С какой скоростью идет поезд?

Решение этой задачи аналогично решению задачи о шляпке Элен, унесенной ветром: знать, с какой скоростью идет девушка по вагонам и какое расстояние ей приходится пройти, совсем не нужно. Путь туда и обратно она проделывает за 10 мин. Следовательно, ее чемодан проезжает 5 км за 10 мин. Значит, поезд идет со скоростью 0,5 км/мин, или 30 км/ч.

А вот малоизвестная задача на относительное движение, способная поставить в тупик даже сильных математиков. Юноша и девушка участвуют в забеге на 100 м. К тому моменту, когда девушка пересекает линию финиша, юноша успевают пробежать 95 м, и девушка выигрывает забег с преимуществом в 5 м.

В другом забеге на ту же дистанцию девушка, чтобы уравнять шансы на победу, берет старт в 5 м позади стартовой черты. Кто выиграет второй забег, если оба спортсмена бегут с такой же скоростью, как и в первом забеге?

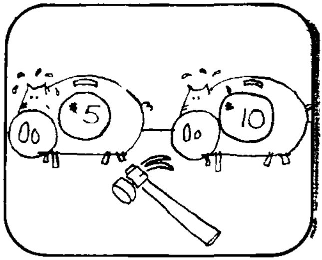
Если вы думаете, что оба участника забега пересекли линию финиша одновременно, то мы настоятельно рекомендуем поразмыслить над задачей еще немного. Может быть, вы все-таки догадаетесь, как правильно решить эту задачу? (Указание: где девушка догонит юношу?)

Еще одна забавная задачка рассказывает о божьей коровке, отравленной какими-то химикалиями и утратившей способность ориентироваться в пространстве. Божья коровка находится на одном конце метровой рейки и хочет доползти до другого конца. Каждую секунду она проползает 3 см вперед и 2 см назад. За сколько времени она доползет до другого конца рейки? (Те, кто думает, что это произойдет через 100 с, ошибаются!)

Финансовые проблемы

Друзья уже почти добрались до хижины дядюшки Генри, когда Элен предложила Бобу следующую задачу-головоломку.

Элен. Что, по-твоему, дороже: копилка, наполненная пятидолларовыми золотыми монетами, или та же копилка, наполненная десятидолларовыми золотыми монетами?



Боб немного помедлил, но ответил правильно и в свою очередь задал Элен задачу.

Боб. У одного шотландца 44 бумажных доллара и 10 карманов. Может ли он разложить деньги по карманам так, чтобы число долларовых купюр во всех карманах было различно?

Принцип Дирихле

В копилке, наполненной пятидолларовыми золотыми монетами, золота столько же, сколько в копилке с десятидолларовыми золотыми монетами, поэтому обе копилки содержат золота на одну и ту же сумму.

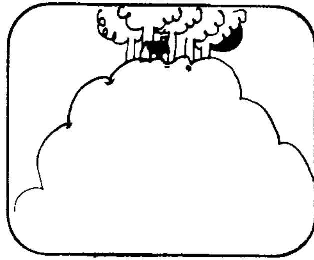
Задача о шотландце, раскладывающем по 10 карманам 44 бумажных доллара, гораздо труднее. Выясним, что произойдет, если мы разложим по карманам минимальное число купюр. Даже если мы оставим первый карман пустым (положив в него чисто символически 0 долларов), а в каждый из следующих карманов положим на 1 доллар больше, чем в предыдущий, то всего нам понадобится $1+2+3+4+5+6+7+8+9=45$ долларов, что больше тех 44 долларов, которые были у шотландца. А стоит лишь нам изъять хотя бы один доллар из какого-нибудь кармана, как в двух карманах долларовых купюр окажется поровну.

Основную идею такого рода рассуждений математики называют принципом Дирихле. Мы называли его также принципом «птичка в клетке». Суть его кратко можно сформулировать так: трех птичек невозможно рассадить по двум клеткам так, чтобы в каждой клетке оказалось по птичке. А вот еще один пример занимательной задачи, в решении которой используется принцип Дирихле. Предположим, что в городе не более 200 000 жителей. Можно ли утверждать, что по крайней мере у двух из них число волос на голове одинаково?

Такое утверждение может показаться невероятным, но принцип Дирихле убеждает нас в том, что ответ на этот вопрос должен быть утвердительным. Судите сами. Число волос на голове у человека не превышает 100 000. Если среди жителей города нет двух людей с одинаковым числом волос на голове, то один из них может быть совершенно лысым, у другого может расти на голове 1 волос, у третьего 2 волоса и т. д. Но как только мы дойдем до 100 001-го человека, как число волос у него на голове непременно окажется таким же, как у кого-то из жителей города. А так как население города составляет около 200 000 человек, то среди его жителей найдется около 100 000 таких, у которых число волос на голове будет совпадать с числом волос на голове у кого-то другого!

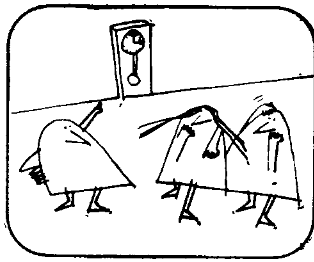
Часы дядюшки Генри

Едва Элен успела решить предложенную Бобом задачку, как они дошли до хижины дядюшки Генри. Хижину дядюшка построил своими руками, и в ней не было ни электричества, ни телефона, ни радио, ни телевизора.



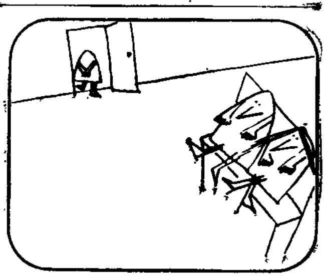
Дядюшка Генри сразу обратился к ним с вопросом.

Генри. Который сейчас час?

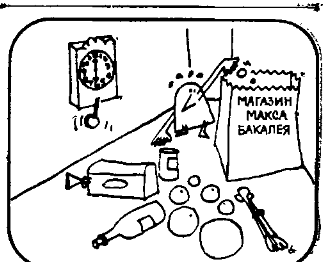


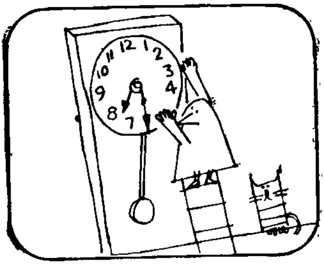
Элен. У меня часов вообще не было, а часы Боба мы потеряли. А разве у вас нет стенных часов?

Генри. Часы-то есть, да вот беда: вчера вечером я забыл завести их. Вы пока побудьте тут, а я схожу в город, узнаю, который час, и заодно раздобуду чего-нибудь съестного.

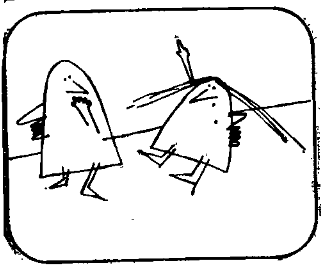


Дядюшка Генри отправился в соседний городок и полтора часа провел там в бакалейном магазине.

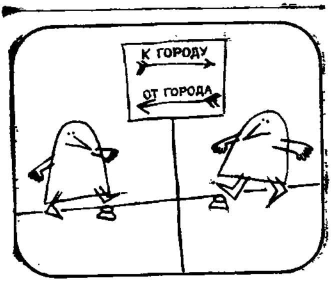




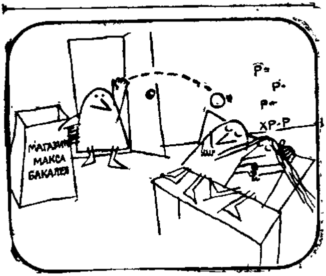
Вернувшись домой, дядюшка Генри сразу же перевел стрелки часов.



Элен. Дядюшка, вы уверены, что часы теперь показывают правильное время? Ведь вы не можете знать, сколько времени пробыли в пути, если не знаете, сколько прошли и с какой скоростью.



Генри. Ни к чему все это, Элен! Расстояние от моей хижины до городка никто не мерил, да и скорость, с которой я хожу, тоже. Знаю лишь, что туда и обратно я шел одной и той же дорогой, одним и тем же шагом. Этого достаточно, чтобы правильно поставить часы. Я так всегда делаю.



Предположим, что дядюшка Генри завел часы перед тем, как выйти из дома, и часы в бакалейном магазине показывают точное время.
Каким образом дядюшка Генри ухитряется узнавать точное время по возвращении домой?

Проверьте ваши часы

Задача решается просто, если догадаться, что перед выходом из дома дядюшка Генри мог завести свои остановившиеся часы и по ним определить, сколько времени его не было дома. Поставить правильно стрелки часов дядюшка Генри, разумеется, не мог, так как не знал точное время, но ничто не мешало ему запомнить, сколько было на часах, когда он уходил из дома.

Вернувшись, дядюшка Генри взглянул на часы и узнал, сколько времени ушло у него на дорогу туда и обратно и на визит в бакалейный магазин. По часам, висевшим в магазине, дядюшка Генри узнал, сколько времени он там пробыл, и вычел это время из общей продолжительности своего похода в город. Тем самым дядюшка Генри узнал, сколько времени заняла у него дорога туда и обратно. Поскольку дядюшка Генри ходит с постоянной скоростью, то на дорогу от городка до дома времени ушло вдвое меньше. Прибавив время, которое ушло на обратную дорогу, к точному времени своего выхода из магазина, которое он установил по висевшим там часам, дядюшка Генри узнал точное время своего возвращения домой и смог перевести стрелки своих часов так, что те стали показывать точное время.

Коль скоро мы заговорили о стрелках часов, то нельзя не упомянуть об одном каверзном вопросе, на который девять людей из десяти отвечают неправильно. Сколько раз от полудня до полуночи часовая стрелка совпадает с минутной? Большинство людей отвечают, что стрелки совпадают 11 раз, хотя в действительности стрелки совпадают 10 раз. Желающие могут убедиться в этом, переводя стрелки на своих часах.

Этот несколько удивительный факт позволяет легко и просто решить задачу, которая кажется неразрешимой без использования алгебраических уравнений. Часы имеют секундную стрелку, соосную с часовой и минутной стрелками. В полдень все 3 стрелки сливаются в одну. Успевают ли все три стрелки совпасть еще раз, прежде чем наступит полночь?

Выясним сначала, много ли на окружности циферблата найдется точек, в которых часовая стрелка совпадает с минутной. Казалось бы, что таких точек 12, но, как мы уже знаем, в промежуток с 12 часов дня до 12 часов ночи минутная стрелка совпадает с часовой только 10 раз. Поскольку в полдень и в полночь часовая стрелка также совпадает с минутной, то это означает, что всего на окружности циферблата имеется 11 различных точек, в которых часовая стрелка совпадает с минутной. Как показывают аналогичные рассуждения, секундная стрелка совпадает с минутной в 59 различных точках на окружности циферблата. Следовательно, точки совпадения минутной стрелки с часовой разделены 11 равными промежутками времени, а точки совпадения минутной стрелки с секундной разделены 59 равными промежутками времени.

Пусть A — величина любого из 11 промежутков, а B — любого из 59 промежутков (обе величины измерены в одинаковых единицах времени). Если у чисел A и B есть общий делитель K, то на окружности циферблата найдется K точек, в которых оба совпадения (минутной стрелки с часовой и секундной стрелки с минутной) происходят одновременно. Но числа 11 и 59 не имеют общего делителя. Следовательно, с полудня до полуночи часовая, минутная и секундная стрелки ни разу не совпадают. Иначе говоря, все 3 стрелки совпадают только в 12 часов дня и в 12 часов ночи.

А вот две шуточные задачи о часах, на которых непременно «даст осечку» кто-нибудь из ваших друзей.

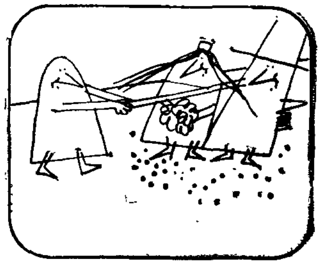
1) Часы с боем успевают пробить 6 часов за 5 с. За сколько времени они пробьют 12 часов?

2) Дядюшка Генри так устал с дороги, что лег спать в 9 часов вечера с намерением встать в 10 часов утра. Перед сном он поставил будильник на 10 часов и через 20 мин уже безмятежно спал. Сколько времени успеет поспать дядюшка Генри до звонка будильника?

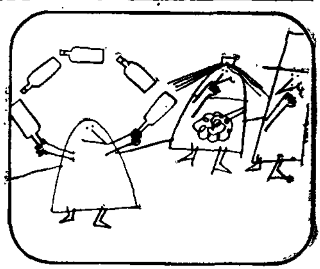
Ответы на обе задачи приведены в конце книги.

Истина в вине

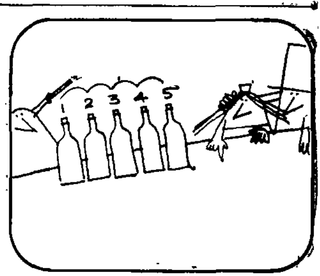
В последний день каникул Боб и Элен сообщили дядюшке Генри, что решили пожениться.
Дядюшка Генри. Рад за вас, мои милые. Нужно отметить этот знаменательный день!



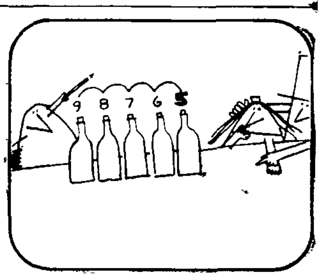
Дядюшка Генри достал из погреба 5 бутылок вина, припасенных для торжественного случая, но тут возникло непредвиденное затруднение: трое обитателей хижины никак не могли прийти к единому мнению относительно того, какую бутылку откупорить первой.

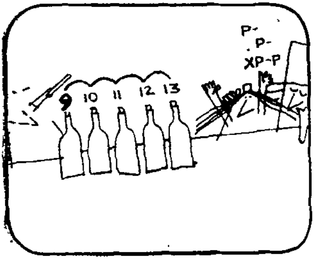


Дядюшка Генри. Постойте, я знаю, как решить спор! Выстроим все бутылки в ряд и пересчитаем их по разработанной мной системе. Вот как это делается: раз, два, три, четыре, пять...

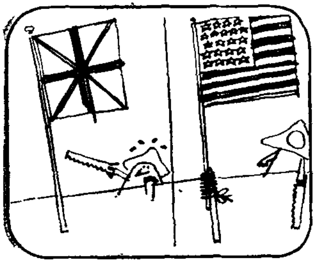


Дядюшка Генри. ...шесть, семь, восемь, девять...



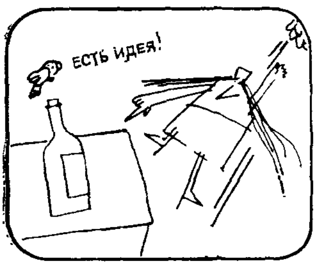


Дядюшка Генри. ...десять, одиннадцать, двенадцать, тринадцать ... Понятно?

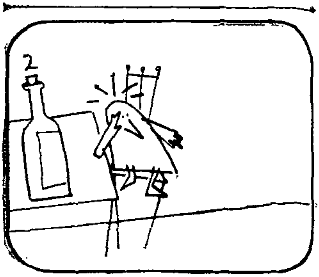


Боб. Понятно-то, понятно, ио сколько вы еще собираетесь считать?

Дядюшка Генри. Как вы помните, в 1976 г. мы праздновали 200-летие независимости. Вот я и досчитаю до 1976 г.



Элен (со стоном). Милый дядюшка, на это у вас уйдет еще 200 лет. Впрочем, минутку... Есть идея! Считать по бутылкам совсем не обязательно! Я могу вам сразу сказать, на какой бутылке окончится счет.

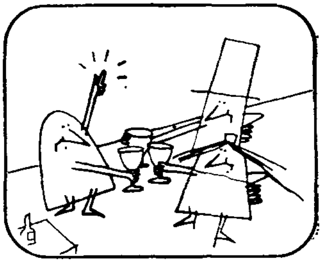


Элен. Число 1976 придется на вторую бутылку.

Дядюшка Генри ие поверил Элен и упрямо продолжал пересчитывать бутылки. Через 15 мин он досчитал до 1976 и убедился, что счет, как н предсказывала Элен, окончился на второй бутылке.

Дядюшка Генри. Как это тебе удалось, Элен?

Не могли бы и вы предложить способ, позволяющий безошибочно определять, на какой бутылке закончится счет, независимо от того, до какого числа мы будем считать?



Арифметика вычетов

Элен догадалась, что утомительного счета на бутылках от 1 до 1976 можно избежать, если воспользоваться так называемой арифметикой вычетов, или теорией сравнений. Два числа a и b называются сравнимыми по модулю c, если при делении на c они дают одинаковые остатки. Число c называется модулем сравнения, а остаток от деления любого числа на c — вычетом этого числа по модулю c.

Обычные часы могут служить прекрасным примером конечной арифметики вычетов по модулю 12, содержащей 12 чисел. Действительно, вычет числа 12 по модулю 12 равен 0 (то есть число 12 сравнимо с нулем по модулю 12). Предположим, что на ваших часах сейчас 12 часов. Сколько будет на ваших часах через 100 часов? Разделив 100 на 12, вы узнаете, что остаток от деления равен 4 (число 100 сравнимо с числом 4 по модулю 12). Значит, через 100 часов на ваших часах будет 4 часа.

Теперь вам ясно, что метод дядюшки Генри эквивалентен арифметике вычетов? Единственное отличие состоит в том, что каждая из 3 бутылок, стоящих в середине, соответствует двум числам, поскольку эти бутылки приходится считать и слева направо, и справа налево. Счет 8 приходится на вторую бутылку, после чего весь цикл повторяется. Следовательно, метод дядюшки Генри эквивалентен арифметике вычетов по модулю 8.

Элен оставалось лишь найти вычет числа 1976 по модулю 8, то есть разделить 1976 на 8 и найти остаток. Проделав вычисления, Элен получила остаток 0.

В арифметике вычетов по модулю 8 число 8 имеет нулевой вычет. Следовательно, счет до 1976 должен окончиться на второй бутылке.

Предположим, что вам захотелось узнать, на какой бутылке кончит считать дядюшка Генри, если вздумает дойти, например, до 12 345 678 987 654 321. Нужно ли для этого делить гигантское число на 8? Нет, если вы сообразите, как избежать утомительной процедуры. Так как число 1000 сравнимо с 0 по модулю 8, то необходимо делить на 8 только 3 последних знака — число 321. Проделав деление, вы узнаете, что интересующее вас семнадцатизначное число сравнимо с 1 по модулю 8. Следовательно, вздумай дядюшка Генри считать до этого числа, он бы закончил счет на первой бутылке.

Варьируя число бутылок, вы будете получать модели конечных арифметик вычетов по другим четным модулям. Если бутылки считать, как обычно, только слева направо, то вы получите модель конечной арифметики вычетов по любому модулю, как четному, так и нечетному.

Со счетом предметов, расположенных по кругу, связана знаменитая задача Иосифа Флавия, породившая обширную литературу и многочисленные варианты. Приведем еще один вариант этой старинной задачи в надежде, что он покажется вам забавным.

Давным-давно у одного богатого и могущественного короля была дочь, по имени Жозефина. Никто не мог сравниться с ней красотой. Сотни юношей из самых знатных родов тщетно мечтали получить ее руку и сердце. Наконец, Жозефина выбрала десять из них, которые нравились ей чуть больше других. Но прошло несколько месяцев, а Жозефина никак не могла решить, на ком из них остановить свой выбор. Король не на шутку встревожился.

— Ты знаешь, моя возлюбленная дочь,— начал он издалека, обращаясь к дочери,— что через месяц тебе исполнится семнадцать лет, а по старинному обычаю все принцессы должны выйти замуж прежде, чем достигнут этого возраста.

— Но, папочка,— возразила своенравная Жозефина,— как быть, если я не уверена, что Джордж нравится мне больше других?

— В таком случае, моя ненаглядная, обычай предписывает выбирать жениха по особому тайному ритуалу, недоступному разумению непосвященных. Хорошо, что ты мне, наконец, сказала, в чем твое затруднение. Мы решим его сегодня же, а там и за свадебку!

И король принялся объяснять дочери, как ей надлежит выбирать жениха в соответствии с требованиями старинного ритуала.

— Все десять претендентов на твою руку встанут в круг. Ты выберешь любого из них, назовешь его первым и отсчитаешь от него по часовой стрелке семнадцать человек — ровно столько, сколько лет тебе вскоре исполнится. Семнадцатому юноше придется покинуть круг. Мы отошлем его домой, подарив ему в утешение кошелек со 100 золотыми дукатами.

А ты примешься снова считать от 1 до 17, на этот раз назвав первым юношу, следующего по кругу за тем, кто выбыл. Так ты будешь продолжать до тех пор, пока из круга не выйдут все претенденты на твою руку, кроме одного. Он-то и станет твоим мужем.

Жозефина нахмурилась и сказала:

— Боюсь, как бы мне что-нибудь не напутать, папочка. Ты не возражаешь, если я возьму десять золотых дукатов и немного попрактикуюсь на них?

Король согласился. Жозефина разложила в круг 10 дукатов и принялась считать, откладывая каждый раз семнадцатую монету в сторону, пока не остался один-единственный дукат. Король был в восторге: дочь в совершенстве овладела тайным ритуалом.

Он повелел десятерым претендентам на руку принцессы собраться в тронном зале. Они выстроились в круг, и Жозефина принялась считать. Она без колебаний назвала первым Персиваля и считала до тех пор, пока в круге не остался только Джордж — тот самый юноша, за которого она тайком давно решила выйти замуж.

Как Жозефина догадалась, с кого ей следует начать счет, чтобы он закончился на милом ее сердцу Джордже?

Практикуясь на монетах, Жозефина заметила, что в круге остается третья монета, если первой назвать ту, с которой она начала счет. Поэтому войдя в круг претендентов, она уверенно начала счет с Персиваля, после которого третьим стоял Джордж.

Интересным обобщением задачи Иосифа Флавия был бы следующий карточный фокус, если бы вам удалось соответствующим образом расположить 13 карт пиковой масти. Сумеете ли вы это сделать?

Вот как должен был бы выглядеть этот фокус. В одну руку вы берете стопку карт вверх рубашкой. Отсчитав сверху 1 карту, вы кладете ее на стол и открываете. Перед вами туз пик. Затем вы отсчитываете сверху 2 карты, первую подкладываете снизу под стопку карт, которая у вас в руке, а вторую открываете и кладете на стол: перед вами двойка пик. Затем вы отсчитываете сверху 3 карты, подкладывая первые две в том же порядке, в каком вы их снимаете, под стопку карт снизу, а третью карту открываете и кладете на стол: перед вами тройка пик. Продолжая счет дальше, вы каждый раз перекладываете карты по одной сверху вниз (что эквивалентно счету по кругу в задаче Иосифа Флавия), а последнюю открываете и кладете на стол. В итоге на столе оказываются выложенными по порядку все 13 карт пиковой масти от туза до короля.

Карты в стопке должны лежать в следующем порядке (сверху вниз): туз, восьмерка, двойка, пятерка, десятка, тройка, дама, валет, девятка, четверка, семерка, шестерка, король.

Может быть вам покажется, что выстроить такую последовательность удалось лишь методом проб и ошибок после многих безуспешных попыток. Вы глубоко заблуждаетесь: для получения таких последовательностей существует очень простой алгоритм. Многие фокусники, разрабатывая трюки такого рода, действительно немало времени проводят в раздумьях над тем, как расположить карты, пока внезапная догадка не превратит задачу, над решением которой они безуспешно бились не один день, в тривиальную. Удастся ли вам разгадать, как строится последовательность в задуманном нами фокусе в духе Иосифа Флавия, прежде чем вы заглянете в ответ, помещенный в конце книги.

Глава 4

Логические находки

НЕОЖИДАННЫЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ, ТРЕБУЮЩИХ УМЕНИЯ МЫСЛИТЬ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНО

В этой главе нас будет интересовать не формальная логика, а задачи, для решения которых не нужны особые познания в математике, но необходимо умение мыслить последовательно. Некоторые из предлагаемых нами задач напоминают загадки в том смысле, что содержат умышленно введенные в их условия утверждения, способные «сбить с толку» не слишком проницательного читателя, или решения, основанные на игре слов, но в большинстве случаев мы предлагаем вам честную игру — задачи, которые имеют решение.

В том, как собранные в этой главе различные логические задачи-головоломки относятся к математике, нетрудно усмотреть некую общую тенденцию. Все математические задачи решаются при помощи рассуждений, проводимых в рамках некоторой дедуктивной системы, включающей в себя наряду с другими правилами основные законы логики. Хотя для решения любой задачи из этой главы не требуется знание формальной логики, тем не менее ведущие к решению неформальные рассуждения по существу имеют много общего с теми, которые проводят математики, физики, химики и биологи, сталкиваясь с какой-нибудь трудной проблемой.

Под «трудной проблемой» мы понимаем здесь задачу, подход к решению которой неизвестен. Разумеется, если алгоритм решения существует, то ни о какой по-настоящему трудной проблеме не может быть и речи: достаточно лишь засыпать зерна исходных данных и привести в действие жернова алгоритма, как мы получим ответ. Например, памятная всем формула корней квадратного уравнения говорит нам о том, какие действия и в какой последовательности необходимо произвести над коэффициентами уравнения, чтобы найти его корни.

И в математике, и в естественных науках интересными задачами, бросающими вызов исследователю, принято считать такие, для решения которых не существует готовых методов. Столкнувшись с такой задачей, исследователь долго, а иногда и мучительно размышляет, перебирая в памяти всю информацию, имеющую хотя бы отдаленное отношение к интересующей его теме, в надежде, что удачная догадка подскажет нужное решение. Именно поэтому решение занимательных логических задач служит великолепной тренировкой к решению важных научных проблем.

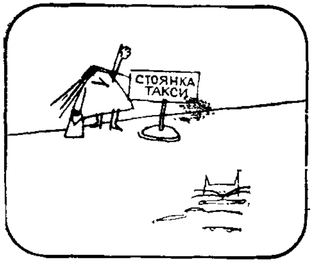
Некоторые задачи в этой главе связаны с серьезной математикой еще более тесными узами. Например, задача «В костюмах одного цвета» и следующая за ней задача легко решаются табличным методом, аналогичным широко используемому в формальной логике методу таблиц истинности. В одной из этих задач встречается важное логическое отношение — так называемая «материальная импликация». В исчислении высказываний (одном из разделов математической логики, имеющем первостепенное значение) импликацию принято обозначать знаком $\supset$ или $\rightarrow$. Отношение $A \supset B$ означает, что если A истинно, то B должно быть истинно. Одно из возможных истолкований этого логического отношения (на языке теории множеств) гласит: все элементы множества B содержатся в множестве A.

Слово «индукция» имеет по существу два различных значения. Неполная индукция — это процесс восхождения от частного к общему. Ученый, наблюдающий частные случаи (например, замечающий, что *некоторые* вороны черные), делает общее заключение (о том, что *все* вороны черные). Это заключение никогда не носит характер достоверного утверждения: вполне возможно, что на свете существует по крайней мере одна белая ворона, которая еще не попадалась на глаза наблюдателю.

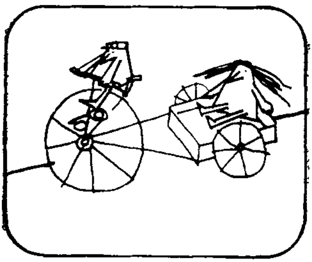
Математическая индукция, с которой вы познакомитесь в комментариях к тестам со шляпами в задаче «Аховы награды», представляет собой совершенно иной процесс, хотя и в математической индукции мы имеем дело с восхождением от частного к общему, охватывающему информацию о бесконечной последовательности частных случаев. Математическая индукция — неоценимое средство исследования почти во всех разделах математики.

Большинство задач, собранных в этой главе, по сложности и серьезности уступает задаче о шляпах. Тем не менее и они позволят вам отточить свое остроумие, научат внимательно следить за всякого рода словесными «ловушками», расставленными в условиях задачи, и в особенности оценить преимущества непредвзятого, широкого поиска возможного подхода к решению задачи. Чем больше подходов вы проанализируете, сколь бы причудливыми и экзотическими они ни были, тем больше шансов у вас на успех. В этом один из секретов всех творчески мыслящих математиков.

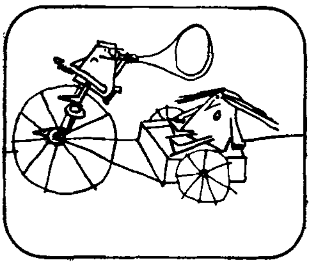
Находчивый шофер



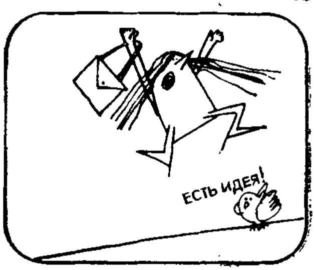
Случилось это в Нью-Йорке. Некая дама остановила такси и попросила отвезти ее домой.



По дороге она без умолку болтала и довела шофера до крайнего исступления.



Шофер. Прошу прощения, мадам, но я не слышу ни слова из того, что вы говорите. Я глух, как телеграфный столб, а мой слуховой аппарат, как назло, сегодня целый день не работает.



Услышав это, дама смолкла. Но когда она вышла у подъезда своего дома и машина скрылась за углом, она вдруг сообразила, что шофер вовсе не был глух.

Как дама догадалась, что шофер ей солгал?

Наблюдательная дама

Ситуация, с которой мы сталкиваемся в истории о болтливой даме и шофере такси, типична. Она неоднократно возникает и в повседневной жизни, и в науке: то, что на первый взгляд кажется хаотическим нагромождением фактов или цепочкой логически не связанных поступков, после тщательного анализа может предстать в ином свете и, как по мановению волшебной палочки, вдруг стать ясным и понятным.

Если вы сразу не поняли, как болтливая дама догадалась, что глухота шофера такси была мнимой, поставьте себя на место дамы и мысленно проиграйте всю вереницу событий, разыгравшихся с того момента, как дама остановила такси, до того момента, как шофер высадил ее из машины. Что бы вы сделали прежде всего, сев в такси? Назвали водителю адрес того места, куда вам нужно ехать. Но если водитель глух, то как бы он узнал, куда вас везти? Расплатившись с шофером, дама вдруг поняла, что ее обманули: если бы шофер был глухим, то как бы он услышал, куда ему следует ехать?

В логических задачах-головоломках, основанных на реальных или правдоподобных житейских ситуациях, многое нередко не договорено и молчаливо подразумевается. Не является исключением и эта задача. Например, глухой водитель вполне бы мог «прочитать» адрес по губам пассажира. Такое решение задачи вполне допустимо и свидетельствует о нетривиальности того, кто до него додумается.

В истории науки тщательный и всесторонний анализ определенной последовательности событий или явлений нередко приводил к важным открытиям. Прекрасный тому пример — разгадка языка пчел. Ученых давно интересовало, каким образом рабочая пчела, вернувшись в улей, сообщает другим рабочим пчелам, где можно взять побольше меда. Карл фон Фриш заметил, что пчела-разведчица по возвращении исполняет на летке замысловатый «танец». Не может ли характер танца быть носителем информации о направлении на источник меда и расстоянии от улья до него? Поставив серию изящных экспериментов, Карл фон Фриш доказал, что его догадка верна.

Если вам понравилась задача о шофере такси и болтливой даме, то мы можем предложить вам еще две задачи о такси.

Пассажир, которому нужно добраться до аэропорта Кеннеди, садится в такси у отеля «Уолдорф-Астория» в Нью-Йорке. Поскольку городские улицы забиты машинами и почти на каждом перекрестке возникает пробка, такси развивает среднюю скорость всего лишь 30 км/ч. Общее время в пути составляет 80 мин, и пассажир уплачивает по счетчику соответствующую сумму. В аэропорту в такси садится другой пассажир, которому по удивительному стечению обстоятельств также нужно добраться до отеля «Уолдорф-Астория». Водитель едет по тому же маршруту с той же средней скоростью, но на этот раз дорога занимает у него 1 ч 20 мин. Чем объяснить, что на дорогу туда и обратно уходит различное время?

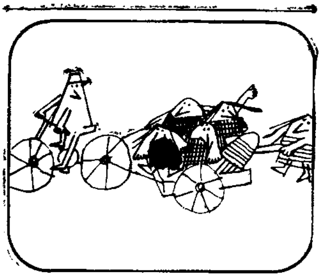
Большинство людей не сразу сознает, что различие во времени на дорогу от гостиницы до аэропорта и от аэропорта до гостиницы лишь кажущееся: 80 мин по продолжительности ничем не отличаются от 1 ч 20 мин. Испытав эту незамысловатую задачу-шутку на своих знакомых, вы убедитесь, как часто попадаются в почти не замаскированную «ловушку».

А вот еще задача о такси того же толка.

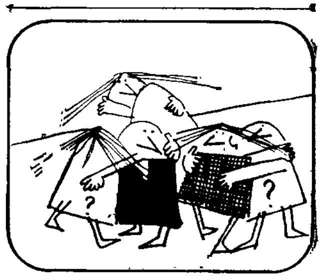
Представьте себе, что вы водитель такси. Ваша машина окрашена в желтый и черный цвета, и вы ездите на ней 7 лет. Один стеклоочиститель у машины сломан, карбюратор барахлит. Бак вмещает 20 галлонов бензина, но сейчас наполнен лишь на три четверти. Сколько лет водителю такси?

Это задача — еще более «злая» шутка, чем предыдущая, хотя ее условия логически непротиворечивы. С самого начала в ней говорится, что вы водитель такси. Значит, и лет водителю столько же, сколько вам.

В костюмах одного цвета

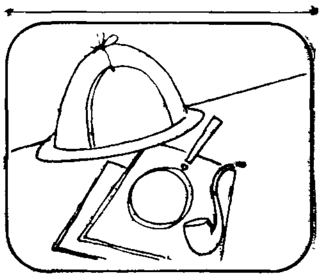


Избавившись от болтливой дамы, шофер такси вздохнул с облегчением. Следующий рейс был несравненно легче: трем молодым парам не терпелось поскорее попасть в дискотеку. Одна девушка была в красном костюме, вторая — в зеленом, третья — в синем. Их партнеры также были в красном, зеленом и синем.

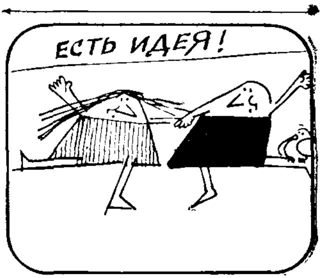


Оказавшись во время танцев рядом с девушкой в зеленом, юноша в красном обратился к ней.

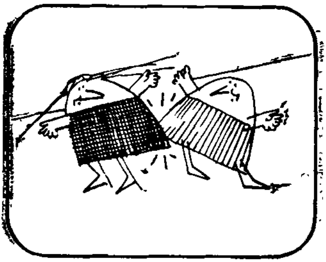
Фрэнк. Не правда ли, Мабель, забавно получается: ни у кого из нас цвет костюма не совпадает с цветом костюма партнера.



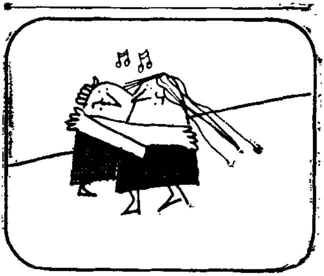
Можете ли вы с уверенностью сказать, в костюме какого цвета был юноша, танцевавший в паре с девушкой в красном?



Юноша в красном мог танцевать только с девушкой в синем. Девушка в красном не могла танцевать с ним, так как тогда по крайней мере одна пара была бы в костюмах одного цвета. Девушка в зеленом не танцевала с ним (он заговорил с ней, когда она оказалась рядом, танцуя с кем-то другим).



Аналогичные рассуждения показывают, что девушка в зеленом не могла танцевать с юношами в красном и зеленом. Следовательно, она могла танцевать с юношей в синем.



Таким образом, девушка в красном могла танцевать только с юношей в зеленом.

синий красный зеленый

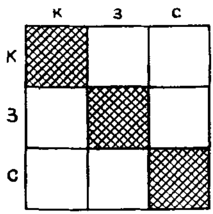
Цвета против цветов

Для большинства людей разобраться во всех тонкостях рассуждений, приводящих к решению задачи, дело нелегкое. А догадаться, как решить задачу, не понимая до конца, что именно утверждается в каждом из ее многочисленных условий, попросту невозможно. Всю информацию удобно представить в виде квадратной матрицы следующего вида:

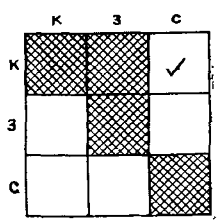
	к	з	с
к			
з			
с			

Прописные буквы слева означают цвета костюмов, в которые были одеты юноши: К — красный, З — зеленый, С — синий. Строчные буквы сверху означают цвета платьев, в которые были одеты девушки.

Поскольку ни в одной паре костюмы партнеров не были одного цвета, то три комбинации Кк, Зз и Сс можно сразу же исключить (клетки, соответствующие этим комбинациям, закрашены).

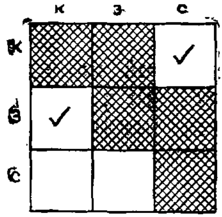


Юноша в красном оказался во время танцев неподалеку от девушки в зеленом. Значит, он не танцевал в паре с девушкой в зеленом, и мы можем исключить клетку Кз. В ряду К после этого останется одна клетка. Значит юноша в красном танцевал с девушкой в синем. Это обстоятельство мы отметим, поставив «птичку» в клетке Кс, после чего наша таблица примет следующий вид:

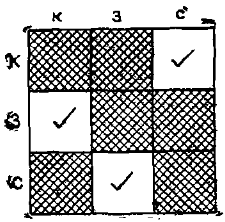


Поскольку нам уже известно, что девушка в синем танцевала с юношей в красном, то она не могла танцевать с партнером в зеленом. Следовательно, клетку Зс можно закрасить, после чего во втором ряду остается незакрашенной только одна клетка Зк.

Значит, юноша в зеленом танцевал с девушкой в красном, и в клетке Зк можно поставить «птичку».



Но если девушка в красном танцевала с юношей в зеленом, то она не могла танцевать с юношей в синем, что позволяет нам закрасить клетку Ск. В ряду С остается только одна незакрашенная клетка Сз. Мы поставим в ней «птичку», означающую, что юноша в синем танцевал с девушкой в зеленом. Задача полностью решена.



А вот более трудная логическая задача по существу того же рода. Решить ее без матричного, или табличного, метода под силу лишь немногим.

Пол, Джон и Джордж — три звезды «рока». Один из них гитарист, другой ударник, третий пианист (разумеется, мы отнюдь не утверждаем, что Пол непременно играет на гитаре, Джон на ударных и Джордж на фортепьяно: Пол вполне может быть, например, пианистом, Джордж ударником и т. д.).

1. На запись грампластинки популярной «рок»-музыки ударник хотел пригласить гитариста, но того не оказалось в городе: он отбыл на гастроли вместе с пианистом.

2. Пианисту платят больше, чем ударнику.

3. Полу платят меньше, чем Джону.

4. Джордж никогда не слышал о Джоне.

На каком инструменте играет каждый из трех музыкантов?

Удастся ли вам, построив матрицу 3×3 решить задачу по аналогии с предыдущей?

Получив правильное решение, вы узнаете, что Пол гитарист, Джон ударник, а Джордж пианист.

Табличный (или матричный) способ решения логических задач имеет много общего с решением задач формальной логики при помощи диаграмм Венна. В обоих случаях решение получается последовательным исключением недопустимых комбинаций «значений истинности», которое продолжается до тех пор, пока не останется одна-единственная комбинация, отвечающая всем условиям задачи. Как сказал однажды Шерлок Холмс доктору Ватсону в рассказе «Знак четырех»: «Если исключить невозможное, то то, что останется, сколь бы невероятным оно ни было, должно быть истиной».

А вот задача более сложная, чем предыдущие. Она познакомит вас с одним из наиболее важных двухместных отношений формальной логики — так называемой импликацией, или утверждением «Если ..., то...».

В комнате общежития женского колледжа собрались однажды все четыре обитательницы. Каждая из них занималась своим делом. Одна студентка занялась маникюром, другая расчесывала волосы, третья прихорашивалась перед зеркалом, а четвертая читала.

1. Мира не занималась маникюром и не читала.

2. Мод не прихорашивалась перед зеркалом и не занималась маникюром.

3. Если Мира не прихорашивалась перед зеркалом, то Мона не занималась маникюром.

4. Мэри не читала и не занималась маникюром.

5. Мона не читала и не прихорашивалась.

Что делала каждая девушка?

Начертить матрицу 4×4 для четырех имен и занятий не составит особого труда. Обратите внимание на то, что каждое из утверждений 1, 2, 4 и 5 позволяет закрасить 2 клетки (и исключить из рассмотрения соответствующие комбинации имен и занятий).

Утверждение 3 — импликация. В нем говорится, что *если* Мира не прихорашивалась перед зеркалом, *то* Мона не занималась маникюром. Пусть A означает посылку импликации (утверждение, стоящее после «если»), а B — ее заключение (утверждение, стоящее после «то»). Двухместное отношение «если A, то B» ложно, когда A истинно, а B ложно, но ничего не говорит нам о значениях истинности утверждения B в тех случаях, когда A ложно.

Следовательно, утверждение 3 допускает 3 различные комбинации значений истинности.

1. Мира не прихорашивалась перед зеркалом, и Мона не занималась маникюром.

2. Мира прихорашивалась перед зеркалом, и Мона не занималась маникюром.

3. Мира прихорашивалась перед зеркалом, и Мона занималась маникюром.

После того как вы исключите 8 комбинаций (заштриховав или закрасив в таблице 8 клеток), запрещаемых утверждениями 1, 2, 4 и 5, останется проверить каждую из 3 пар простых высказываний, содержащихся в утверждении 3. Две пары приводят к противоречию: приняв их, вы получили бы, что две девушки занимались одним и тем же. Лишь пара высказываний «Мира прихорашивалась перед зеркалом, и Мона занималась маникюром» не противоречит информации, содержащейся в остальных утверждениях. Итак, окончательное решение имеет вид:

Мира прихорашивалась перед зеркалом.

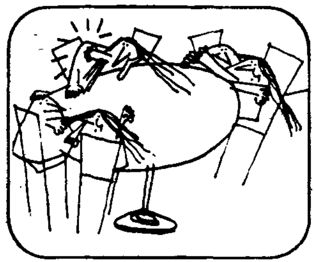
Мод читала.

Мэри расчесывала волосы.

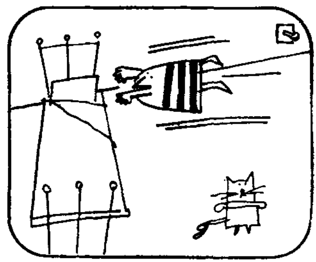
Мона занималась маникюром.

Составлять логические задачи такого типа совсем не трудно. Попробуйте придумать одну-две такие задачи сами. Решать такие задачи можно многими способами, например используя алгебраические методы, теорию графов, различного рода логические диаграммы и т. д. Возможно, вам удастся изобрести свой собственный метод, не уступающий приведенному нами или даже в чем-то превосходящий его.

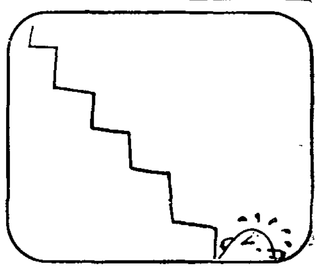
Каверзные загадки



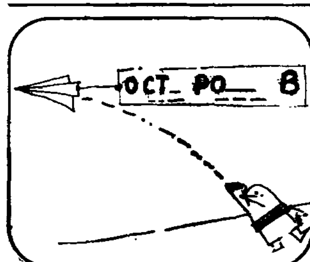
Когда музыка смолкла, шестеро друзей вернулись к столику и принялись рассказывать друг другу истории-загадки.
Сколько из этих загадок вы сумеете разгадать?



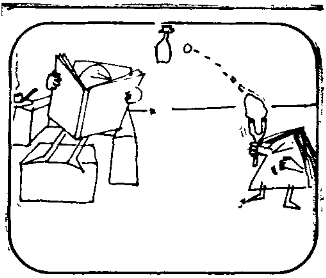
Первым загадал загадку юноша в красном.
Фрэнк. На прошлой неделе я выключил свет и успел добраться до постели прежде, чем комната погрузилась в темноту. От выключателя до моей кровати — 3 м.
Как это мие удалось?



Юноша в синем всех озадачил вопросом.
Генри. Когда тетушка приезжает ко мне в гости, она всегда выходит из лифта на 5 этажей ниже, чем нужио, и поднимается дальше пешком.
Почему тетушка так поступает?

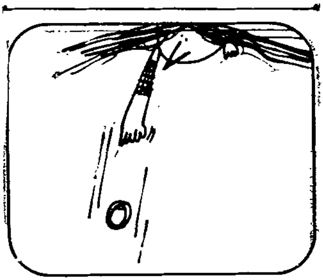


Следующий вопрос задал юноша в зеленом.
Инман. Какое хорошо известное слово начинается иа «ост», кончается на «в» и имеет в середине «ро»?



Девушка в красном рассказала целую историю.

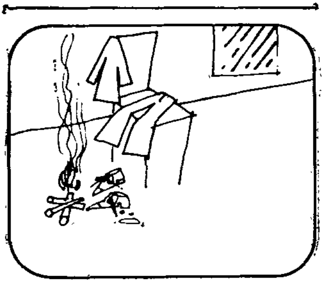
Джейн. Однажды поздним вечером мой дядюшка читал интересную книгу. Тетушка по рассеянности выключила свет, но хотя в комнате стало совсем темно, дядюшка продолжал читать как ни в чем не бывало и дочитал книгу до конца.



Девушка в зеленом удивила всех другой историей.

Мабель. Сегодня утром я уронила серьгу в кофе, но хотя чашка была полна до краев, я смогла достать серьгу, даже не намочив пальцев.

Как это могло быть?



Последнюю загадку загадала девушка в синем.

Лаура. Вчера мой отец попал под дождь. Ни шляпы, ни зонта он с собой не взял, укрыться от дождя было негде, и, когда отец добрался до дома, вода с него лилась ручьями, но ни один волос на голове не промок.

Как это могло произойти?

Каверзные разгадки

Все шесть каверзных загадок носят шуточный характер, но из них вы сможете извлечь для себя немало поучительного, например прочувствовать, сколь пагубно для решения обременять условия задачи лишними неявными допущениями и сколь полезно рассматривать все возможности, сколь бы невероятными или причудливыми они ни казались. Некоторые из величайших переворотов в науке не произошли бы, если бы не нашлись великие умы, усомнившиеся в том, что всем казалось незыблемым. Следующий шаг — гениальная догадка, идущая вразрез с общепринятым мнением и допускающая возможность того, что всем представляется противоречащим здравому смыслу. Например, Коперник догадался, что Солнце, а не Земля, находится в центре Солнечной системы, Дарвин догадался, что человечество появилось в результате длительной эволюции из низших форм животного мира, а Эйнштейн догадался, что структура пространства описывается неевклидовой геометрией.

Шесть приведенных нами каверзных загадок имеют следующие разгадки:

1. При попытке разгадать эту загадку почти все исходят из лишнего неявного допущения о том, что дело происходило вечером. В условиях задачи об этом не говорится ни слова. Добраться до постели прежде, чем комната погрузилась в темноту, Фрэнку удалось потому, что он ложился спать днем.

2. При решении этой задачи, как правило, принимают неявное допущение о том, что тетушка нормального роста. В действительности же тетушка Генри — карлик и не может дотянуться до кнопки того этажа, на котором живет ее племянник.

3. Обычно принимаемое дополнительное ложное допущение состоит в том, что между буквами ОСТ — РО — В должны стоять еще какие-то буквы. В действительности речь идет о слове ОСТРОВ.

4. Неявное ложное допущение, из которого исходят при попытке решить эту задачу, состоит в том, что читать можно только глазами. В действительности дядюшка Джейн был слепым и читал на ощупь.

5. Ложное допущение состоит в том, что кофе непременно должен быть жидким. В действительности Мабель уронила серьгу в чашку, наполненную до краев сухим кофе, и поэтому смогла достать серьгу, не намочив пальцев.

6. Неявное ложное допущение при решении этой загадки состоит в том, что на голове у отца Лауры были волосы. В действительности он был лыс, поэтому ни один волос у него на голове не намок даже под проливным дождем.

На той же идее — ввести в заблуждение, заставив принять ложное допущение, которое мешает поиску правильного объяснения,— основаны сотни других занимательных головоломок. Мы приведем еще шесть из них:

1. Посетитель ресторана обнаруживает в поданной ему официантом тарелке супа дохлую муху. Официант с извинениями принимает тарелку со стола, уносит ее на кухню и возвращается с новой порцией супа.

Едва отведав, посетитель подзывает снова официанта и с возмущением кричит:

— Как вам не стыдно! Вы подали мне тот же суп, что и в первый раз!

Каким образом посетителю удалось разоблачить официанта?

2. Пока океанский лайнер стоял на якоре, миссис Смит чувствовала себя не вполне здоровой и не покидала каюты. В полдень иллюминатор у ее койки находился на высоте ровно 7 м над уровнем воды. Во время прилива уровень воды поднимается со скоростью 1 м/ч. Через сколько времени вода достигнет иллюминатора?

3. Преподобный Сол Луни объявил во всеуслышанье, что в определенный день и час он свершит великое чудо: в течение 20 мин будет ходить по поверхности реки Гудзон и не погрузится в воду ни на дюйм. В назначенный день при огромном стечении народа преподобный Сол Луни ступил на воды реки Гудзон и 20 мин спустя вышел на берег, даже не замочив ног. Как ему это удалось?

4. На одном участке двухпутная железная дорога ныряет в туннель и сменяется однопутной. Разминуться внутри туннеля поездам негде. Однажды летом в туннель с одной стороны на полной скорости влетел поезд. Другой поезд тогда же влетел на полной скорости с другой стороны. Никакого столкновения не произошло. Почему?

5. Беглый преступник шел по дороге в безлюдной местности и вдруг увидел, что навстречу ему катит машина, битком набитая полицейскими. Преступник пустился наутек, но прежде чем скрыться в лесу, ровно 10 м бежал прямехонько навстречу полицей-

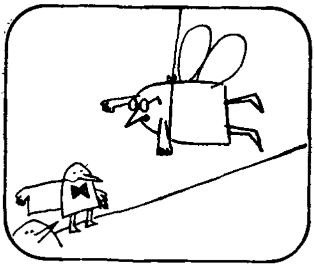
ским. Почему он так поступил: из желания выразить свое презрение к полиции или у него были для этого более основательные причины?

6. Почему доллары 1976 и доллары 1977 ценятся неодинаково?

Ответы приведены в конце книги. Просим вас не заглядывать в ответы до тех пор, пока вы основательно не поразмыслите над каждым вопросом.

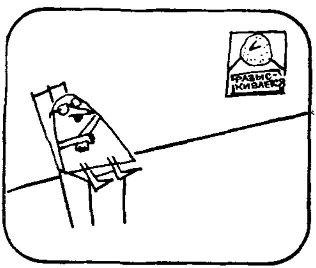
Ограбление века

На следующий день швейцар, подходя к дискотеке, услышал крики о помощи, доносившиеся с чердака.



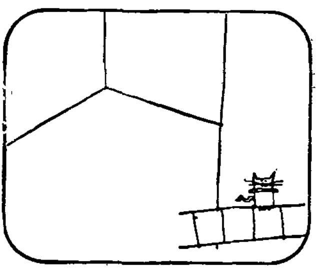
Поднявшись бегом на чердак, он обнаружил управляющего дискотекой в самом бедственном положении: несчастный был обвязан вокруг груди веревкой, свисавшей с потолочной балки, и беспомощно качался в воздухе.

Управляющий. Снимите меня побыстрее и вызовите полицию! Дискотеку ограбили!



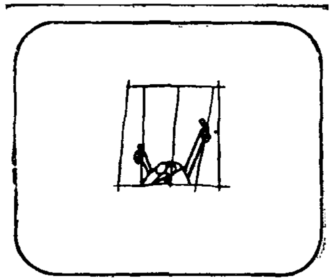
Когда полицейские прибыли, управляющий сообщил им следующее.

Управляющий. Вчера вечером после закрытия в дискотеку ворвались двое грабителей. Они взломали кассу, захватили всю выручку, после чего отвели меня на чердак и подвесили к балке.

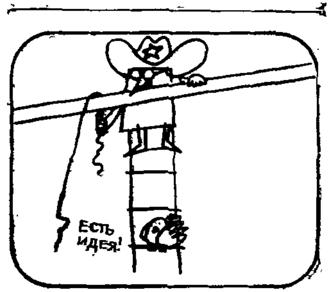


Полиция поверила управляющему: ведь на чердаке было пусто, хоть шаром покати. Управляющий не мог подвесить себя к балке сам, так как до балки было высоко, а встать ему было не на что. Грабители же воспользовались приставной лестницей, но когда пришел швейцар, она была за дверью.

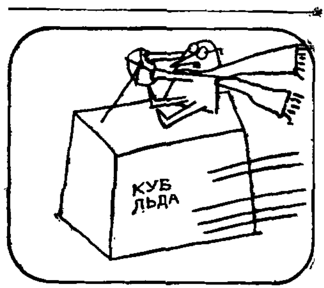
Каково же было всеобщее изумление, когда несколько недель спустя управляющий был арестован по обвинению в инсценировке ограбления.
Каким образом управляющий ухитрился без посторонней помощи подвесить себя к балке?



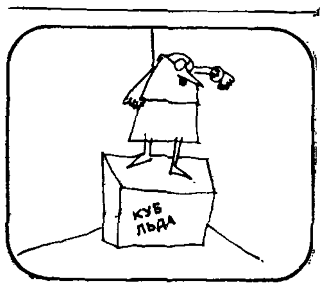
Вот как он это сделал. Взобравшись по приставной лестнице, управляющий привязал один конец веревки к балке, после чего вынес лестницу и поставил ее снаружи у двери.

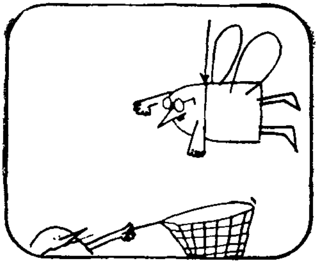


Затем он принес приготовленный им заранее большой куб льда.



Взобравшись на лед, он обвязал себя свободным концом веревки и принялся терпеливо ждать.





Придя на следующее утро, швейцар обнаружил управляющего висящим в воздухе: лед за ночь растаял, а вода испарилась. Хитро придумано, не так ли?

Недостающие данные

Истории, аналогичные рассказанной нами, легли в основу многих известных детективных рассказов, в которых острая наблюдательность и блестящая интуиция помогают сыщику раскрыть тайну преступления. Тающий лед — излюбленное средство создателей детективного жанра. Некто найден заколотым каким-то острым предметом. Где оружие убийцы? Оказывается, смертельный удар был нанесен куском льда с острым концом, наподобие сосульки. В запертой изнутри на защелку комнате обнаружен труп. Хитроумный убийца, покидая место преступления, подпер защелку куском льда, лед растаял, и защелка заперла дверь изнутри.

Классическим рассказом, основанным на загадочной истории этого типа, по праву может считаться «Тайна моста Тор» А. Конан-Дойля. На мосту, огражденном с двух сторон каменным парапетом, обнаружен труп женщины, убитой выстрелом в висок. На месте происшествия никакого оружия не оказалось. Шерлок Холмс со свойственной ему проницательностью сумел разгадать, каким образом женщина сумела совершить самоубийство и избавиться от оружия.

Самоубийца привязала к пистолету длинную бечевку, другой конец которой с подвешенным к нему тяжелым камнем был перекинут через парапет. После выстрела пистолет выпал у нее из руки, и камень утащил его на дно реки.

Раскрытие Холмсом таинственного убийства на мосту, как и многих других преступлений, может служить превосходным примером научного подхода к решению проблем. Руководствуясь своей непревзойденной интуицией, великий детектив прежде всего создал теорию, объясняющую исчезновение оружия. Затем он при помощи своего знаменитого дедуктивного метода вывел из своей теории важное следствие: пистолет, ударившись о каменный парапет, должен был оставить на нем какую-то отметину. Осмотрев парапет, Шерлок Холмс нашел такую отметину. Затем он провел следственный эксперимент, подтвердивший, что отметина могла быть оставлена именно оружием. Холмс привязал бичеву к револьверу Ватсона, перебросил другой конец ее с подвешенным к нему тяжелым камнем через парапет и, стоя на том месте, где было совершено самоубийство, выпустил револьвер из рук. Вторая отметина, по виду неотличимая от первой, которую револьвер оставил на парапете, сильно подкрепила теорию Шерлока Холмса.

Именно так решает свои проблемы и современная наука. Сначала создается теория, затем из нее дедуктивно выводятся следствия, которые можно было бы наблюдать, если бы теория оказалась верной, после чего приступают к поиску экспериментальных фактов и проверке правильности теории.

Предлагаем вашему вниманию еще одну детективную историю, тайну которой также можно разгадать, придумав достаточно остроумную версию. Некий мистер Джонс найден мертвым за письменным столом в своем кабинете. Причина смерти — пулевое ранение в голову. Прибывший на место происшествия детектив мистер Шемрок Бонс среди прочих предметов обратил внимание на магнитофон, стоявший на столе. Включив магнитофон, он, к своему удивлению, услышал голос мистера Джонса, сделавший следующее заявление:

— Говорит Джонс. Только что мне позвонил Смит. Сказал, что едет сюда, чтобы пристрелить меня. Бежать бессмысленно, да и поздно. Если он всерьез решил осуществить свою угрозу, то через 10 мин я буду мертв. Эта запись поможет полиции найти убийцу. Я слышу его шаги на лестнице. Дверь открывается...»

На этом запись прервалась. Бонс выключил магнитофон.

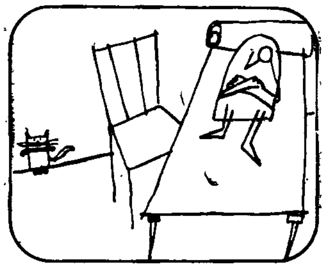
— Может, арестовать Смита? — спросил лейтенант Вонг, помощник капитана Бонса.

— Нет,— отрезал Бонс.— Убежден, что убийство совершил кто-то другой, умеющий хорошо подражать голосу Джонса. Запись сделана специально для того, чтобы направить расследование по ложному пути.

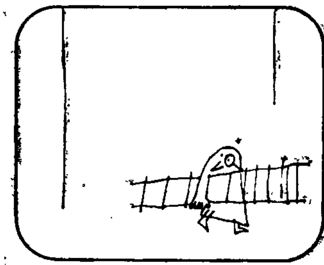
Как показали последующие события, Бонс оказался прав. Что, по-вашему, заставило его заподозрить неладное в записи? Попытайтесь ответить на этот вопрос самостоятельно, не заглядывая в конец книги.

Аховы тесты

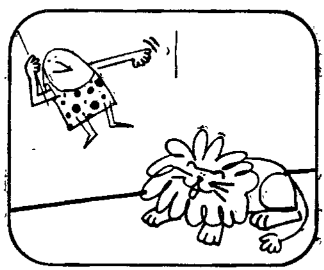
Полиция обратилась за помощью к известному специалисту по решению головоломок, профессору психологии Аху. Свои необычайно остроумные решения он назвал «феноменами Ах» и предложил множество тестов, позволяющих выявлять «феномены Ах» у испытуемых.



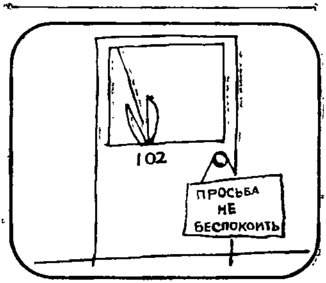
Один из его тестов осуществляется с помощью двух веревок, свисающих с потолка в пустой комнате.

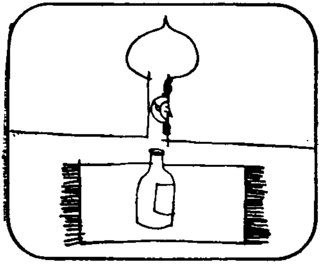


Проф. Ах. Расстояние между этими веревками достаточно велико, поэтому, держась за одну веревку, невозможно дотянуться до другой.

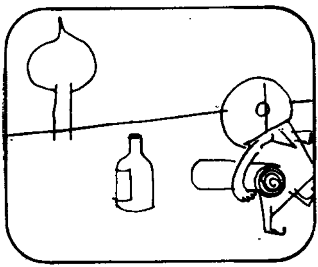


Проф. Ах. Задача состоит в том, чтобы связать свободные концы веревок, не пользуясь ничем, кроме ножниц.
Справитесь ли вы с этим тестом?



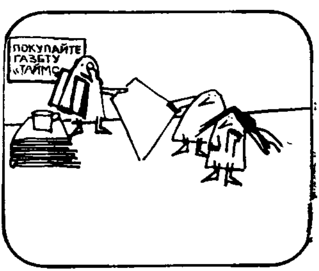


Проф. Ах. А вот еще один тест, который я также очень люблю. В центр небольшого восточного ковра я ставлю открытую бутылку пива. Требуется достать ее, сняв с ковра.



Проф. Ах. К бутылке нельзя прикасаться ни рукой, ни ногой, ни любой другой частью тела или каким-нибудь предметом. Разумеется, проливать пиво на ковер также не разрешается.

Если вы не справитесь с этим тестом, может быть, следующий тест покажется вам более простым.



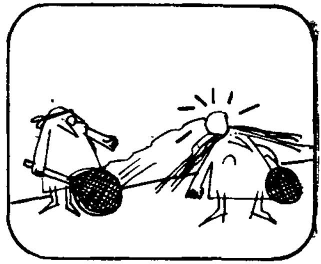
Проф. Ах. Для этого теста нам понадобится газета. Вы с приятелем должны встать на газетный лист так, чтобы ни один из вас не мог прикоснуться к другому. Сходить с газеты не разрешается.

Покажите, на что вы способны. Это ваш последний шанс успешно справиться с одним из тестов проф. Аха.

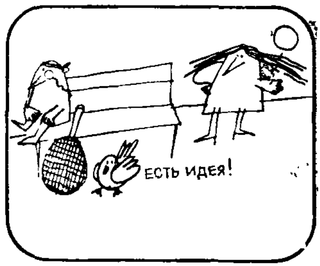
Когда проф. Ах предложил последний тест одной из студенток, она не только справилась с заданием, но и предложила профессору свой тест.

Студентка. Уважаемый профессор! Не могли бы вы бросить теннисный мяч так, чтобы он, пролетев короткое расстояние, остановился и начал двигаться в обратном направлении?

Проф. Ах. Может ли мяч стукнуться о препятствие?
Студентка. Ни в коем случае! Не разрешается также ударять мяч чем-нибудь или привязывать его к чему-нибудь.



После того как проф. Ах признал свое поражение, студентка показала ему, как решается задача. Решение оказалось удивительно простым.
Проф. Ах. И как я только об этом не подумал!
О чем не подумал проф. Ах?



Аховы решения

Тест с веревками. Думаете, можно выполнить задачу, если повиснуть на одной веревке и раскачаться на ней, как Тарзан на лиане? Вы ошибаетесь по двум причинам: во-первых, веревка недостаточно прочна, чтобы выдержать взрослого человека, и, во-вторых, даже если бы веревка не оборвалась под вашим весом, вы все равно не смогли бы дотянуться до другой веревки. Тем не менее картинка дает ключ к правильному решению.

Привязав ножницы к одной веревке, вы можете раскачать их, как маятник. Подтянув другую веревку к маятнику и дождавшись, когда ножницы качнутся навстречу, вы сможете поймать их и связать обе веревки.

Решение этой задачи требует двух необычных идей. Необходимо догадаться, во-первых, что веревки следует раскачать и что, во-вторых, ножницы можно использовать в качестве груза маятника, то есть «не по назначению». Трудности, возникающие у людей при использовании различных устройств и предметов не по назначению, психологи называют специальным термином «функциональная ограниченность». Услыхав о ножницах, мы думаем лишь о том, как разрезать ими веревку, что, разумеется, не может помочь в решении теста.

Тест с ковром. Поскольку к бутылке нельзя прикасаться ничем, то решить тест сумеет тот, кто догадается, что ковер уже касается бутылки и его можно каким-то образом использовать для того, чтобы сдвинуть ее, например на пол.

Догадка оказывается верной. Действительно, начните скатывать ковер и, когда рулон дойдет до бутылки, аккуратно придерживая его за концы, столкните им бутылку с ковра, не прикасаясь к ней ничем, кроме свернутого в рулон ковра.

Как и в предыдущей задаче, функциональная ограниченность блокирует путь к решению. Мы так убеждены, что ковром можно только покрыть пол, и упускаем из виду, что ковром можно столкнуть бутылку.

Тест с газетой. Вы сумеете решить тест, если догадаетесь, что два человека, стоящие на газетном листе и разделенные дверью, не могут прикоснуться друг к другу. Просуньте под дверь лист газеты, встаньте на него по одну сторону от двери, а ваш приятель пусть встанет на него по другую сторону от двери. Дверь не позволит вам коснуться друг друга, пока вы не сойдете с газетного листа.

Тест с теннисным мячом. Решению теста препятствует неявно принимаемое допущение о том, что мяч нужно бросить горизонтально. В действительности ничто не мешает бросить мяч вертикально. Тогда, поднявшись на определенную высоту, он остановится, после чего начнет двигаться обратно.

Другое решение — бросить мяч так, чтобы он катился вверх по склону холма. Такое решение можно было бы заранее исключить, потребовав, чтобы мяч находился в воздухе, но поскольку в условии задачи это не оговорено, второе решение вполне законно.

Еще несколько тестов. Чтобы помочь вам в развитии «феномена Ах», приведем еще пять задач-тестов:

1. Можете ли вы бросить на пол с высоты 1 м картонную спичку так, чтобы она упала на ребро?

2. Рабочие смешивают известь с песком и цементом для заделки швов между бетонными блоками в фундаменте здания. В одном из блоков имеется узкий прямоугольный канал глубиной 2 м. В этот канал случайно падает вывалившийся из гнезда птенец. Отверстие слишком узко, чтобы в него можно было просунуть руку, впрочем, достать до дна канала все равно было бы невозможно. Не могли бы вы предложить простой и надежный способ, позволяющий в целости и сохранности извлечь птенца из канала в бетонном блоке?

3. К крюку в потолке на нити длиной около 2 м подвешена кофейная чашка. Можете ли вы перерезать нить ножницами посредине так, чтобы чашка не упала на пол? Держать нить, пока вы ее перерезаете, или чашку запрещается.

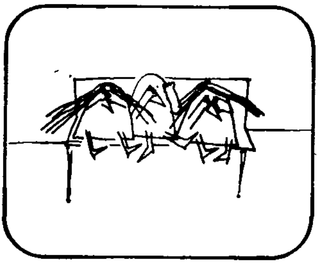
4. В плотине недостает одного кирпича. Через образовавшуюся брешь размером 5 см $\times$ 20 см льется вода. Обнаруживший течь голландец имеет при себе пилу и цилиндрический деревянный шест диаметром 50 мм. Как ему лучше всего распилить шест, чтобы заткнуть брешь?

5. Нижняя часть винной бутылки имеет форму цилиндра. Высота ее составляет $^3/_4$ высоты бутылки. Верхняя четверть бутылки, состоящая из горлышка и плавного перехода к нижней части, имеет неправильную форму. В бутылку до середины ее налита жидкость. Открывать бутылку запрещается. Можете ли вы, пользуясь только линейкой, точно определить, какая часть объема бутылки заполнена жидкостью?

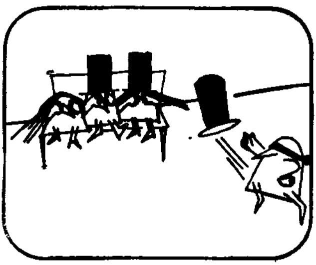
Ответы на эти 5 задач-тестов приведены в конце книги.

Аховы награды

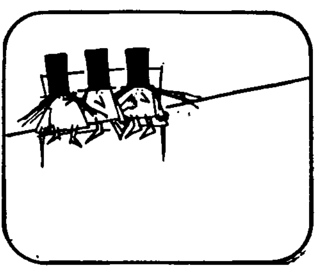
Ежегодно по окончании курса лекций по аховым феноменам проф. Ах награждал специально учрежденной им медалью Аха наиболее отличившегося из своих слушателей. На этот раз на получение медали претендовали 3 кандидата.



Чтобы выбрать наиболее достойного из них, проф. Ах решил прибегнуть к тесту. Он усадил всех трех кандидатов на скамью и попросил их зажмурить глаза.



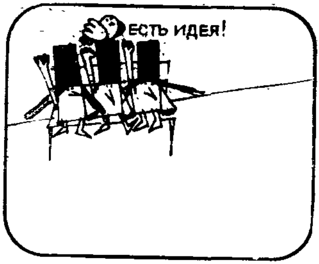
Проф. Ах. На каждого из вас я надену синюю или красную шляпу. Прошу не открывать глаза без моей команды.



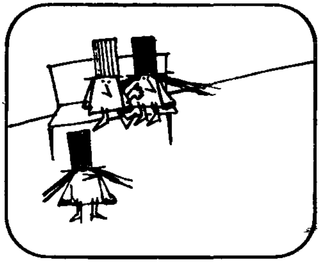
Каждому из 3 кандидатов на медаль проф. Ах надел красную шляпу.

Проф. Ах. Прошу всех открыть глаза. Пусть каждый из вас, увидев на ком-нибудь красную шляпу, поднимет руку. Первый, кто сможет определить, какого цвета шляпа у него на голове, получит медаль.

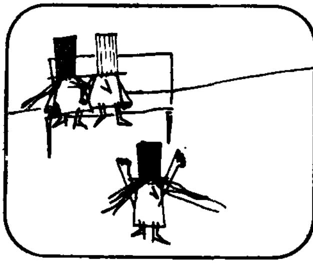
Все трое подняли руки. Через иесколько минут Джон вскочил с места.
Джон. Ах, я знаю! На мне красная шляпа!



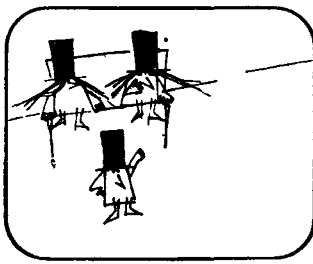
Джон. Если бы на мне была синяя шляпа, то Мери сразу бы догадалась, что на ней красная шляпа, так как иначе иельзя было бы объяснить, почему Барбара подняла руку.

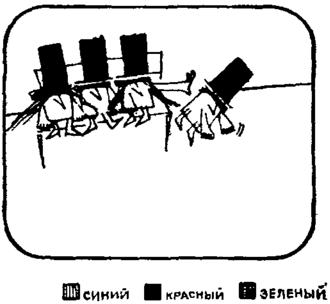


Джон. Барбара рассуждала бы так же, как Мери, и сразу догадалась бы, что на ней красиая шляпа, так как иначе нельзя было бы объяснить, почему Мери подняла руку.



Джон. А поскольку ни Мери, ни Барбара ие заявили о том, что знают, какого цвета их шляпы, то их молчаиие означает одио: красиую шляпу они видят ие только друг на друге, но и иа мне.





Решить эту классическую логическую задачу-головоломку не составляет особого труда, если речь идет о 3 действующих лицах. Но предположим, что их не трое, а четверо, и у каждого на голове красная шляпа.
Как быть в этом случае?

Цвет шляпы и математическая индукция

Переход в этой задаче от 3 кандидатов на награду к 4 и последующее обобщение на случай произвольного числа кандидатов познакомит вас с весьма важным методом доказательства, известным под названием «метод математической индукции». Этот метод применим лишь в том случае, когда подлежащие доказательству утверждения можно упорядочить, как ступени лестницы. Вы доказываете, что всякое утверждение истинно, если истинно предыдущее, и проверяете, что первое утверждение истинно. Но коль скоро оно истинно, то истинны и все остальные утверждения: если вы можете ступить на первую ступень, то вам удастся подняться по лестнице сколь угодно высоко (или: если вы ступаете не на первую ступень, то вам удастся подняться или спуститься на любую другую ступень).

Предположим, что у проф. Ах особенно отличились и претендуют на награду 4 студента и что он надел им на головы красные шляпы. Все четверо подняли руки. Предположим, что один из них сумел догадаться, какого цвета шляпа у него на голове, чуть раньше других. Победитель (или победительница) рассуждает так:

— Предположим, что у меня на голове синяя шляпа. Тогда все три моих товарища видят, что она синяя. Значит, каждый из них видит по 2 красные шляпы и жаждет узнать, какого цвета шляпа на голове у него самого. Но именно в такой ситуации находились действующие лица в предыдущей задаче, когда ахову награду оспаривали лишь 3 кандидата. Один из них догадался, что у него на голове красная шляпа.

Но никто из моих соперников не заявляет, что у него на голове красная шляпа, хотя прошло уже достаточно много времени, чтобы каждый мог, не торопясь, тщательно обдумать свои умозаключения. Причина молчания может быть только одна: все они видят, что у меня на голове красная шляпа. Следовательно, мое исходное предположение ложно. Значит, у меня на голове красная шляпа.

Это рассуждение (принесшее своему автору заслуженную награду) допускает обобщение на случай n кандидатов. Если число претендентов на ахову награду равно 5, то самый умный из них увидит перед собой 4 красные шляпы и вскоре поймет, что любой из его соперников может рассуждать так, как рассуждал победитель в состязании 4 кандидатов, и, следовательно, определить цвет своей шляпы. А поскольку все соперники не торопятся заявлять, что у них на головах красные шляпы, то причина подобной сдержанности может быть только одна: все они видят перед собой по 4 красные шляпы. «Значит,— заключил свои рассуждения самый умный из 5 кандидатов,— у меня на голове должна быть красная шляпа». Аналогичные рассуждения применимы в случае любого числа претендентов на ахову награду. Самый умный из n кандидатов всегда может свести задачу к предыдущему случаю, который в свою очередь сводится к предыдущему и т. д., пока задача не сведется к уже решенной задаче о 3 претендентах на ахову награду.

В связи с рассмотрением задачи в общем случае возникает интересный вопрос относительно того, насколько хорошо она определена и не содержит ли она в своих условиях чрезмерный произвол, исключающий возможность однозначного ответа. При каких предположениях задача в общем случае допускает однозначный ответ? Обязательно ли предполагать, что быстрота, с которой соображает каждый из n претендентов на ахову награду, может служить его отличительным признаком, то есть всех претендентов можно упорядочить по быстроте, с которой они думают? Нужно ли предполагать, что с увеличением n возрастает продолжительность времени, в течение которого претендент на награду успевает прийти к заключению о цвете своей шляпы? Предположим, что число претендентов на ахову награду возросло до 100 человек. Верно ли утверждение о том, что по истечении достаточно продолжительной паузы самый умный из них заявит, что у него на голове красная шляпа, затем с некоторым запозданием к аналогичному выводу придет второй по сообразительности из претендентов, затем третий и так далее до тех пор, пока последний тугодум (из лучших студентов проф. Аха) не поймет, что у него на голове красная шляпа?

Классическая задача о шляпах (или колпаках) существует во множестве вариантов. Вот один из них, отчетливо показывающий, насколько усложняется задача, если шляпы на головах действующих лиц могут быть трех или более различных цветов. Предположим, что из 5 белых, 2 красных и 2 черных шляп выбраны какие-то 5 шляп и надеты на головы 5 людей. Если все шляпы белые, то каким образом один из великолепной пятерки, более сообразительный, чем остальные, догадается, что у него на голове белая шляпа?

Особым изяществом отличается следующий вариант исходной задачи с шляпами 2 цветов и 3 действующими лицами, позволяющий исключить все недомолвки и неоднозначности, присущие задаче в ее традиционной постановке. Предположим, что трое людей сидят на стульях в затылок друг другу и каждый смотрит только прямо перед собой. Сидящий сзади видит шляпы обоих людей, сидящих перед ним. Сидящий посредине видит шляпу только того, кто сидит перед ним, а сидящий впереди не видит перед собой ни одной шляпы. (Все трое как бы страдают прогрессирующей слепотой, причем сидящий сзади видит лучше двух остальных, а сидящий впереди полностью ослеп.)

Судья соревнования на сообразительность выбирает 3 шляпы из 3 белых и 2 черных шляп. Сидящие зажмуривают глаза и открывают их по команде лишь после того, как им на головы наденут шляпы, а лишние шляпы уберут.

Судья спрашивает сидящего сзади, знает ли он цвет своей шляпы и получает отрицательный ответ. Сидящий посредине на тот же вопрос отвечает также отрицательно.

Когда же судья спрашивает у сидящего впереди, знает ли тот цвет своей шляпы, то получает ответ: «Знаю, у меня на голове белая шляпа». Каким образом сидящий впереди отгадал цвет своей шляпы?

Он рассуждал следующим образом: «Сидящий сзади ответит судье утвердительно лишь в том случае, если он видит 2 черные шляпы. Поскольку на вопрос судьи он ответил отрицательно, то это означает, что по крайней мере одна из двух шляп, которые он видит, не черная. Предположим, что у меня на голове черная шляпа. Тогда сидящий на среднем стуле видит черную шляпу и, услышав, что сосед сзади на вопрос судьи ответил отрицательно, догадается, что у него самого на голове должна быть белая шляпа, так как в противном случае сосед сзади видел бы 2 черные шляпы и на вопрос судьи ответил бы утвердительно. Следовательно, если бы у меня на голове была черная шляпа, то сидящий посредине на вопрос судьи ответил бы утвердительно. Но он ответил отрицательно. Значит, он видит перед собой белую шляпу у меня на голове. Отсюда я заключаю, что мое исходное предположение ложно и у меня на голове белая шляпа».

Как и предыдущий вариант, эта задача также легко обобщается методом математической индукции на случай n людей «с прогрессирующей слепотой», сидящих в затылок друг другу на n стульях. Судья обходит всех участников состязания на сообразительность и каждому по очереди задает один и тот же вопрос: «Знаете ли вы, какого цвета шляпа у вас на голове?», причем первый спрашивает того, кто сидит сзади, потом сидящего перед ним и т. д. Запас шляп состоит из n белых и $n-1$ черных шляп. Рассмотрим случай $n=4$. Сидящий впереди «слепой» знает, что если шляпа черная, то трое сидящих сзади него видят ее и знают, что среди доставшихся им шляп черных не более двух. Тем самым задача сводится к предыдущей. Если на вопрос судьи сидящий сзади и тот, кто сидит непосредственно перед ним, ответили бы отрицательно, то сидящий непосредственно за «слепым» ответил бы утвердительно, как и в предыдущем случае. А поскольку он отвечает утвердительно, то «слепой» отбрасывает свое первоначальное предположение как ложное и заключает, что его шляпа должна быть белой. Математическая индукция позволяет распространить доказательство на случай n человек. Если на вопрос судьи все, кроме «слепого» отвечают отрицательно, то у всех n на головах должны красоваться белые шляпы.

Теперь мы уже достаточно подготовлены и к более трудному варианту. Предположим, что трем участникам состязания на сообразительность судья раздает шляпы, выбирая их *в любом наборе* из 3 белых и 2 черных шляп. Участников состязания судья опрашивает в том же порядке, что и прежде. Будет ли кто-нибудь из них на вопрос судьи всегда отвечать утвердительно? Предоставляем вам возможность самостоятельно решить эту задачу и доказать, что ее можно обобщить на случай n человек и n белых и $n-1$ черных шляп. Кое-кто из участников на вопрос судьи всегда будет отвечать утвердительно. Первый, кто всегда отвечает судье утвердительно,— это первый из тех, кто сам носит белую шляпу и не видит ни одной белой шляпы перед собой.

Шляпы двух цветов эквивалентны шляпам, пронумерованным двоичными числами 0 и 1. Во многих задачах такого типа цвета шляп отличаются большим разнообразием (одну из таких задач мы рассмотрели) и разобраться в них легче, если каждый цвет заменить соответствующим натуральным числом. Рассмотрим, например, следующую игру для 2 лиц.

Судья выбирает любую пару последовательных натуральных чисел. Кружочек с одним из этих чисел судья приклеивает на лоб одному игроку, а кружочек со вторым числом — на лоб другому игроку. Каждый игрок видит число на лбу у другого, но не видит числа у себя на лбу.

Судья по очереди спрашивает у каждого из участников, знает ли тот, какое число у него на лбу, до тех пор, пока кто-нибудь из них не назовет число у себя на лбу. Методом математической индукции можно доказать, что если большее из 2 чисел равно n, то один участник игры ответит «да» n или $n-1$ раз. Доказательство этого утверждения начинается с рассмотрения простейшего случая: чисел 1 и 2. Человек с числом 2 на лбу отвечает «да» на первый или на второй вопрос (в зависимости от того, к кому из двух участников игры судья обратится прежде), так как, видя на лбу у партнера число 1, он сразу же заключает, что у него самого на лбу число 2.

Рассмотрим теперь случай, когда выбраны числа 2 и 3. На первый вопрос человек с числом 3 на лбу ответит «нет», потому что у него на лбу могло бы стоять и число 1, и число 3. Затем он может рассуждать так: «Предположим, что у меня на лбу число 1. Тогда мой партнер, у которого на лбу число 2, на вопрос судьи ответил бы «да» (как в предыдущем случае). Следовательно, если он ответит «нет», то это будет означать, что у меня на лбу стоит число 3, а не 1». И когда судья задаст игроку с числом 3 на лбу свой вопрос вторично, тот ответит «да». Так же как в задачах со шляпами, это рассуждение обобщается на случай любых двух последовательных натуральных чисел.

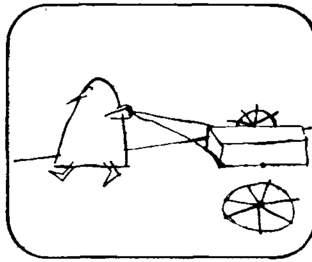
Для полного решения задачи необходимо лишь знать, в каких случаях игрок ответит «да» на n-й вопрос и в каких на $(n-1)$-й вопрос. Исследовав задачу до конца, вы убедитесь в том, что это зависит от двух причин: во-первых, от того, кому из игроков судья задает первый вопрос, и, во-вторых, от четности числа n.

Более тонкое обобщение задачи было исследовано недавно знаменитым математиком из Кембриджского университета Джоном Хортоном Конуэем. Вот что оно собой представляет. Каждому из n участников игры на лоб приклеивается кружок с номером. Номера могут быть любыми неотрицательными целыми числами. Сумма всех этих чисел равна одному из k чисел $(k \leqslant n)$, выписанных на доске, среди которых нет двух одинаковых. Все участники игры по предположению обладают безграничной мощью интеллекта и отличаются абсолютной честностью. Каждый участник игры видит все номера, кроме своего, и все числа на доске.

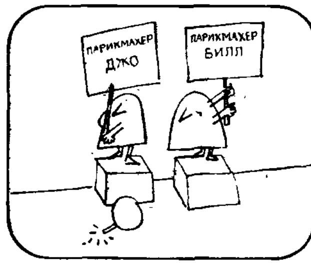
Первого из участников игры спрашивают, может ли он назвать свой номер. Если он отвечает «нет», то тот же вопрос задают второму и так далее по кругу до тех пор, пока один из участников не ответит «да». Конуэй утверждает (хотя это кажется невероятным), что рано или поздно кто-то из участников непременно ответит «да».

Нелегкий выбор

Проезжая через небольшой городок по дороге в Лас-Вегас, Джон обнаружил в своей автомашине неисправность. Оставив машину в ремонтной мастерской, он решил пойти подстричься.

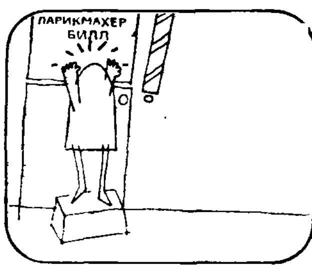


В городке было всего две парикмахерских. Одна из них принадлежала Биллу, другая Джо.

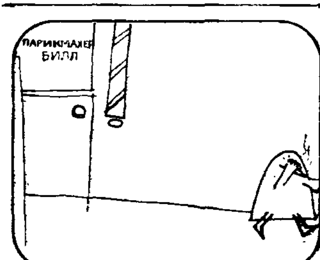


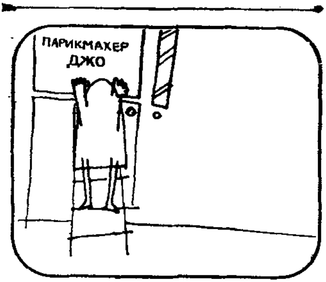
Заглянув через витрину в парикмахерскую Билла, Джон передернулся от отвращения.

Джон. Какая ужасная грязь! На зеркалах толстый слой пыли, на полу валяются волосы, владельцу парикмахерской не мешало бы побриться, да и подстрижен он кое-как.



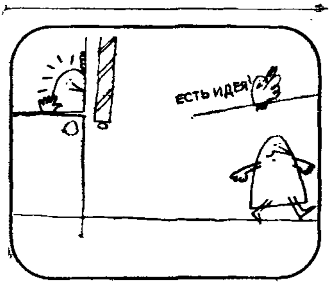
Джон перешел на другую сторону улицы и решил попытать счастья у Джо.





Заглянув сквозь витрину в парикмахерскую Джо, Джон увидел иную картину.

Джон. Совсем другое дело! На зеркалах ни пылинки, пол чисто подметен, и сам Джо аккуратно подстрижен.



Но в парикмахерскую Джо наш Джон так и не зашел. Он предпочел подстричься в грязной парикмахерской у Билла. Почему?

Кому отдать предпочтение?

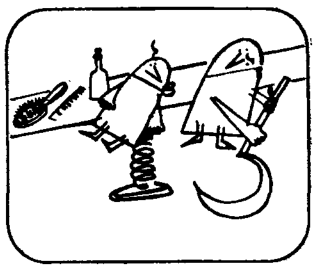
Ни один парикмахер не стрижет сам себя. Поскольку в городке, где вынужден был остановиться Джон, всего 2 парикмахерских, то каждый из парикмахеров вынужден стричься у своего конкурента. Джон мудро рассудил, что ему лучше подстричься у парикмахера-грязнули, потому что именно он так аккуратно подстриг владельца парикмахерской, блиставшей чистотой и порядком.

А вот еще одна задача, очень близкая по духу предыдущей. Два горняка после долгого трудового дня в шахте поднялись на поверхность. У одного из них лицо было чистым, у другого запорошено угольной пылью. У выхода с шахтного двора горняки пожелали друг другу спокойной ночи. Горняк с чистым лицом прежде, чем отправиться домой, вытер лицо носовым платком. Горняк с лицом, запорошенным угольной пылью, отправился домой в таком виде, как был. Можете ли вы объяснить их не совсем обычное поведение?

В кресле у парикмахера

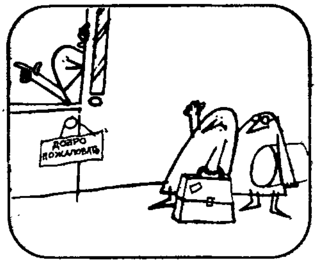
Парикмахера Билла вряд ли кто-нибудь мог назвать молчуном. Едва Джон уселся в кресло, как Билл принялся болтать без умолку.

Билл. Должно быть, вы не здешний, сэр? Люблю стричь нездешних!

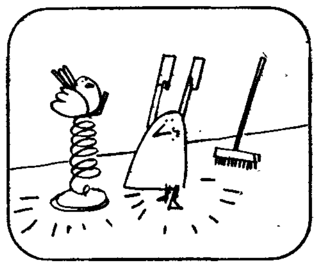


Билл. По мне, так лучше подстричь двух нездешних, чем одного здешнего!

Джон. Почему?

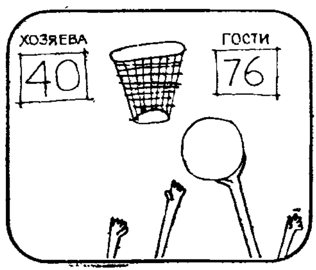


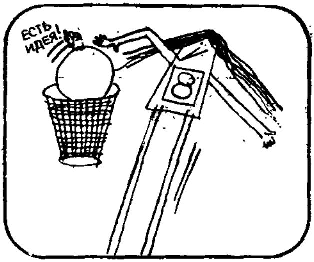
Билл. Потому, что за две стрижки я заработаю вдвое больше, чем за одну стрижку!



Джон. Ловко вы меня поймали! Попробую расквитаться с вами. Дней 10 назад баскетбольная команда нашего колледжа выиграла встречу со счетом 76 : 40, хотя ни один баскетболист не забросил ни одного мяча.

Как вы это объясните?





Когда Билл, перебрав несколько вариантов ответа, признал себя побежденным, Джон все объяснил.

Джон. В баскетбольной команде нашего колледжа нет ни одного баскетболиста. В ней одни баскетболистки: наша команда женская.

Удивительные разгадки

Все задачи в этом разделе носят шуточный характер и основаны на неоднозначности языка. А вот еще 8 задач «с подвохом».

1. Миллиардер Говард Юз, известный своими эксцентрическими выходками, назначил приз в полмиллиона долларов тому из гонщиков, чья машина придет к финишу *последней.* В состязании вызвались участвовать 10 гонщиков, но необычные условия смущали даже признанных ассов трека.

— Как нам вести гонку? — спросил один из них.— Каждый из нас захочет выиграть, мы будем ехать все медленнее и медленнее, и такая, с позволения сказать, гонка никогда не кончится!

Вдруг один из гонщиков воскликнул:

— Я знаю, как провести гонку!

Что он придумал?

2. Можете ли вы сделать так, чтобы обыкновенная спичка горела под водой?

3. Преступник отправился с женой в кинотеатр, где шел вестерн с драками, лихими погонями и оглушительной пальбой. Улучив момент, когда на экране завязалась такая перестрелка, что у зрителей лопались барабанные перепонки, он выстрелом в голову убил свою жену. Затем он вместе с трупом жены выбрался из кинотеатра, причем его никто не остановил. Как ему удалось это сделать?

4. Профессор Квиббл утверждает, что может поставить бутылку в центре комнаты и вползти в нее. Правда ли это?

5. Знаменитый предсказатель Урия Фуллер берется с уверенностью предсказать счет любого баскетбольного матча до того, как тот начнется. В чем секрет этих безошибочных предсказаний?

6. Житель небольшого городка за сравнительно короткий срок зарегистрировал брак более 20 раз. Каждый раз в брак вступала другая женщина. Тем не менее житель, о котором идет речь, не развелся ни с одной из 20 с лишним женщин и не стал многоженцем. Как вы это объясняете?

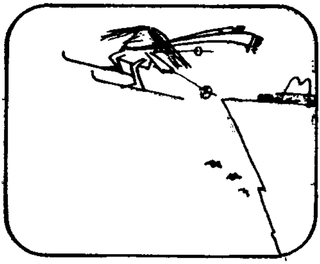
7. «Эта редкая птица,— заверил покупательницу продавец зоомагазина,— повторяет каждое слово, которое услышит». Через неделю разгневанная покупательница вернула птицу в магазин, заявив, что та не произнесла ни слова. Тем не менее продавец не лгал. Объясните, как это может быть?

8. Наполовину пустая бутылка заткнута пробкой. Можете ли вы опорожнить бутылку, не разбивая ее и не вытаскивая пробку?

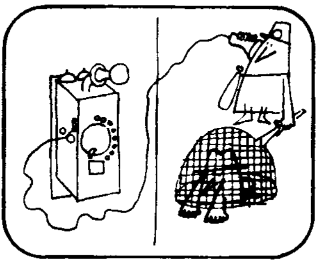
Ответы на все вопросы приведены в конце книги.

Убийство в Солнечной долине

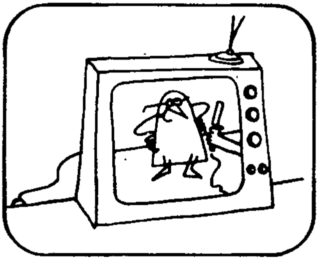
В тот день, когда Джон приехал в Лас-Вегас, утренние выпуски газет поместили на первых полосах сообщение о профессиональном игроке, подвизавшемся в казино Лас-Вегаса, и его жене. Супруги отправились в горы покататься на лыжах...



...и жена пала жертвой несчастного случая. Во время катания она сорвалась в пропасть. Единственным свидетелем ее гибели был муж.



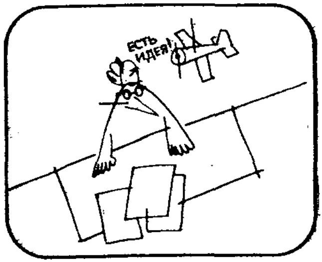
Узнав из газет о несчастном случае, клерк из туристского агенства в Лас-Вегасе позвонил в полицейское управление штата Айдахо. Игрок был арестован по подозрению в убийстве своей жены.



Репортерам местных газет клерк поведал удивительную историю.

Клерк. Я не знаком ни с игроком, ни с его женой и не подозревал о злом умысле, пока не прочитал в газетах о несчастном случае в горах.

Почему клерк счел необходимым позвонить в полицию?



Клерк вспомнил, что игрок купил себе билет до Солнечной долины туда и обратно, а жене только туда.

Билет в один конец

Сумеете ли вы разгадать еще две загадочные истории? Как и в нашумевшей истории об убийстве в Солнечной долине, их тайну невозможно раскрыть, если придерживаться определенного алгоритма или действовать по какому-то заранее намеченному плану, в то время как удачная догадка быстро приводит к ответу.

1. По автостраде, ведущей к Сан-Франциско, мчалась автомашина. За рулем был отец, а рядом с ним восседал малолетний сынишка. Чтобы избежать столкновения с неожиданно затормозившей машиной, которая шла впереди, отец резко свернул в сторону, машина потеряла управление и врезалась в ограждение. Отец не пострадал, а у малыша оказалась сломана нога. Скорая помощь доставила их обоих в ближайшую больницу. Когда мальчика ввезли на каталке в операционную, дежурный хирург побледнел и воскликнул:

— Я не смогу оперировать этого мальчика! Ведь это мой сын!

Как вы это объясните?

2. Следующая история заимствована нами из сборника задач-головоломок Дж. Гамова и М. Стерна. Действие происходит во время второй мировой войны в оккупированном немцами Париже. В гостиничном лифте поднимаются четверо: нацистский офицер в форме, француз, сражающийся в одной из групп Сопротивления, молодая девушка и дама преклонного возраста. Все четверо не знакомы друг с другом.

Внезапно выключают электроэнергию. Лифт останавливается, и кабина погружается в кромешную тьму. В наступившей тишине раздается звук поцелуя и вслед за ним звонкая пощечина. Через секунду вспыхивает свет. У нацистского офицера под глазом красуется внушительный синяк, которого раньше не было.

Престарелая дама подумала:

— Так ему и надо! Как я рада, что современные девушки умеют постоять за себя!

Девушка подумала:

— Какие странные вкусы у этих бошей! Вместо того чтобы поцеловать меня, он, должно быть, попытался поцеловать старуху или этого симпатичного молодого человека. Мне этого в жизни не понять!

Нацистский офицер подумал:

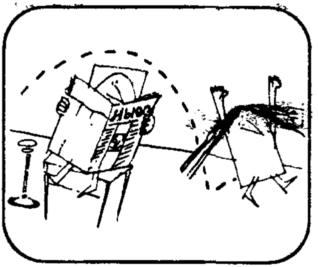
— Что произошло? Я стоял тихо, никого не трогал. Может быть, француз попытался в темноте поцеловать девушку, а она по ошибке ударила меня?

И только француз знал, что произошло на самом деле. А вы не догадались, что случилось в лифте?

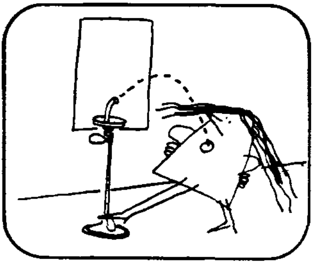
Ответы помещены в конце книги. Попробуйте разгадать обе загадочные истории самостоятельно, а потом проверьте ваши решения.

Сцена у фонтана

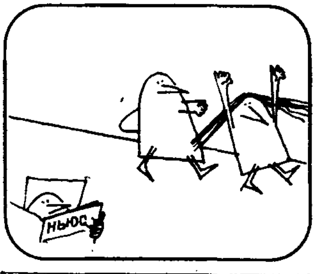
В один из дней Джон, с удобством расположившись в кресле, читал юмористические заметки в местной газете, как вдруг в холл вбежала хорошенькая девушка.



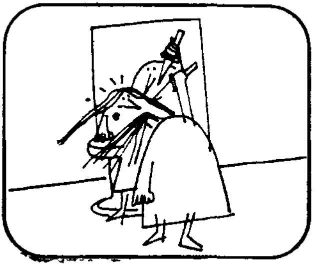
Она стремглав бросилась к фонтанчику с питьевой водой и, сделав большой глоток, так же стремительно скрылась.

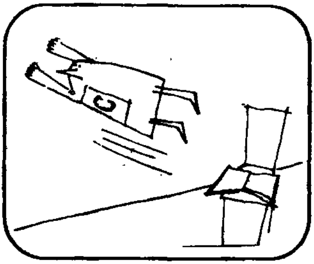


Через несколько минут она вновь появилась, стремительно подбежала к фонтанчику и сделала еще один глоток. На этот раз за ней по пятам крался мужчина довольно странного вида.

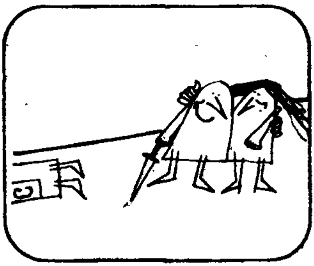


В стене за фонтанчиком было зеркало. Когда девушка подняла голову и увидела, что у нее за спиной в угрожающей позе с огромным кинжалом в руке стоит мужчина, она громко вскрикнула.





Джон упал в обморок.



Если бы он не поторопился, его глазам предстала бы неожиданная сцена: мужчина опустил руку с кинжалом, обнял девушку за плечи, и они как ни в чем не бывало весело рассмеялись.

Что произошло в холле гостиницы?

Видение в зеркале

Странное поведение девушки объясняется очень просто: ее мучила икота, а мужчина пытался испугать ее (как вы должно быть знаете, по весьма распространенному поверью, испуг — лучшее средство от икоты).

Предоставляем вам последний шанс проверить вашу способность находить оригинальные, неожиданные решения логических задач. Сначала мы предлагаем вам практическую задачу на «исследование операций», а затем — задачу, которая решается совсем просто, если не обременять ее дополнительными неявными допущениями.

1. Клеопатра держала свои бриллианты в шкатулке с выдвигающейся верхней крышкой. Чтобы воры не могли похитить сокровища, в шкатулке вместе с драгоценностями она держала небольшую змейку, аспида, укус которой смертелен.

Однажды по недосмотру дворецкого раб остался на считанные минуты один в спальне, где царица хранила свои драгоценности, и ухитрился похитить бесценные камни, не вынимая змею из шкатулки, не прикасаясь к ней, не усыпляя ее и не воздействуя на нее какими-либо другими способами. Раб действовал голыми руками. Кража была совершена за какие-то мгновения. Когда раб тайком покинул царскую опочивальню, всё в ней было по-прежнему, если не считать, что в шкатулке не хватало нескольких бриллиантов. Каким хитроумным способом раб их похитил?

2. У некой дамы не было при себе лицензии на право вождения автомашины. Она не остановилась на железнодорожном переезде, хотя шлагбаум был опущен и, не обращая внимания на знак одностороннего движения, двинулась в противоположном направлении и остановилась лишь миновав три квартала. Все это происходило на глазах полисмена, который, однако, не счел необходимым задержать даму. Почему?

Ответы на эти загадки приведены в конце книги.

Глава 5

Процедурные находки

НЕОЖИДАННЫЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ НА ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ

С появлением современных ЭВМ слово «алгоритм» прочно вошло в математический лексикон. Означает оно процедуру решения, состоящую из множества шагов, выполняемых в строго определенной последовательности. Если требуется разделить одно большое число на другое, то найти частное вам помогает алгоритм деления. ЭВМ не умеет решать задачи самостоятельно: программисту приходится каждый раз составлять точный перечень тех действий, которые необходимо произвести, чтобы получить решение. Искусство программирования для ЭВМ сводится главным образом к искусству построения эффективных алгоритмов. Мы говорим об искусстве, а не о технике программирования потому, что таинственные озарения, удачные догадки и интуиция играют решающую роль в создании хороших алгоритмов.

Под хорошим мы понимаем алгоритм, позволяющий решать задачу в кратчайшее время. Эксплуатация ЭВМ и содержание обслуживающего персонала обходится в изрядную сумму, поэтому хороший (эффективный) алгоритм дает немалую экономию. Существует даже быстро развивающаяся область современной математики, называемая исследованием операций, которая только тем и занимается, что ищет наиболее эффективные способы решения сложных задач.

Хотя в этой главе собраны процедурные задачи занимательного характера, они позволят вам легко и приятно познакомиться со многими глубокими математическими понятиями. Например, первая задача позволит вам составить весьма ясное представление о том, что имеют в виду математики, когда толкуют об изоморфизме двух, казалось бы, не связанных между собой задач: игра в 15, в которой так силен мистер Ярмар, оказывается структурно-изоморфной знаменитой игре в «крестики-нолики». В свою очередь эта весьма популярная игра изоморфна хитроумной игре в слова, изобретенной канадским математиком Лео Мозером, и еще одной игре на «дорожной сети». Все эти игры обладают стратегиями, основанными на использовании одного из наиболее древних комбинаторных курьезов — магического квадрата 3×3.

Вы познакомитесь также с законом Архимеда (в задаче о взвешивании священного гиппопотама), с нерешенной задачей о справедливом разделе (в задаче о распределении домашних обязанностей), с некоторыми классическими комбинаторными задачами (в комментариях к задаче о краже веревки с колокольни) и с важными задачами теории графов (в задаче о ленивом искателе любовных приключений).

Теория графов занимается изучением различных множеств точек (вершин), соединенных линиями (ребрами). Многие практические задачи исследования операций допускают моделирование на графах. Некоторые из таких задач допускают изящные решения, например задача о построении минимального дерева, решаемая при помощи алгоритма Крускала. С задачей о минимальном дереве тесно связана еще одна задача — так называемая задача о дереве Штейнера. Общее решение ее пока не известно. Деревья Штейнера находят многочисленные приложения, поэтому специалисты по теории графов ведут весьма интенсивный поиск эффективных алгоритмов построения таких деревьев на ЭВМ.

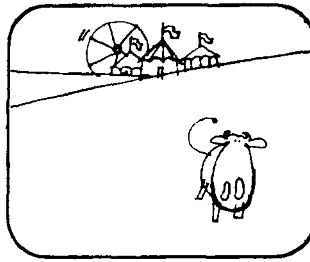
Задача Штейнера принадлежит к числу так называемых *NP*-полных задач. Эти задачи неразрешимы в том смысле, что эффективные алгоритмы их решений не известны и, возможно, не существуют. Например, даже при использовании лучшего из известных алгоритмов построения дерева Штейнера для n точек время, затрачиваемое на решение, с увеличением n возрастает экспоненциально. Даже при сравнительно небольшом числе точек (порядка нескольких сотен) на построение дерева Штейнера лучшее решение может быть найдено... через несколько миллионов лет! Вот что значит экспоненциальный рост.

Между NP-полными задачами существует удивительная взаимосвязь: если бы для решения одной из них удалось построить эффективный алгоритм, но он был бы применим и ко всем остальным задачам, а если бы удалось доказать, что для решения какой-то из задач эффективного алгоритма не существует, то это означало бы отсутствие эффективного алгоритма для решения и всех остальных задач. Математики подозревают, что в случае NP-полных задач мы имеем дело со второй альтернативой. Ведется широкий поиск эффективных алгоритмов, позволяющих находить не оптимальное дерево Штейнера, а дерево, достаточно близкое к оптимальному.

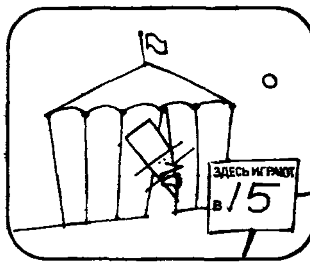
В этой главе чаще, чем в других, упоминаются последние результаты исследований, проводимых лучшими умами современной математики.

Игра в 15 на новый лад

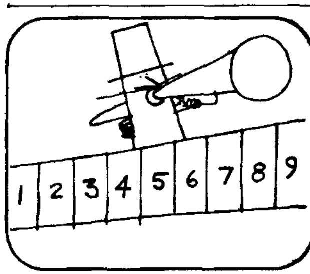
Когда на окраине городка открывается ярмарка, всех от мала до велика охватывает радостное возбуждение (говоря о всех, я имею в виду «всех, кроме коров»).



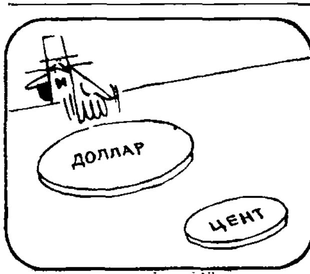
В этом году в одном из павильонов ярмарки желающие могли сыграть в новую игру, которая так и называется — «игра в 15».

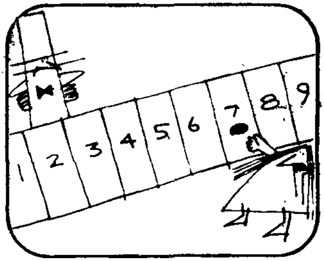


Мистер Ярмар. Рад приветствовать вас! Добро пожаловать к нам! Правила игры в 15 очень просты. Мы с вами по очереди ставим по монете на эти числа от 1 до 9. Кто ходит первым, безразлично.

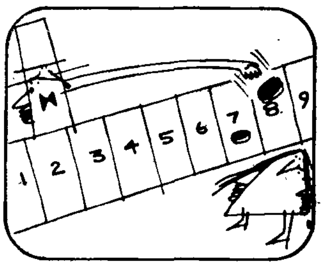


Мистер Ярмар. Вы отмечаете свои ходы центами, я отмечаю свои ходы серебряными долларами. Выигрывает тот, кто первым накроет своими монетами 3 числа, дающие в сумме 15. Выигравший забирает все монеты, выложенные на стол.

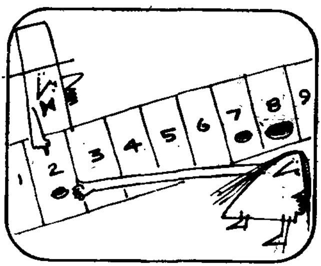




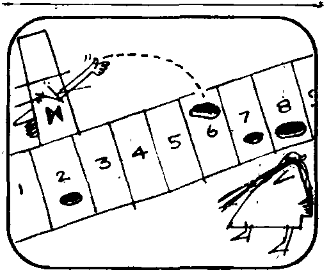
Посмотрим, как играют в 15. Первый ход — дама ставит цент на 7. Поскольку цифра 7 накрыта, ставить на нее в дальнейшем нельзя ни доллары, ни центы. То же можно сказать и обо всех остальных цифрах: ни одну из них нельзя накрывать монетами дважды, будь то центы или доллары.



Мистер Ярмар ставит доллар на 8.

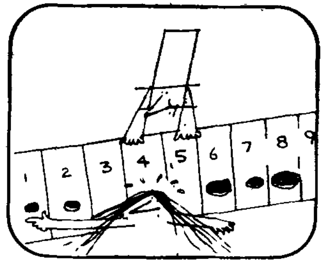


Дама делает второй ход и ставит цент на 2. Если ей удастся поставить цент на 6, она выиграет.

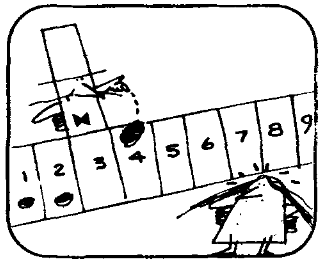


Мистер Ярмар, желая воспрепятствовать выигрышу партнера, ставит доллар на 6. Он выиграет, если ему удастся поставить доллар на 1.

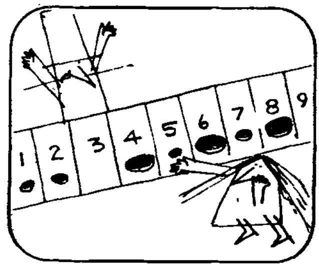
Дама замечает угрозу и блокирует мистеру Ярмару путь к выигрышу, ставя цент на 1.



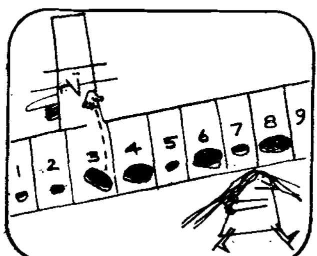
Мистер Ярмар с усмешкой ставит доллар на 4. Дама замечает, что если он следующим ходом поставит доллар на 5, то выиграет, и отрезает ему этот путь к выигрышу.

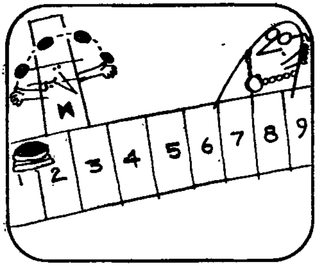


Дама ставит цент на 5.

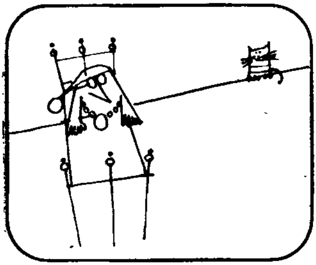


Но мистер Ярмар ставит доллар на 3 и выигрывает, так как $8+4+3=15$. Дама проиграла свои 4 цента.

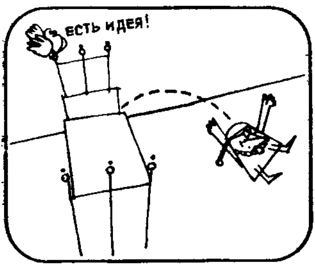




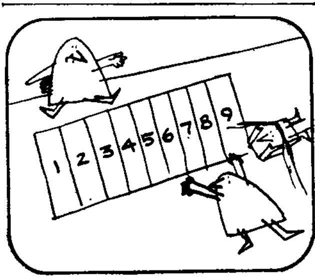
Мэру города игра в 15 очень понравилась. Пронаблюдав за игрой в течение почти целого дня, он пришел к убеждению, что мистер Ярмар придерживается тайной беспроигрышной стратегии.



Всю ночь напролет мэр пытался разгадать, в чем состоит тайная стратегия мистера Ярмара.



Внезапно мэра озарила поразительная по простоте идея.
Мэр. Я так и знал, что должна быть какая-то система! У доверчивых простаков, надеющихся заполучить серебряные доллары мистера Ярмара, нет ни шанса на выигрыш.



Какая идея осенила мэра? Не могли бы вы самостоятельно разработать беспроигрышную стратегию для игры в 15?

Старые добрые «крестики-нолики»!

Выигрышную стратегию указать нетрудно, если догадаться, что игра в 15 мистера Ярмара математически эквивалентна игре в «крестики-нолики». Установить эквивалентность нам поможет ло-шу — магический квадрат 3×3, впервые открытый в древнем Китае.

Чтобы в полной мере оценить изящество этого магического квадрата, выпишем прежде всего все возможные тройки однозначных чисел (попарно не равных и отличных от нуля), которые в сумме дают 15. Существует 8 таких троек:

$$1+5+9=15,$$
$$1+6+8=15,$$
$$2+4+9=15,$$
$$2+5+8=15,$$
$$2+6+7=15,$$
$$3+4+8=15,$$
$$3+5+7=15,$$
$$4+5+6=15.$$

Теперь присмотримся повнимательнее к единственному магическому квадрату 3×3:

$$\begin{matrix} 2 & 9 & 4 \\ 7 & 5 & 3 \\ 6 & 1 & 8 \end{matrix}$$

Если считать, что каждое число вписано в единичный квадрат (составляющий 1/9 от квадрата 3×3), то можно выделить 8 троек единичных квадратов, лежащих на одной прямой: 3 горизонтали, 3 вертикали и 2 диагонали. Каждая из прямых соответствует одной из троек чисел, дающих в сумме 15. Следовательно, любой набор из 3 чисел, обеспечивающий победу в игре мистера Ярмара, соответствует либо горизонтали, либо вертикали, либо диагонали магического квадрата.

Нетрудно видеть, что любая партия в 15 эквивалентна партии в «крестики-нолики», разыгрываемой на магическом квадрате. У мистера Ярмара имеется магический квадрат, начерченный на листке бумаги, в который он тайком поглядывает. Хотя существует единственный квадрат ло-шу, но его можно повернуть четырьмя разными способами и, если угодно, подвергнуть зеркальному отражению. Любая из 8 разновидностей магического квадрата может служить тайным ключом к гроссмейстерской стратегии при игре в 15.

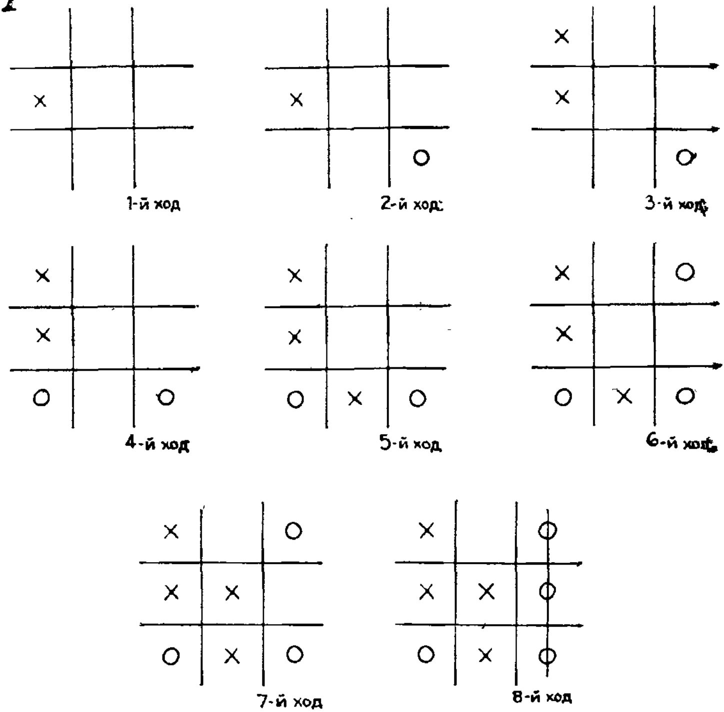
Играя с посетителем павильона в 15, мистер Ярмар мысленно играет с ним в «крестики-нолики» на магическом квадрате. Если игра в «крестики-нолики» происходит по всем правилам, то партия в 15 кончается вничью. Но легковерные посетители павильона, вздумавшие сразиться с мистером Ярмаром в 15, лишены огромного преимущества, так как не сознают, что в действительности играют в «крестики-нолики». Это облегчает задачу мистеру Ярмару, и он подстраивает своим партнерам каверзы и ловушки, вынуждая их делать ходы, ведущие к его выигрышу.

Чтобы разобраться, как действует мистер Ярмар, рассмотрим подробно партию, изображенную на картинках. Ходы приведены на диаграммах, показанных на рис. *1*. Даже если мистер Ярмар ходит вторым (ставит нолики), то на шестом ходу он может поставить даме западню, которая обеспечит ему выигрыш на восьмом ходу независимо от того, как именно пойдет дама на седьмом ходу. Всякий, кто умеет играть на гроссмейстерском уровне в «крестики-нолики», взяв на вооружение магический квадрат, станет непобедимым игроком в 15.

Понятие изоморфизма (математической эквивалентности) — одно из важнейших в математике. Во многих случаях трудная задача легко решается, если ее удается свести к изоморфной уже решенной задаче. По мере того как математика разрастается вглубь и вширь, она становится все более единой, все более упрощается по мере открытия все новых и новых изоморфизмов. Например, найденное в 1976 г. решение знаменитой проблемы четырех красок позволило доказать десятки других важных гипотез в иных разделах математики, которые были изоморфны проблеме четырех красок.

Чтобы помочь вам глубже разобраться в сущности такого фундаментального понятия, как изомор-

1

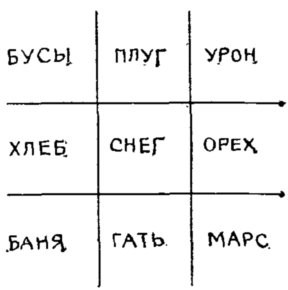


физм, рассмотрим следующую игру в слова. Берется 9 слов:

БУСЫ
ХЛЕБ
БАНЯ
ПЛУГ
СНЕГ
ГАТЬ
УРОН
ОРЕХ
МАРС

Двое игроков по очереди вычеркивают по одному слову, помечая каждый сделанный ход своими инициалами или условным значком. Выигрывает тот, кому первым удастся вычеркнуть три слова, имеющие общую букву. Пройдет немало времени, прежде чем игроки поймут, что и на этот раз они играют в добрые старые «крестики-нолики». Изоморфизм игр нетрудно установить, если вписать слова в клетки таблички, расчерченной для игры в «крестики-нолики» (рис. 2). Как нетрудно проверить, общая

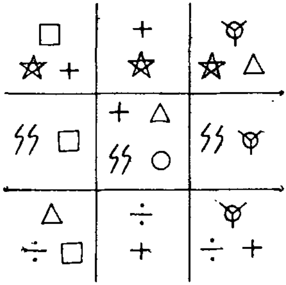
2



буква имеется лишь у трех слов, расположенных по горизонталям, вертикалям и диагоналям. Тем самым доказано, что играть в слова означает по существу играть в «крестики-нолики», и наоборот (или в 15).

Попробуйте подобрать другие 9 слов для игры. Разумеется, отнюдь не обязательно играть именно в слова родного языка. С тем же успехом можно воспользоваться и абстрактными символами, как это сделано на рис. *3*.

3

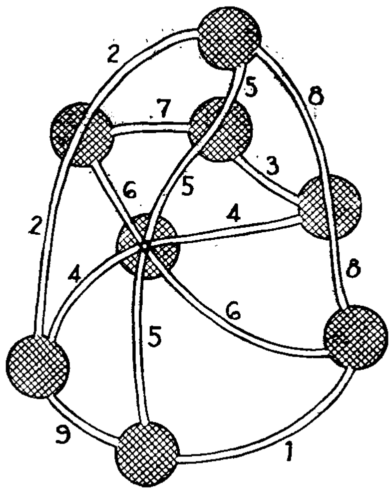


Еще лучше играть во все эти игры, записав слова, знаки или цифры на 9 карточках. Разложив карточки на столе исписанной стороной вверх, игроки могут по очереди брать по одной карточке до тех пор, пока один из них не выиграет.

Разобравшись в изоморфизме игры в 15, «крестики-нолики» и игры в слова, приступим к новой игре — на дорожной сети. В нее играют на карте дорог, изображенной на рис. *4*.

Между восемью городами проложены дороги. Вооружившись цветными карандашами (один игрок пусть выберет красный карандаш, а другой — синий), игроки по очереди закрашивают по одной дороге (каждую дорогу необходимо закрашивать целиком). Обратите внимание, что некоторые дороги проходят через города не обрываясь. В таких случаях закрашивать дорогу нужно не только до ближайшего города, а на всем ее протяжении. Выигрывает тот, кому первым удастся закрасить три дороги, ведущие в один и тот же город. На первый взгляд кажется, что новая игра не имеет ни малейшего отношения к трем уже рассмотренным нами играм. В действительности же и она изоморфна игре в «крестики-нолики»!

4



Чтобы установить изоморфизм, достаточно перенумеровать дороги так, как показано на рис. *4*. Каждая дорога соответствует клетке магического квадрата, помеченной тем же числом. Каждый город на карте соответствует горизонтали, вертикали или диагонали в магическом квадрате. Как и в предыдущих случаях, изоморфизм полный. Всякий, кто умеет на гроссмейстерском уровне играть в «крестики-нолики», не будет знать горечи поражений и в новой игре.

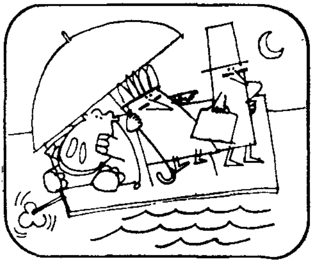
На рис. *5* изображен один из 880 различных (не переходящих друг в друга под действием поворотов и отражений) магических квадратов 4×4. Постоянная этого квадрата (сумма чисел, стоящих на любой горизонтали, вертикали и диагонали) равна 34. Может ли такой квадрат служить ключом для беспроигрышной игры в 34, то есть игры, в которой игроки по очереди выбирают число от 1 до 16 (ни одно число не разрешается выбирать дважды) до тех пор, пока у одного из игроков не наберется четыре числа, дающие в сумме 34. Изоморфна ли игра в 34 игре в «крестики-нолики» на магическом квадрате, изображенном на рис. 5? Нет, не изоморфна! Почему?

5

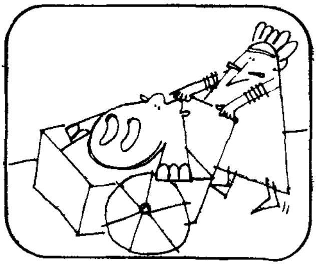
7	12	1	14
2	13	8	11
16	3	10	5
9	6	15	4

Можно ли так изменить правила игры в «крестики-нолики», чтобы победную комбинацию образовывали четыре клетки, не лежащие на одной горизонтали, вертикали или диагонали, и утраченный изоморфизм был восстановлен?

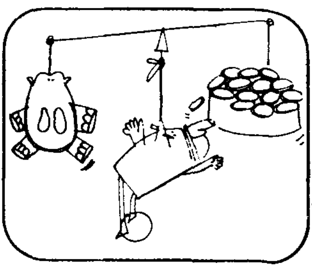
Как взвесить гиппопотама



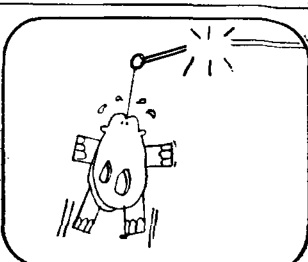
Так уж повелось, что бремя забот о священном гиппопотаме нес на своих плечах вождь племени, собственноручно кормивший и всячески ублажавший своего подопечного.



Каждый год в день своего рождения вождь, прихватив с собой лодку сборщика податей и священного гиппопотама, отправлялся вверх по реке в те места, где стояла хижина, возведенная специально для сбора дани.



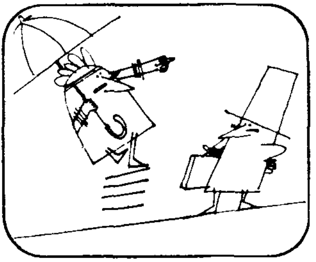
Племя платило вождю дань — столько золотых слитков, сколько требовалось, чтобы уравновесить священного гиппопотама. На чашу огромных весов ставили священное животное и уравновешивали его грудой слитков золота на другой чаше.



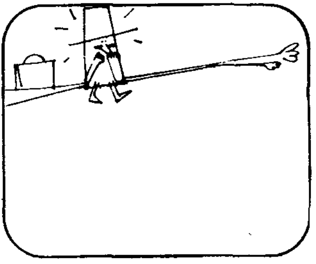
Однажды вождь племени так раскормил священного гиппопотама, что весы не выдержали непомерной тяжести и сломались. На починку их потребовалось бы несколько дней. Над торжественной церемонией сбора дани нависла угроза срыва.

Вождь племени был вне себя от ярости. Он вызвал сборщика податей.

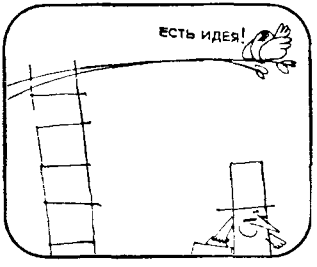
Вождь. Я не желаю ждать. Золото мне нужно сегодня и ровно столько, сколько весит священный гиппопотам. Если ты не придумаешь, как отмерить нужное количество золота до захода солнца, я прикажу отрубить тебе голову.



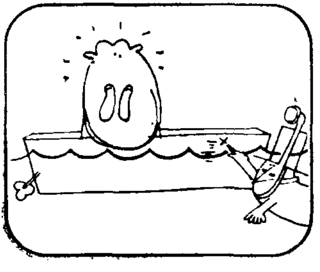
Несчастный сборщик податей от страха почти перестал что-либо соображать. Лишь огромным усилием воли ему удалось собраться с мыслями.

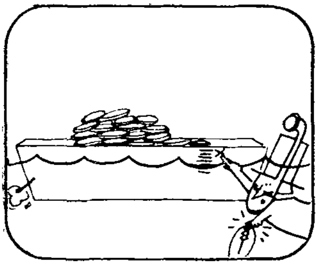


После нескольких часов напряженных размышлений ему пришла в голову блестящая мысль. Вы не догадываетесь, что именно он придумал?



Как и все гениальное, предложенный им выход из создавшегося положения был необычайно прост. Сборщик податей ввел священного гиппопотама на пустую лодку вождя и отметил снаружи на борту лодки уровень, до которого та погрузилась в воду.





Затем он свел гиппопотама на берег и принялся нагружать лодку золотыми слитками. Так он трудился до тех пор, пока лодка не погрузилась в воду по сделанную ранее отметку, после чего с полным основанием доложил вождю, что вес груды золота в лодке равен весу священного гиппопотама.

Эврика!

По закону Архимеда, плавающее тело вытесняет объем воды, масса которого равна массе тела. Следовательно, если священного гиппопотама ввести на лодку, то та погрузится в воду, вытеснив количество воды, масса которой равна массе гиппопотама.

А вот еще одна задача на близкую тему. Предположим, что лодка плавает в достаточно малом бассейне, где уровень воды можно точно измерить. Священного гиппопотама свели на берег, лодку нагрузили эквивалентной по массе грудой золотых монет и на стенке бассейна отметили уровень воды.

Предположим, что мы принялись швырять монеты одну за другой за борт лодки на дно бассейна. Глубина погружения лодки в воду при этом уменьшается. А что произойдет с уровнем воды в бассейне? Будет он подниматься или опускаться?

Даже физики иногда затрудняются ответить на этот вопрос. Одни полагают, что уровень воды в бассейне не изменится. Другие утверждают, будто уровень воды в бассейне поднимается из-за того, что утонувшие монеты вытеснят какой-то объем воды. И те, и другие заблуждаются.

Чтобы разобраться, в чем корень ошибки, необходимо снова вернуться к закону Архимеда. Каждое плавающее тело, вытесняет объем воды, масса которого равна массе тела. Золото гораздо тяжелее воды, поэтому объем воды, вытесняемой нагруженной золотом лодкой, гораздо больше объема самого золота. Когда же золото оказывается на дне бассейна, то оно вытесняет лишь объем воды, равный своему собственному объему. Поскольку этот объем гораздо меньше объема, который вытесняет лодка, груженная золотом, то уровень воды в бассейне понизится.

Физик Дж. Гамов однажды привел яркий пример, поясняющий решение нашей задачи. Некоторые звезды состоят из вещества в миллионы раз более плотного, чем вода. Кубический сантиметр такого вещества весит не одну тонну. Если швырнуть его за борт лодки, он опустится на дно бассейна и вытеснит лишь 1 $см^3$ воды, то есть ничтожно малое количество, поэтому вода в бассейне опустится. Ситуация с золотом точно такая же, только вода в бассейне опустится гораздо меньше.

Итак, мы отправили все золото на дно бассейна и отметили уровень воды на борту лодки. Предположим, что гиппопотаму захотелось искупаться. После того как он войдет в бассейн, уровень воды поднимется на 2 см. На сколько придется поднять отметку на борту лодки?

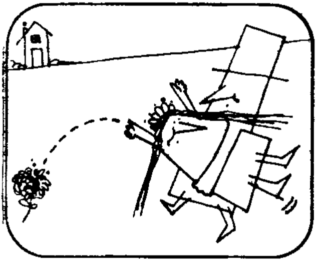
Представьте, что вы пьете прямо из бутылки кинки-колу и хотите оставить ровно половину объема всей бутылки. Отмерить нужное количество жидкости нетрудно: пейте до тех пор, пока поверхность жидкости в наклоненной вами бутылке не дойдет до того места, где стенки бутылки встречаются с донышком.

А вот аналогичная задача, требующая иного решения. В бутыль неправильной формы из прозрачного стекла налит концентрированный раствор кислоты. На стенках бутылки имеются 2 отметки: одна соответствует 10 л кислоты, другая — 5 л.

Кто-то отлил немного кислоты, отчего уровень ее в бутыли стал чуть ниже отметки 10 л. Вам требуется отлить для опыта ровно 5 л кислоты. Кислота слишком опасная и летучая, чтобы ее можно было переливать в другие мерные сосуды. Как легко и просто отмерить ровно 5 л кислоты?

Одно из решений состоит в том, чтобы, бросая в бутыль стеклянные шарики (или шарики из любого другого материала, не разъедаемого кислотой), довести уровень кислоты до отметки 10 л, после чего отливать кислоту до тех пор, пока ее уровень в бутыли не сравняется с отметкой 5 л.

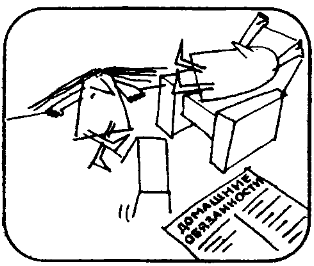
Как распределить домашние обязанности



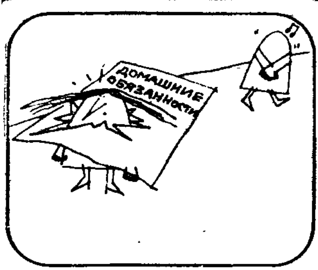
Мистер и миссис Джонс только что поженились. У каждого из них есть постоянная работа, и они решили распределить между собой и обязанности по дому.

Стремясь к честному распределению обязанностей по дому, супруги Джонс составили перечень всех работ по дому иа неделю.

Бастер. Я беру на себя половину обязанностей, дорогая. Остальные обязанности предоставляю тебе.



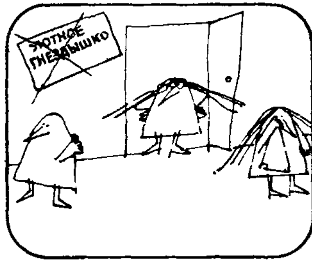
Жанет: Прошу прощения, Бастер, но, по-моему, ты распределил обязанности нечестно. Мне ты оставил всю грязную работу, а себе взял то, что чище и полегче.



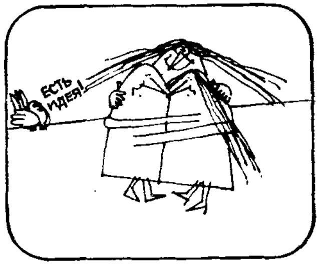
С этими словами миссис Джонс взяла список обязанностей по дому и отметила те работы, которые бы ей хотелось взять на себя. Ее муж не согласился с новым распределением обязанностей.

Жанет. Если ты думаешь, что я буду делать всю грязную работу, то ты просто сошел с ума.

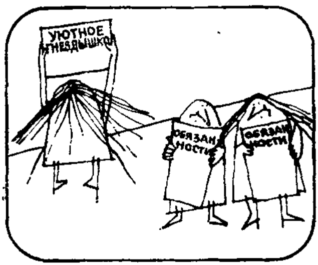
Пока супруги препекались, в дверь позвонили. Это пришла мать миссис Джонс.
Миссис Смит. Из-за чего драка, голубки? Ваши крики слышны на лестнице.



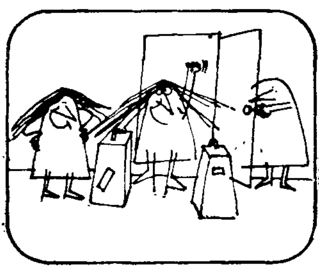
Выслушав доводы Бастера и его жены, миссис Смит улыбнулась.
Миссис Смит. Я нашла великолепное решение. Сейчас я покажу вам, как распределить обязанности по дому, чтобы вы оба остались довольны.



Миссис Смит. Пусть один из вас разделит перечень обязанностей на 2 части, каждую из которых он бы охотно взял на себя, а другой выберет себе любую половину. Тогда обязанности будут распределены в соответствии с желаниями каждого из вас, не так ли?



Но год спустя, когда миссис Смит переехала к молодоженам, ситуация несколько осложнилась. Миссис Смит охотно согласилась взять на себя треть обязанностей по дому, но все трое никак не могли придумать, как справедливо разделить между собой обязанности. Не взялись бы вы им помочь?



Задача о честном разделе, с которой столкнулась чета Джонсов, в книгах по занимательной математике обычно фигурирует, как задача о разделе пирога между двумя людьми, каждый из которых хотел бы заполучить не меньше половины.

Эту задачу мы решили, а вот задача о честном разделе пирога между тремя людьми, каждый из которых хотел бы заполучить не менее трети пирога, осталась нерешенной.

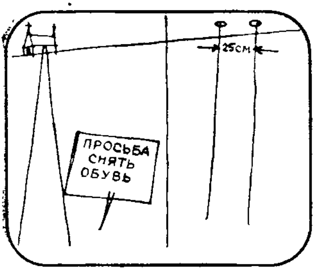
Она допускает следующее решение. Один из любителей пирога медленно ведет большим ножом над пирогом. Пирог может быть любой формы. Вести нож нужно так, чтобы доля пирога по одну сторону ножа непрерывно возрастала от нуля до максимума. Как только любой из трех участников раздела сочтет, что по одну сторону ножа осталась треть пирога, он произносит вслух: «Режь!» Тот, кто держит нож, немедленно отрезает кусок пирога и отдает тому, что подал команду. Если команду «Режь!» подадут одновременно двое или даже трое любителей пирога, отрезанный кусок вручается любому из них.

Двое остальных вполне удовлетворены куском пирога, доставшимся им на двоих: ведь этот кусок составляет не менее 2/3 от всего пирога. Задача о разделе этого куска сводится к предыдущей задаче о честном разделе между двумя претендентами и решается, если один режет, а другой выбирает.

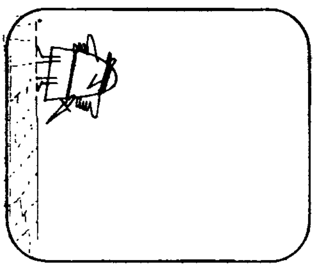
Метод честного раздела допускает очевидное обобщение на случай n участников. Один из участников ведет ножом над пирогом. Первый, кто подаст команду «Режь!», получает первый кусок (если команду подадут сразу несколько человек, отрезанный кусок достается одному из них по жребию). Затем процедура повторяется с $n-1$ остальными участниками. Так продолжается до тех пор, пока не останутся 2 участника. Последняя порция пирога делится между ними по принципу «я режу, ты выбираешь», или, если угодно, при помощи все той же универсальной процедуры: один ведет ножом над пирогом, и каждый может скомандовать «Режь!», если сочтет, что по одну сторону ножа осталось не менее $1/2$ порции, доставшейся им на двоих. Общее решение задачи о справедливом разделе может служить прекрасным примером доказательства, проводимого при помощи метода математической индукции. Ясно, что тот же алгоритм справедливого раздела применим и к задаче о распределении домашних обязанностей между n обитателями квартиры, не оставляющем ни у кого ни малейшего повода для неудовольствия.

Математик из Кембриджского университета Джон Х. Конуэй рассмотрел задачу о справедливом разделе при гораздо более жестких требованиях. Традиционный алгоритм позволяет каждому участнику получить долю, которую тот считает не меньше причитающейся ему. Существует ли алгоритм, при котором каждый участник будет также пребывать в уверенности, что никому из остальных не достанется больше, чем ему самому? Поразмыслив, вы поймете, что при числе участников больше трех традиционный алгоритм не дает такой уверенности. Конуэй и другие нашли решение задачи для случая, когда число участников с обостренным чувством справедливости равно трем. Для большего числа участников решение, насколько известно, пока не найдено.

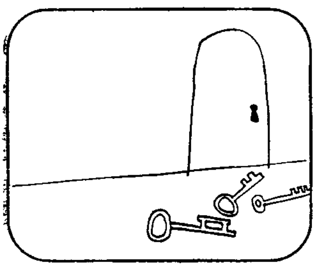
Воздушный акробат



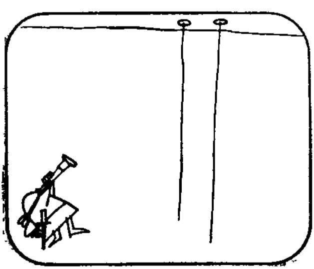
В звониице средневековой церкви сохранились две бесценные веревки, за которые звонари раскачивали колокола. Обе веревки проходят через небольшие отверстия в потолке комнаты звонарей. Потолок очень высокий. Расстояние между отверстиями 25 см, а диаметр каждого из них таков, что веревки свободно проходят сквозь них.



Тони, бывший акробат, вознамерился похитить веревки — отрезать от каждой из них кусок побольше.

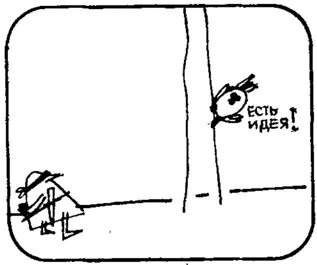


Тони. Как назло, колокола на самом верху звонницы заперты на семь запоров. Проникнуть можно только в комнату звонарей.

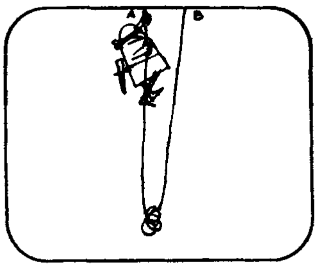


Тони. Придется залезть по веревкам и отрезать от каждой из них кусок побольше. Жаль, до потолка здесь так высоко, что если я отрежу больше трети видимой части веревки, то упаду и сломаю себе шею.

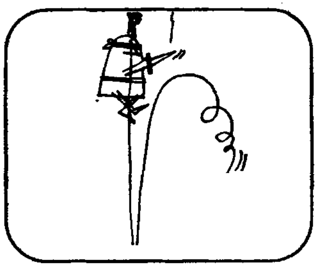
Тони размышлял довольно долго, пока, наконец, не придумал, как похитить обе веревки почти целиком.
Что бы вы сделали на его месте?



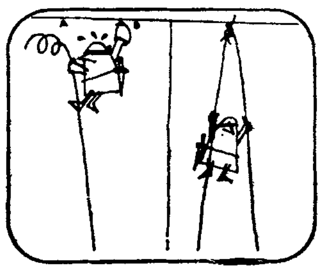
Решение Тони было весьма остроумным. Прежде всего он связал свободные концы веревок. Затем залез по одной из них (обозначим ее *А*) под самый потолок.

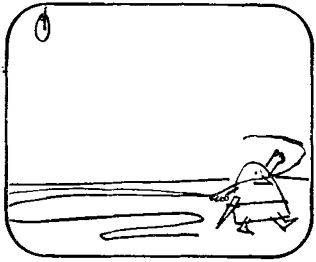


Повиснув под потолком на веревке *А*, Тони перерезал веревку *В* примерно на полметра ниже потолка и свисающий из отверстия остаток связал в петлю.



Продев в петлю руку, Тони повис на веревке *В* и перерезал веревку *А* под самым потолком, приняв все меры предосторожности, чтобы отрезанный кусок веревки *А* не упал на пол. Затем он продел веревку *А* сквозь петлю и принялся протягивать ее, пока наверху не оказались связанные концы веревок *А* и *В*.





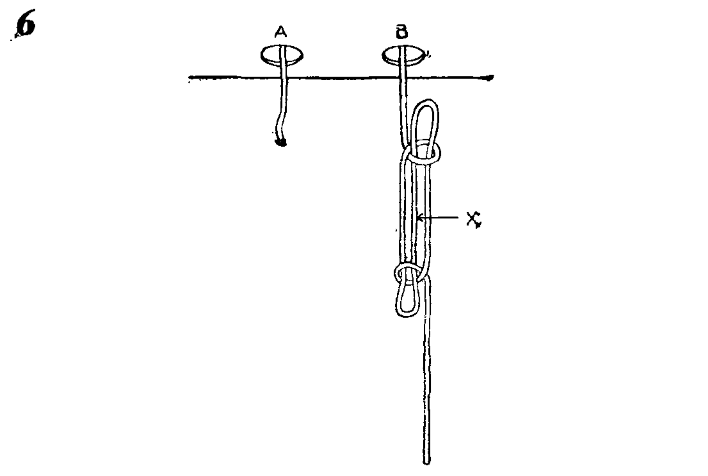
После этого Тони слез по сложенной вдвое веревке, выдернул ее из петли и ушел, унося с собой всю веревку *A* и почти всю веревку *B*.
А как бы вы это сделали?

Манипуляции с веревкой

Задачу, о которой вы узнали, прочитав рассказ о дерзком похитителе веревок, нельзя считать строго определенной, поэтому и решений у нее может быть несколько. Возможно, что приведенное нами решение наиболее «практично», но вы заведомо сумеете предложить еще несколько других вариантов, которыми мог бы воспользоваться вор. Не исключено, что ваше решение окажется лучше.

Например, похититель мог бы завязать на веревке *B* так называемую колышку — специальный узел, используемый моряками и альпинистами для временного укорочения снасти (рис. *6*). Повиснув на веревке *B*, он мог бы обрезать веревку *A* под потолком (и дать ей упасть на пол), после чего перерезать веревку *B* в точке *X*. Всем альпинистам хорошо известно, что узел будет держать, пока вор не соскользнет по веревке *B* вниз. Дернув за веревку *B*, он распустит колышку и получит почти всю веревку *B*, за исключением небольшого ее куска под самым потолком.

Другое возможное решение. Похититель взбирается наверх по веревке *A*. Ухватившись одной рукой за веревку *B* и вися на веревке *A*, он начинает перерезать волокно за волокном веревку *A*, пока не почувствует, что та вот-вот оборвется. Затем он стягивает обе веревки вместе и вися на двух веревках одновременно, начинает перерезать веревку В под самым потолком так же, как он перерезал веревку *A*, и спускается по двум веревкам вниз. Каждая из веревок в отдельности не выдержала бы его веса, но

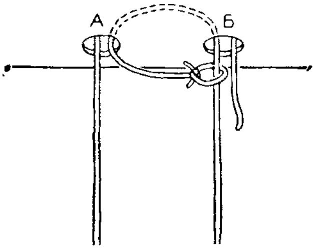


с половинной нагрузкой веревки справляются благополучно. Очутившись на полу, вор сильным рывком обрывает веревки по месту надреза.

Третий способ предполагает, что отверстия в потолке достаточно велики. Сначала похититель связывает свободные концы веревок *A* и *B* у пола. Затем взбирается по веревке *A*, перерезает веревку *B* под потолком и проталкивает ее длинный конец в отверстие для веревки *B*, пока тот не покажется из отверстия для веревки *A*, после чего начинает протягивать веревку *B* до тех пор, пока ее конец не окажется у пола, а узел — под потолком у отверстия для веревки *B*. Ухватившись у самого потолка за веревку *B*, продернутую сквозь отверстие для веревки *A*, и нижнюю часть веревки *A*, подтянутую теперь к потолку, похититель перерезает верхнюю часть веревки *A* (торчащую из отверстия для веревки *A*) как можно выше и, спустившись по двойной веревке, сдергивает ее на пол.

А вот более хитроумный вариант предыдущего решения. Свободные концы веревок остаются не связанными. Похититель взбирается по веревке *A*, перерезает веревку *B*, проталкивает ее длинный конец сквозь отверстие для веревки *B* и вытягивает его из отверстия для веревки *А*, после чего захлестывает его вокруг веревки *В* и завязывают узлом (рис. 7). Повиснув на веревке *В*, похититель перерезает веревку *А* и привязывает конец ее к узлу. Спустившись по веревке *В*, он тянет за веревку *А*, веревка *В* проскальзывает сквозь петлю и падает вниз.

7



Еще один вариант. Похититель взбирается по веревке *А* и завязывает петлю на верхней части веревки *В*. Повиснув на этой петле, он перерезает веревку *А*, проталкивает ее конец сквозь отверстие для веревки *А* и вытягивает его из отверстия для веревки *В*, после чего привязывает к петле. Повиснув на двух веревках, он перерезает веревку *В* под потолком над петлей, спускается по двум веревкам вниз и, потянув за веревку *В*, сдергивает их вниз.

Некоторые из приведенных выше решений практически не осуществимы: если бы похититель вздумал воспользоваться любым из них, то колокола зазвонили бы и он был бы пойман с поличным. Одно из достоинств самого первого решения состоит в том, что похититель осторожно натягивая веревку *В*, прежде чем повиснуть на ней, мог бы избежать лишнего шума (колокол *В* при соблюдении всех мер предосторожности не зазвонил бы). Прежде чем влезть по веревке *А*, похитителю также следовало бы осторожно натянуть ее.

Во многих классических процедурных задачах, аналогичных задачам о переправах, фигурирует переброшенная через блок длинная веревка, к каждому концу которой прикреплено по корзине. Льюис Кэрролл очень любил следующий вариант такой задачи.

Пленная королева вместе со своим сыном и дочерью заточены в каморке на самом верху высокой башни. Снаружи у их окна прикреплен блок, через который перекинута веревка. На каждом конце веревки висит по корзине. Вес обеих корзин совершенно одинаков. Верхняя корзина, находящаяся как раз против окна темницы, пустая, в нижней корзине, достающей до земли, лежит камень массой 30 кг, служащий противовесом.

Блок сильно заржавел и вращается со скрипом достаточно медленно для того, чтобы спуск в корзине был безопасен для каждого, чья масса превышает массу противовеса не более чем на 6 кг. При большей разности масс удар о землю может причинить тяжкие увечья. Разумеется, если одна корзина поднимается, то другая опускается.

Масса королевы 78 кг, масса ее дочери 66 кг и масса сына 36 кг. Укажите простейший, то есть состоящий из наименьшего числа шагов, алгоритм побега. Корзины достаточно велики, чтобы вместить либо 2 людей, либо одного человека и камень. При побеге августейшим пленникам никто не помогает, и они не могут помочь себе, потянув за веревку. Иначе говоря, блок действует только в том случае, если масса в одной корзине превосходит массу в другой корзине.

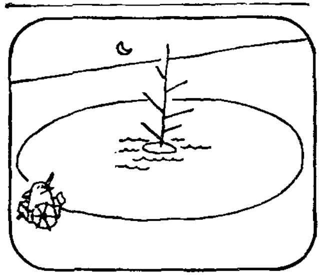
Простейшее решение легко найти, если воспользоваться «аналоговым устройством»: написать массы на отдельных карточках и подвигать их вверх и вниз. Вам не удастся организовать побег всех трех узников менее чем за 9 шагов. Вот как выглядит наиболее экономичный алгоритм побега:

1. Сын вниз, камень вверх.
2. Дочь вниз, сын вверх.
3. Камень вниз.
4. Королева вниз, камень и дочь вверх.
5. Камень вниз.
6. Сын вниз, камень вверх.
7. Камень вниз.
8. Дочь вниз, сын вверх.
9. Сын вниз, камень вверх.

Задачи этого типа иногда усложняются введением животных, которые не могут самостоятельно влезать в корзины и вылезать из корзин. Льюис Кэрролл предлагает следующий вариант предыдущей задачи. На вершине башни вместе с королевой находились не только ее сын, дочь и груз, но и свинья массой 24 кг, собака массой 18 кг и кошка массой 12 кг. Спускать четвероногих нужно с теми же предосторожностями, что и людей, но теперь кто-нибудь непременно должен быть и наверху и внизу, чтобы класть животных в корзины и доставать их оттуда.

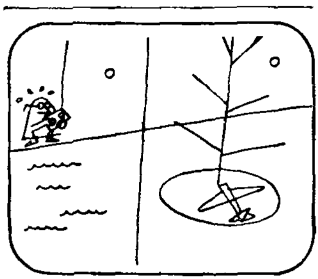
Удастся ли вам построить алгоритм побега короче 13 шагов? В обеих задачах тому, кто последним выйдет из корзины, следует поторапливаться, иначе он рискует получить по голове падающим противовесом!

Катастрофа на острове

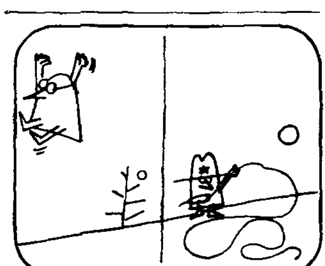


Орвилл поставил свою машину на берегу небольшого озера.

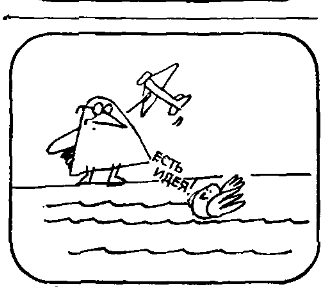
Орвилл. Какой ровный берег! Для запуска моей радиоуправляемой авиамодели лучшего места не найти. Ни тебе деревьев, ни скал. Единственное дерево — на островке посреди озера.



Орвилл хотел было заставить модель облететь вокруг дерева, но не рассчитал расстояние. Модель врезалась в дерево и упала на землю.



Орвилл не на шутку встревожился. Оставлять модель на острове не хотелось: слишком много сил и средств было израсходовано на нее. Озеро было глубоким, а плавать Орвилл не умел. В багажнике машины у Орвилла на всякий случай хранилась веревка, длина которой на несколько метров превышала поперечник озера в самой широкой части, но как воспользоваться веревкой Орвилл не знал.



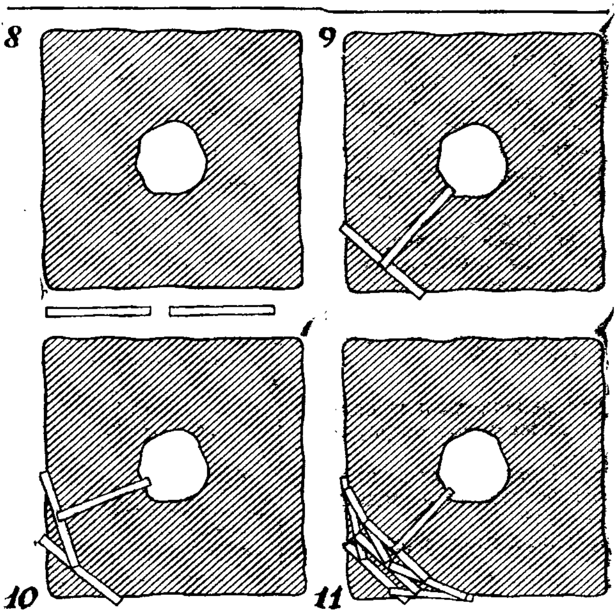
И вдруг Орвилла осенила простая и в то же время остроумная идея.

Орвилл. Делать нечего, придется намокнуть, зато модель будет спасена.

Как Орвилл достал свою модель?

Орвилл достал свою модель следующим остроумным способом. Он подогнал свою автомашину к самому краю воды и привязал к переднему бамперу длинную веревку. Держась за свободный конец веревки, он обошел дважды вокруг озера, отчего веревка обвилась вокруг ствола дерева, и, как следует натянув веревку, привязал свободный конец к бамперу. Получилась подвесная дорога: двойная веревка, натянутая между деревом на острове и бампером автомашины на берегу. Держась за веревку, Орвилл добрался до острова и, захватив модель, благополучно вернулся на берег.

В другой старинной головоломке речь идет о том, как, используя подручные средства, перебраться с суши на остров, который расположен в центре квадратного озера (рис. *8*). Путешественнику необходимо побывать на острове. Плавать он, как и Орвилл, не умеет. На берегу путешественник нашел две одина-



ковые доски, но каждая из них слишком коротка и немного не достает до острова.

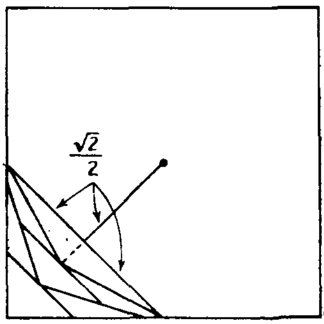
Как, пользуясь двумя досками, путешественник может попасть на остров? Решение показано на рис. *9*.

Обобщим классическую задачу: предположим, что путешественник нашел на берегу несколько досок. Сможет ли он добраться до острова, если доски окажутся более короткими, чем в классической головоломке?

С тремя досками вы справитесь довольно легко, построив мост, изображенный на рис. *10*. Но найти решение с 5 или 8 короткими досками несравненно труднее. На рис. *11* изображен мост, построенный из 8 досок.

В идеализированной постановке остров вырождается в точку, доски заменяются отрезками прямых, а для «перекрытия» достаточно касания. Представим себе, что мы располагаем неограниченным запасом одинаковых «досок». Предельный случай показан на рис. *12*. Если озеро имеет форму квадрата со стороной, равной 2 единицам длины, то каждая доска

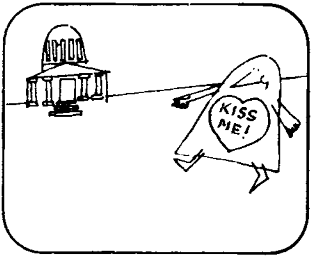
12



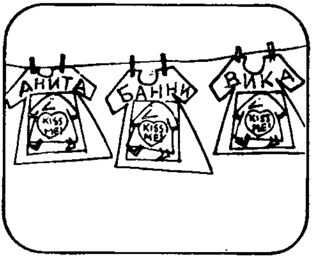
(даже если их у нас бесконечно много) не может быть короче $\sqrt{2}/2$. Доказать это можно с помощью теоремы Пифагора.

Попытайтесь решить ту же задачу в идеализированной постановке для «озер», имеющих какую-нибудь другую форму, например круглых или многоугольных.

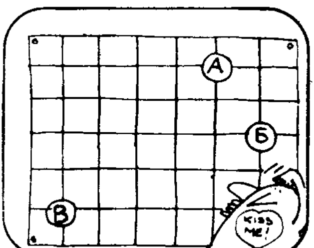
Ленивый донжуан



Джек считал себя величайшим в мире сердцеедом. Ои решил снять квартиру в Вашингтоне.

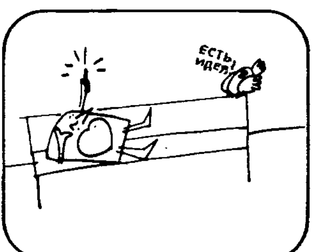


В этом городе у него жили три приятельницы, и он решил поселиться как можно ближе ко всем трем.



На плане города Джек отметил те места, где живут его приятельницы.

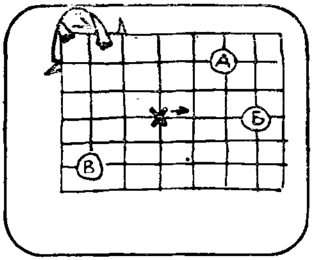
Джек. Я бы хотел поселиться в таком месте, откуда было бы удобно добираться до всех моих приятельниц, то есть чтобы сумма расстояний от моего дома до тех мест, где живут они, была бы минимальной.



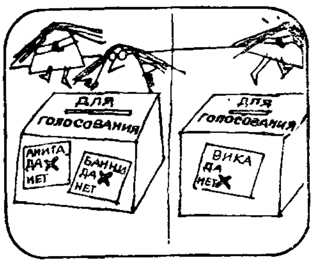
Джек прикидывал так и этак, но все было безуспешно: найти нужную точку никак не удавалось. Вдруг ему пришло в голову неожиданное и простое решение.

Джек. Есть идея! Теперь я зиаю, как легко и просто выбрать, где мне поселиться.

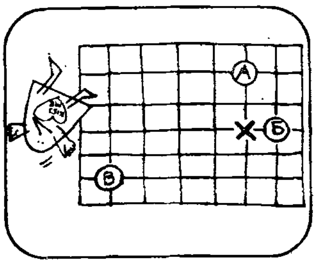
Джек мысленно опрашивал своих приятельниц, как бы они отнеслись к тому или иному его «переселению» и те «голосовали» либо за, либо против. Для начала Джек выбрал на карте точку в достаточно разумном месте и «переселился» на 1 квартал к востоку от нее.



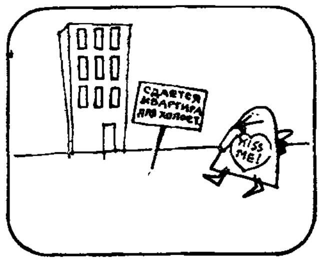
Джек. Анита и Банни проголосовали бы за такое переселение, так как я перебрался бы поближе к ним, а Вика проголосовала бы против. Но в расстоянии я выиграл бы больше, чем проиграл, поэтому я подчинюсь мнению, за которое подано большинство голосов.



Всякий раз, когда большинство голосов было за очередное переселение, Джек оставался на новом месте, а если большинство голосов было против, возвращался на старое. Наконец, он достиг точки, из которой нельзя было переместиться ни в одну сторону, чтобы девушки не проголосовали против. Там он и решил поселиться.



К его радости, квартирная плата в выбранном месте была ему по карману. Но через неделю Банни переехала на новую квартиру в 7 кварталах от своего прежнего дома.



Джек. Жаль, но придется переезжать на новую квартиру. Но когда Джек достал план города, то, к своему удивлению, обнаружил, что может оставаться на месте.
Как это может быть?

Алгоритм с голосованием

Если Банни переедет на 7 кварталов к востоку от того места, где жила раньше, то ее переезд никак не скажется на выборе резиденции Джека. Более того, Банни могла бы переехать сколь угодно далеко на восток, и место, выбранное для своей квартиры Джеком, по-прежнему оставалось бы оптимальным.

Эффективность алгоритма с голосованием вы сможете лучше оценить, применив к более обширной территории с прямоугольной планировкой, на которой отмечено более трех точек. Вы обнаружите, что алгоритм Джека позволяет быстро находить положение точки x, сумма расстояний от которой до всех отмеченных точек минимально, если число отмеченных точек нечетно. Почему алгоритм перестает работать при четном числе точек? Причина довольно ясна: при четном числе отмеченных точек не исключен «ничейный» исход голосования, а как только голоса разбиваются поровну, алгоритм не срабатывает.

Попробуйте самостоятельно ответить на следующие вопросы:

1. Не могли бы вы предложить эффективный алгоритм, действующий при четном числе отмеченных точек?

2. При каких условиях перемещение одной или нескольких отмеченных точек не сказывается на положении точки x?

3. Изменится ли алгоритм с голосованием, если мы вздумаем учесть ширину улиц?

4. Изменится ли алгоритм, если точка x и отмеченные точки могут не располагаться на перекрестках?

5. Применим ли алгоритм с голосованием в том случае, если сеть улиц образована прямыми, идущими в самых разных, а не только в двух взаимно перпендикулярных направлениях?

6. Останется ли алгоритм в силе, если улицы будут кривыми или зигзагообразными?

Хотя алгоритм с голосованием применим к любым сетям, на «чистой» плоскости без выделенной сети он сразу утрачивает силу, и это понятно: по чистой плоскости мы можем перемещаться в любом направлении, не придерживаясь заданных маршрутов. Общая задача ставится так. На плоскости заданы n точек. Требуется найти такую точку x, чтобы сумма кратчайших расстояний от нее до заданных точек была минимальной. Рассмотрим, например, три города A, B и C. Где следовало бы построить аэропорт, чтобы суммарная протяженность воздушных маршрутов из него в эти города была минимальной? Ясно, что если бы речь шла о длине автомобильных маршрутов, связывающих некоторую точку на карте с городами A, B и C, то ответ был бы другой. Иначе говоря, идеальное место для аэропорта может не совпадать с идеальным местом для автобусной станции.

Ответ, основанный на довольно сложных геометрических соображениях, гласит: идеальным местом для строительства аэропорта была бы такая точка на карте, в которой лучи, проведенные к трем городам, образовывали бы между собой углы в 120°. Если бы число городов возросло до четырех, причем города располагались в вершинах выпуклого четырехугольника, то аэропорт выгоднее всего было бы построить в точке пересечения диагоналей. Доказать это утверждение совсем не трудно. Общая задача (найти точку x, сумма кратчайших расстояний от которой до n заданных точек плоскости минимальна) более трудная.

Может быть, вам удастся придумать простое механическое устройство (аналоговую вычислительную машину), позволяющее быстро находить положение точки x для трех заданных точек на плоскости?

Пусть плоскость изображает плоскость стола. В каждой из заданных точек просверлим в крышке стола отверстие. Затем пропустим через эти отверстия по веревочке, верхние концы веревочек свяжем в один узел, а к нижним подвесим одинаковые грузики. Равные силы, действуя на веревочки, заставят их «проголосовать» за жителей трех населенных пунктов, и узел расположится в точке x. Наша аналоговая машина основана на использовании изоморфизма между математической структурой задачи и структурой физической модели.

Усложним теперь исходную задачу. Предположим теперь, что в точках A, B и C находятся не населенные пункты с одинаковым количеством жителей, а три дома, причем в доме A живут 20 школьников, в доме B — 30 школьников и в доме C — 40 школьников. Все дети ходят в одну школу. Где следует выстроить школу, чтобы свести до минимума сумму расстояний, проходимых всеми детьми?

Если дети идут в школу по улицам города, то можно воспользоваться алгоритмом с голосованием, считая, что каждый ребенок обладает одним голосом. Он позволяет довольно быстро указать, где именно следует построить школу. Но если три дома возведены в чистом поле и школьники могут идти в школу по прямой, то как следует усовершенствовать нашу аналоговую вычислительную машину, чтобы и эта задача была ей под силу?

Нужно взять грузики с массами, пропорциональными числу детей в каждом доме. Положение узла покажет, где именно следует построить школу.

Сработает ли наше аналоговое устройство, если в одном доме учеников окажется больше, чем в двух других домах, вместе взятых, например, если 20 школьников живут в доме A, 30 школьников — в доме B и 100 школьников — в доме C? Да, сработает: грузик весом в 100 единиц будет тянуть свою веревочку до тех пор, пока узел не совместится с отверстием C. Это означает, что школу следует построить в точке C!

Будет ли наше аналоговое вычислительное устройство работать также безотказно при числе точек больше трех? Попробуйте придумать такое расположение четырех точек, при котором наше устройство даст заведомо неверный результат. Указание: что произойдет, если четыре точки расположены в вершинах невыпуклого четырехугольника?

Изучением систем точек (вершин), соединенных линиями (ребрами), занимается теория графов — обширный и быстро развивающийся раздел современной математики. Существуют десятки теорем теории графов, позволяющие находить минимальные пути. Одни задачи, связанные с отысканием минимальных путей, давно решены, другие ожидают своего решения. Примером знаменитой решенной задачи может служить следующая.

На плоскости заданы n точек. Требуется соединить их отрезками прямых так, чтобы суммарная протяженность сети была наименьшей. Добавлять новые вершины к заданным запрещается. Сеть, которую требуется построить, естественно назвать минимальным деревом. Можете ли вы предложить алгоритм для построения минимального дерева?

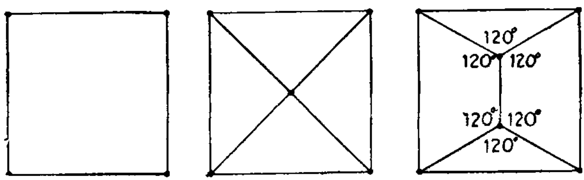
Алгоритм Крускала (названный в честь Джозефа Б. Крускала, который впервые предложил его) позволяет свести построение минимальной сети к следующим этапам.

Определить расстояния между любыми двумя точками и расположить все расстояния в порядке возрастания (напомним, что расстоянием между двумя вершинами в графе называется число ребер, ведущих из одной вершины в другую). Кратчайшее расстояние равно 1, затем идет расстояние 2 и т. д. Если два расстояния одинаковы, то безразлично, какое из них считать первым. Соединить отрезками прямых все точки, расстояние между которыми равно 1. Затем соединить отрезками прямых все точки, расстояние между которыми равно 2, 3, 4, 5 и т. д. Никогда не проводить отрезок, замыкающий цикл. Если проведенная линия замыкает цикл, отбросить соответствующую пару точек и перейти к рассмотрению точек, разделенных следующим по величине расстоянием. Проделав все эти операции, мы получим минимальное дерево, соединяющее все заданные точки.

Минимальные деревья обладают интересными свойствами. Например, все ребра пересекаются только в вершинах, причем в одной вершине пересекается не более 5 ребер.

Минимальные деревья отнюдь не обязательно совпадают с кратчайшей сетью, соединяющей n точек. Напомним, что дополнять сети новыми вершинами не разрешается. Если снять запрет на новые вершины, то сети могут стать короче. В качестве простого примера достаточно рассмотреть четыре вершины единичного квадрата. Минимальное дерево состоит из любых трех сторон квадрата (рис. ***13***, слева). Предположим, что разрешается вводить новые вершины. Существует ли тогда сеть короче 3, соединяющая четыре вершины?

13

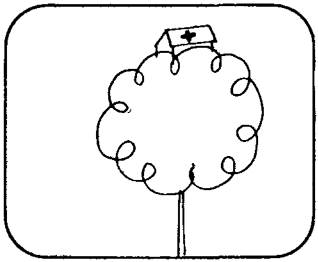


Большинство людей считает, что минимальную сеть образуют две диагонали квадрата (рис. ***13***, посредине), но это не верно. Правильное решение изображено на рис. 13, справа. Суммарная длина двух диагоналей квадрата равна $2\sqrt{2} \approx 2{,}82\ldots$ Суммарная длина сети на правом рисунке меньше, она равна лишь $1+\sqrt{3} \approx 2{,}73\ldots$

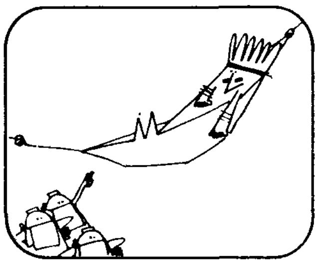
Общая задача о построении минимальной сети, соединяющей n заданных точек на плоскости (при условии, что разрешается вводить новые вершины), известна под названием задачи Штейнера. Она решена лишь в отдельных частных случаях. Эффективный алгоритм, позволяющий определять положение «точек Штейнера» (новых вершин) минимального дерева Штейнера, соединяющего n заданных точек плоскости, не известен. Задача Штейнера имеет многочисленные приложения в технике — от элементов микросхем, используемых в ЭВМ, до прокладки кратчайших сетей железных дорог, воздушных маршрутов, телефонных линий и любых других видов транспорта и связи.

Хирурги и инфекция

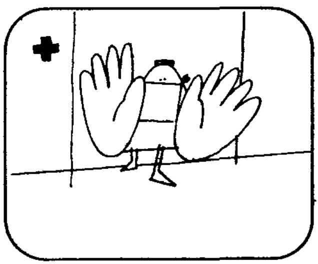
В чаще тропических джунглей расположен госпиталь, в котором работают три хирурга: Джонс, Смит и Робисон.



Вождь местного племени поступил в госпиталь по подозрению в опасном инфекционном заболевании, требовавшем неотложного хирургического вмешательства. Ввиду особой сложности операции, ее должны были проводить, сменяя друг друга, все три хирурга. При осмотре вождя они могли заразиться и стать носителями инфекции.

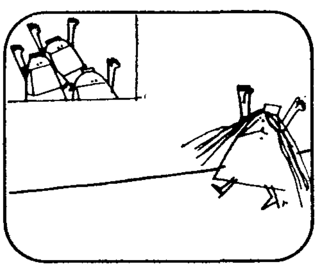


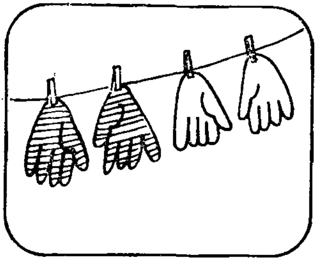
Каждый хирург оперирует в тонких резиновых перчатках. Если он болен, то инфицируется внутренняя поверхность перчаток, соприкасающаяся с его руками. Если болен вождь, то инфицируется наружная поверхность перчаток.



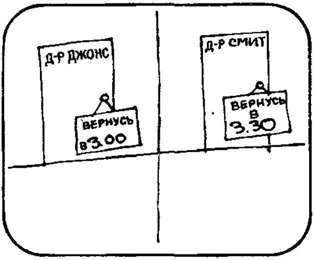
Перед самым началом операции в комнату, где хирурги мыли руки, вбежала старшая сестра мисс Клини.

Мисс Клини. У меня для вас плохие новости, уважаемые эскулапы.

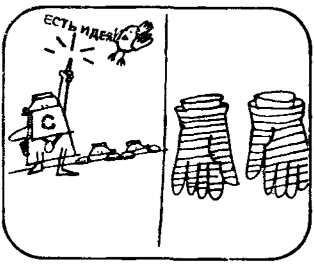




Мисс Клини. У нас остались только две пары стерильных перчаток: одна пара белых и одна пара синих.

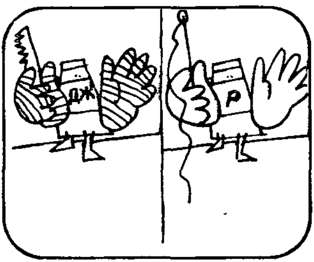


Доктор Джонс. Только две пары? Если я оперирую первым, то обе стороны моих перчаток могут оказаться зараженными. После Смита, если он будет оперировать вторым, окажутся зараженными обе стороны другой пары перчаток, и Робисону не в чем будет оперировать.



Вдруг лицо доктора Смита просветлело.

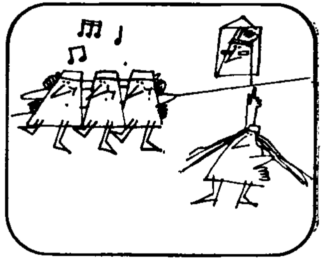
Доктор Смит. А что если я надену две пары перчаток — синие поверх белых. Одна сторона каждой пары инфицируется, а другая останется стерильной.



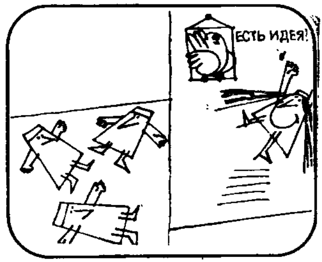
Джонс быстро схватил мысль коллеги.

Доктор Джонс. После вас я надену синие перчатки стерильной стороной внутрь, а Робисон, вывернув, наденет белые перчатки стерильной стороной внутрь. При этом каждый из нас избежит опасности заразиться.

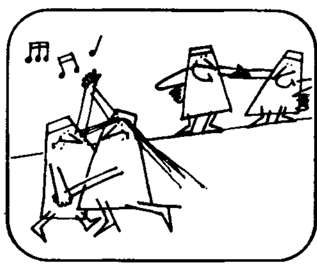
Сестра Клини. А о вожде вы не подумали? Ведь если кто-нибудь из вас является носителем инфекции, то вы можете заразить вождя во время операции.



Справедливое замечание медсестры повергло хирургов в замешательство. Что делать? И тут мисс Клини осенило.
Сестра Клини. Я придумала, как вам втроем оперировать вождя, не подвергая ни себя, ни его риску заражения.



Никто из трех врачей так и не смог ничего предложить, но когда мисс Клини объяснила, в какой последовательности надлежит надевать и выворачивать перчатки, все согласились, что ее план действительно обеспечивает полную безопасность и вождя и хирургов. Как предложила действовать мисс Клини?



синий белый

Снаружи и внутри

Прежде чем объяснять великолепный выход из затруднительного положения, предложенный мисс Клини, постараемся основательно разобраться в первом варианте решения, исключавшем опасность заражения только для хирургов.

Пусть Б1 — внутренняя, а Б2 — наружная сторона белых перчаток, С1 — внутренняя, а С2 — наружная сторона синих перчаток.

Доктор Смит надевает обе пары перчаток: сначала он натягивает белые перчатки, а поверх них синие. Сторона Б1 инфицируется, так как соприкасается с руками доктора Смита, сторону С2 может инфицировать вождь. После операции Смит снимает обе пары перчаток. Доктор Джонс надевает синие перчатки стерильной стороной С1 внутрь, а доктор Робинсон выворачивает белые перчатки наизнанку и надевает их стерильной стороной Б2 внутрь.

Переходим теперь к описанию процедуры, предложенной мисс Клини.

Доктор Смит по-прежнему надевает 2 пары перчаток. Стороны Б1 и С2 могут оказаться после операции инфицированными, но стороны Б2 и С1 останутся стерильными.

Доктор Джонс надевает синие перчатки стороной С1 внутрь.

Доктор Робисон выворачивает белые перчатки наизнанку и надевает их стороной Б2 внутрь. Поверх белых перчаток он натягивает синие перчатки стороной С2 наружу.

Во всех трех случаях вождя касается только сторона С2 синих перчаток, поэтому он не подвергается опасности заразиться от кого-нибудь из хирургов.

Насколько известно, общий случай этой задачи никогда не рассматривался, хотя он и небезынтересен для любителей занимательной математики. Приведем его для тех, кто захочет испытать свои силы: сколько перчаток необходимо заготовить хирургической сестре, чтобы при самом жестком режиме экономии полностью исключить возможность заражения хирургов и пациентов, если известно, что n хирургам предстоит прооперировать k пациентов?

Глава 6

Словесные находки

НЕОЖИДАННЫЕ РЕШЕНИЯ РАЗЛИЧНОГО РОДА ЗАДАЧ О БУКВАХ, СЛОВАХ И ПРЕДЛОЖЕНИЯХ

Математики любят играть в слова. Например, в серьезной книге Ф. Харари и Э. Палмера «Перечисление графов»* мы встречаем примечание: «Рид сообщил Райту, что и он, и Райт допустили ошибку. Затем Рид и Райт, чтобы исправить положение вещей, указали в совместной работе на допущенную ранее ошибку. Возможно, что все это выглядело несколько иначе, ибо Райт утверждает, что он первый написал Риду». Примеров можно было бы привести так много, что они могли бы составить целую книгу.

Нетрудно понять, почему математикам нравятся такие шутки. Слова представляют собой не что иное, как комбинации букв, составленных в определенном порядке, так же как предложения — линейные последовательности слов, составленные в соответствии с формальными правилами синтаксиса. Таким образом, многое родит лингвистику с комбинаторной математикой. Словесные квадраты по своей структуре аналогичны магическим квадратам. Знаки препинания в предложении соответствуют математическим символам (скобкам, плюсам, минусам и т. д.), вводящим «пунктуацию» в алгебраические предложения.

---

* Харари Ф., Палмер Э. Перечисление графов. — М.: Мир, 1977, с. 29.

Все эти (и многие другие) приятные аналогии между языком и математикой собраны в последней, шестой главе нашей книги. Палиндромы — слова или фразы, которые читаются одинаково от начала к концу и от конца к началу,— аналогичны палиндромным числам. Как мы увидим, в теории чисел существует известная «гипотеза о палиндромных числах», не доказанная и не опровергнутая. О палиндромных простых и составных числах, являющихся квадратами и кубами, доказано немало интересных теорем. Другие головоломки в этой главе связаны с разбиением слов на части, во многом напоминающим разбиение чисел на суммы.

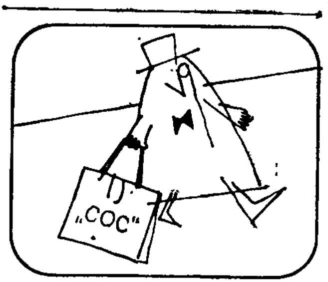
Если буквы рассматривать как геометрические фигуры, то мы сразу же вступаем в область необычных геометрических задач и головоломок. Мы увидим, каким образом эти задачи связаны с существованием двух важных разновидностей операции симметрии: симметрии относительно поворота на 180° и зеркальной симметрии. Мы обнаружим, что некоторые слова и даже целые предложения выдерживают поворот на 180°, и некоторые цифры на индикаторе микрокалькуляторов переходят в буквы латинского алфавита.

Буквы не обязательно считать жесткими и нерастяжимыми. Если мы будем рассматривать их не как геометрические фигуры, сохраняющие форму при поворотах и отражениях, а как топологические фигуры, которые можно изгибать, сжимать, растягивать, как резиновые жгуты, то перед нами откроется еще одна обширная область занимательных задач, с решением которых вам также предстоит познакомиться. Именно в этих задачах вы увидите «за работой» простейшие топологические понятия.

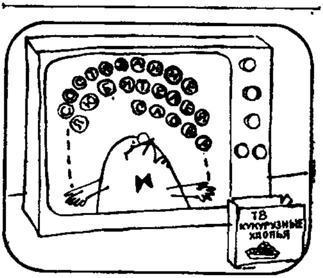
Наконец, вам предстоит встреча с задачами, связанными с важными понятиями математической логики. Простейшая задача о высказывании, противоположном высказыванию «не в», познакомит вас со свойствами отрицания и правилами обращения с отрицательными величинами в алгебре. Многие из наших шуточных задач становятся понятными, если вы четко осознаете, что говорить о словах и предложениях живого языка можно, лишь построив язык следующего, более высокого уровня, который логики называют метаязыком.

Мы умышленно стремились сделать заключительную главу нашей книги самой легкой и занимательной. Может быть, вас удивляет, почему для словесных забав и игр вообще нашлось место в книге по занимательной математике? По существу мы уже ответили на ваш недоуменный вопрос. Дело, разумеется, не в том, что математики любят играть в слова или что лингвистике присущи определенные комбинаторные аспекты. Мы хотели лишь показать, что даже игра в слова может приоткрыть перед вами неожиданные и важные аспекты серьезной математики.

Проф. С. О. Слог



Перед вами знаменитый математик проф. Сэм О. Слог.

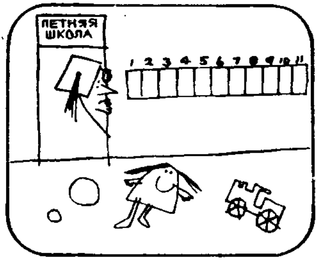


Проф. Слог ведущий и автор популярной телевизионной программы «Состязание любителей слова». Гости этой передачи, которым удается правильно ответить на вопросы проф. Слога, получают ценные призы.

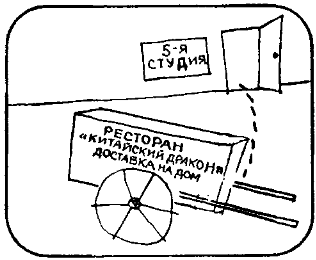
Проф. Слог. Игра в слова имеет много общего с математикой. Символами служат буквы и слова, а правила грамматики позволяют отличать допустимые комбинации от недопустимых.

Проф. Слог. Позвольте привести несколько примеров. Какая надпись по своему значению противоположна известной надписи «Не входить»?

Проф. Слог. Какое слово из 11 букв все выпускники Йельского университета пишут неправильно?



Проф. Слог. Вы, конечно, успешно справились с этими двумя заданиями. Надписи «Не входить» противоположна по значению надпись «Входить». Слово «неправильно» все выпускники Йельского университета так и пишут: неправильно. А сейчас позвольте представить вам нашего первого гостя.



Не не

Попросите кого-нибудь назвать действие, противоположное действию «не входить», и вы, как правило, услышите в ответ: «Выходить». Между тем действию «не входить» противоположно его отрицание «не не входить», то есть «входить». Два минуса дают плюс и в арифметике, и в формальной логике. Приведем несколько примеров, подтверждающих это правило.

1. $x = (7 - 3) - [(-4 + 1)]^3$.

2. Заголовок из газеты «Нью-Йорк таймс» от 6 мая 1965 г.: «Албания выступает против отмены закона о запрете контроля над рождаемостью».

3. Известный специалист по математической логике А. Н. Уайтхед однажды поблагодарил докладчика за то, что тот «изложил весьма темный предмет не без ясности».

4. Молодой человек получает письмо от своей подруги: «Должна сказать, что мои слова о том, что я всерьез подумываю о том, чтобы передумать, не

следует принимать всерьез. Я и не думаю передумывать».

5. Преподаватель математики: «Не могу не заметить, что мне так и не удалось объяснить вам смысл отрицания, поэтому я не стану утомлять вас повторением».

Студент: «Я понял все, что вы сказали, и признателен вам за вашу готовность перейти к новому материалу».

6. Иногда в нарушение правила двойное отрицание употребляется для усиления отрицания. Вот несколько примеров:

Не вздумайте не сказать мне, что за сплетни она распускает.

Никому не запрещается не прибегать к двойным отрицаниям.

Небезупречное поведение.

7. Профессор логики упомянул во время лекции о том, что, насколько ему известно, ни в одном естественном языке два утверждения никогда не означают отрицание. Из задних рядов раздается саркастический голос: «Ну, ну!»

Вопрос о слове «неправильно» ставит людей в тупик потому, что они воспринимают это слово как наречие, относящееся к глаголу «пишут», а не как само слово «неправильно». В современной семантике любой вопрос о слове или предложении относится к так называемому «метаязыку», в то время как слово и предложение принадлежат к предметному, или объектному, языку. Чтобы отличить эти два языка, утверждения и слова объектного языка принято заключать в кавычки. Например, кавычки позволяют избавиться от неоднозначности (или по крайней мере уменьшить ее) в вопросе, заданном проф. Слогом: «Какое слово из 11 букв все выпускники Йельского университета пишут «неправильно»? При смешении двух уровней языка нередко возникает путаница. Приведем несколько примеров.

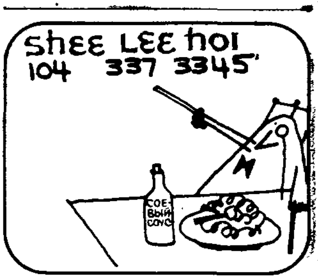
Как — вы — думаете была кличка этой лошади.

Я, Ли, китайский математик.

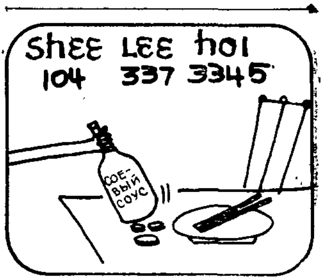
Можете ли вы объяснить, что означает следующая фраза: «То то означает совсем не то, что я имею в виду».

Мистер Ши Ли Хой

Проф. Слог пригласил мистера Ши Ли Хоя на передачу, как только увидел в телефонном справочнике номер его телефона. Заметили ли вы что-нибудь необычное в английском написании имени и фамилии мистера Ши Ли Хоя и номере его телефона?



Если перевернуть рисунок «вверх ногами», то английское написание имени и фамилии мистера Ши Ли Хоя переходит в номер его телефона и наоборот.



Цифры и буквы

Цифры на индикаторе микрокалькулятора, если их считывать в перевернутом виде, очень напоминают по своим очертаниям несколько стилизованные буквы латинского алфавита. Именно на этом основаны шуточные задачи, решаемые с помощью микрокалькуляторов и снискавшие в последнее время широкую известность.

Первая из этих шуток, с которой, по-видимому, и началось увлечение подобными задачами, облечена в форму рассказа об одном эпизоде арабо-израильской войны. Мы приводим вариант этой задачи, предложенной автором многотомного «Искусства программирования для ЭВМ» Дональда Э. Кнута: 337 арабов и 337 израильтян сражаются на участке пустыни, имеющем форму квадрата со стороной 8424 м. Кто выиграет от этого? Чтобы ответить на вопрос, возведем в квадрат числа 337 и 8424 и, просуммировав их, получим: 71 077 345. На индикаторе микрокалькулятора это число, если считывать его в перевернутом виде, напоминает название известной нефтяной компании SHELL OIL.

О числах, переходящих в слова при считывании их в перевернутом виде с индикатора микрокалькулятора, написаны целые книги. В следующей табличке показано, какую строчную или прописную букву латинского алфавита напоминает, если ее рассматривать в перевернутом виде, каждая из 10 цифр:

0	O	5	S
1	I	6	g
2	Z	7	L
3	E	8	B
4	h	9	b

Пользуясь этой таблицей, вы сможете без труда придумать несколько задач-шуток, решением которых будут числа, переходящие при считывании их с индикатора в перевернутом виде в соответствующие слова. Десятичной запятой (или точкой) можно разделять два слова.

Вот несколько хороших задач-шуток (в скобках рядом с каждым ответом указан русский перевод).

1. Как называется столица штата Айдахо? (4×8777 — Бойсе.)

2. Что сказал астронавт, впервые ступив на поверхность Луны? ($13527 : 3$ — Боже!)

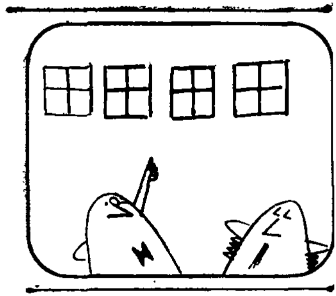
3. Чем больше берешь, тем больше остается. Что это такое? ($\sqrt{13719616}$ — дыра.).

4. Бутылка виски «Бурбон» стоит в Чикаго 8 долларов. Что предпочитают любители спиртного в Нью-Йорке? (8×4001 — выпивку.)

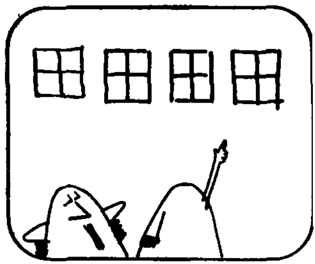
5. Что сказал доктор Ливингстон, когда Стэнли, разыскав его в дебрях Африки, спросил: «Доктор Ливингстон, если я не ошибаюсь?» ($(18 \times 4) : 3 + 3$ — междометие, выражающее крайнее изумление.)

6. Существуют ли аналогичные шутки, использующие слова не только английского, но и других языков с латинским алфавитом? (Прибавьте единицу к предыдущему ответу.)

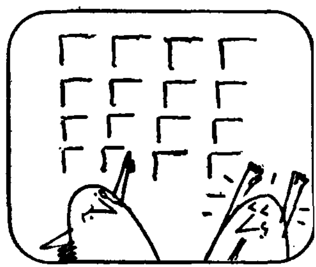
Неуловимые буквы «Г»



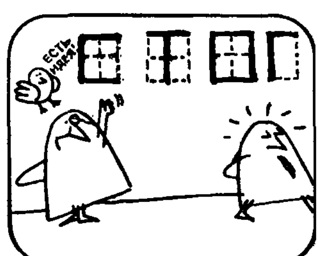
Проф. Слог. Мистер Ши Ли Хой, предлагаю вам первую задачу. Приз — 5 долларов. Перед вами 24 спички. Можете ли вы, сняв со стола 13 спичек, сложить из оставшихся сто «г»?



Мистер Ши Ли Хой. Еще Конфуций говорил, что если задачу нельзя решить, ее следует поцеловать и оставить в покое.
Проф. Слог. Вы рано сдаетесь, мистер Хой. Помните: мы играем в слова, и сто «г» для большей ясности можно прочитать вслух.



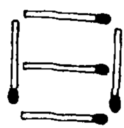
Мистер Ши Ли Хой. Я уже прикидывал и так, и этак. Сложить 100 букв «г» из 24 спичек невозможно: не хватит спичек.



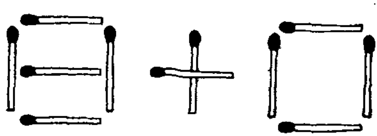
Проф. Слог. Ваше время истекло. Жаль, что вы забыли о слове «стог» — оно читается, как «сто «г»».

Головоломка, которая оказалась не под силу мистеру Ши Ли Хою, решается просто, если догадаться, что сто «г» может означать не сто букв «г», а одно слово «стог».

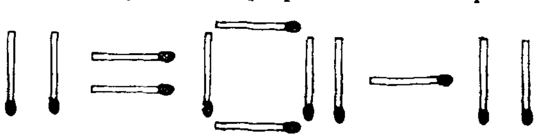
А вот еще один вариант той же головоломки. Его решение требует иной догадки. Спички сложены так же, как и прежде. На этот раз требуется взять 20 спичек так, чтобы осталось 8. Решение — цифра 8 — выглядит так:



Если две предыдущие головоломки со спичками покажутся вашим друзьям слишком легкими, предложите им следующий, более трудный вариант. Спички разложены так же, как и прежде. Требуется взять 13 спичек так, чтобы осталось 8. На этот раз нужно догадаться, что из спичек можно сложить арифметическое выражение, значение которого равно 8.

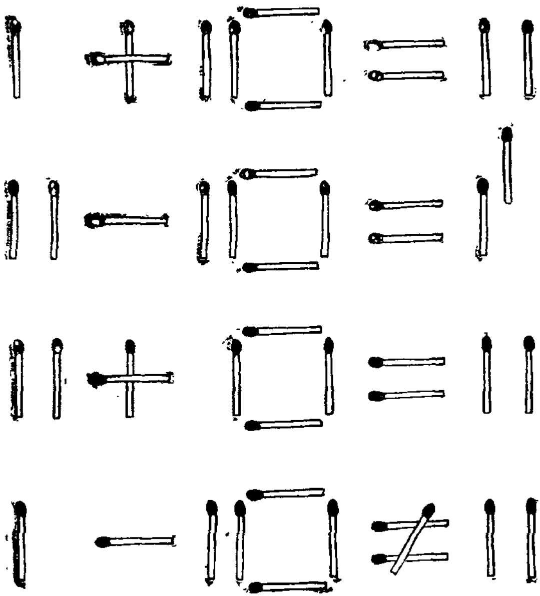


Существует бесчисленное множество других головоломок со спичками, палочками, карандашами, соломинками и аналогичными предметами. Предлагаем вам и вашим друзьям еще две задачи. Составьте из 12 спичек следующее арифметическое «равенство»:

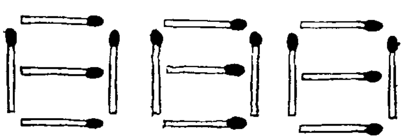


Требуется превратить его в настоящее равенство или неравенство, взяв или переложив одну спичку.

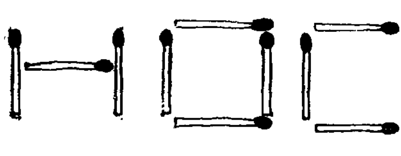
Задача допускает много решений. Приведем лишь 4 из них:



Разложите теперь спички так, как показано на рисунке:

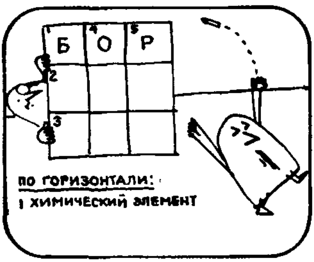


Устройте с друзьями состязание: кто сумеет прочитать в этих трех фигурках больше слов? Кто останется с носом?



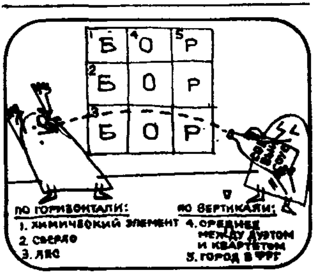
Мини-кроссворд проф. Слога

Проф. Слог. Справившись с нашим следующим заданием, мистер Ши Ли Хой, вы выиграете приз в 20 долларов. Перед вами простой кроссворд. В нем всего 3 слова по горизонтали и 2 по вертикали. Вам дается 3 мин, чтобы решить его.

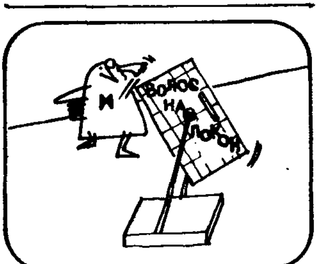


За 3 мин мистер Ши Ли Хой сумел отгадать лишь первое слово по горизонтали.

Мистер Ши Ли Хой. Мне очень жаль, профессор, но я не могу придумать больше ни слова!



Проф. Слог. Поверьте, мне тоже очень жаль, мистер Ши Ли Хой. Вы не заметили, что все три слова по горизонтали пишутся одинаково, хотя и отличаются по значению.



Проф. Слог. А теперь, пока мы ожидаем нашего следующего гостя, небольшое задание для наших телезрителей. Не можете ли вы так переставить буквы в трех словах «ВОЛОС НА ЛОКОН», чтобы получилось слово «КОЛОННА»?

Магические квадраты и анаграммы

Кроссворды с полным основанием можно отнести к числу комбинаторных задач: ведь речь идет о составлении пересекающихся последовательностей символов. Современные ЭВМ обладают достаточно большой памятью, чтобы вместить все слова любого естественного языка, и ничто не мешает нам, по крайней мере в принципе, составить программы, которые будут весьма успешно разгадывать кроссворды. Можно написать и такие программы, которые сами будут составлять кроссворды.

Большинство кроссвордов имеют «дырочки» — черные клетки или пробелы, разделяющие слова. В самых древних кроссвордах, не утративших своего первозданного вида, «дырочек» не было (так же как их нет в нашем шуточном кроссворде). Слова располагались, образуя так называемый «словесный квадрат». Вот, например, как выглядит такой словарь 4-го порядка (из четырехбуквенных слов):

ПУСК
УЗОР
СОДА
КРАБ

Четыре слова («пуск», «узор», «сода» и «краб») можно прочитать и по горизонтали, и по вертикали. Если по горизонтали стоят одни слова, а по вертикали другие, то словесный квадрат называется двойным:

ИГЛА
КРУГ
РАПА
АДАТ

Чем выше порядок, тем труднее составлять словесные квадраты, как простые, так и двойные. Попробуйте самостоятельно составить несколько словесных квадратов 4-го порядка. Если вы успешно справитесь с этим заданием, попытайтесь составить квадраты 5-го и 6-го порядка. Построить квадраты 7-го и еще более высокого порядка чрезвычайно трудно. Знатокам и ценителям удавалось изредка составлять словесные квадраты 8-го, 9-го и 10-го порядков, но при этом почти всегда приходилось использовать необычные, странно звучащие слова.

Последний вопрос проф. Слога (как из букв, входящих в слова «ВОЛОС НА ЛОКОН», составить слово «КОЛОННА») относится к так называемым анаграммам — составлению новых слов или фраз из букв, входящих в какое-нибудь другое слово или предложение (решение приведено в конце книги). Существует множество анаграмм самого забавного свойства, например:

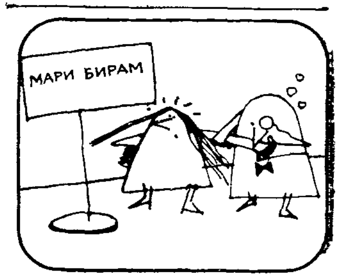
ШАМОТ — ТОМАШ
МАРС — СРАМ
ОКОРОК — РОКОКО

Может быть, вам удастся придумать примеры и получше.

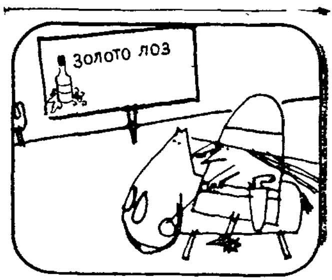
В старину анаграммы использовались для закрепления приоритета учеными, не торопившимися по тем или иным соображениям раскрывать суть своего открытия. Например, Галилей сообщил об открытии фаз Венеры в анаграмме: «Haec immatura a me jam frustra leguntur. O. V.», означавшей: «Этого от меня хотят слишком рано и напрасно». И лишь впоследствии дал правильную расшифровку анаграммы: «Cynthya figuras aemulatur mater amorum» («Мать любви [Венера] подражает видам Цинтии [Луны]»).

Мари Бирам

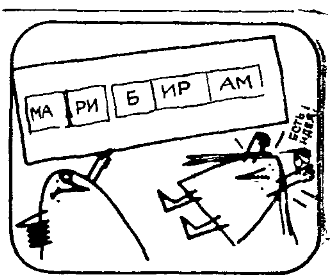
Следующим гостем проф. Слога была Мари Бирам. Что необычного в ее имени?



Может быть, эта реклама вин поможет вам. Надпись на рекламе обладает тем же свойством, что и имя Мари Бирам.



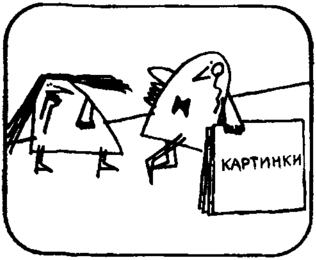
«Золото лоз» и «Мари Бирам» — палиндромы, то есть надписи, которые читаются одинаково в обе стороны: от начала к концу и от конца к началу.



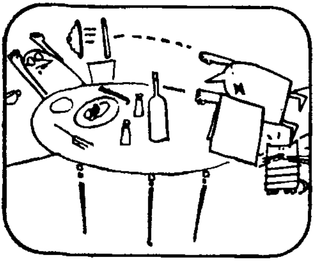
Ада

Можете ли вы привести другие примеры имен и фамилий, обладающих палиндромной симметрией? (Это не так просто, как кажется.) Вот несколько примеров: Анна, Тим Смит, Нелла Аллен, Тит.

Загадочные картинки

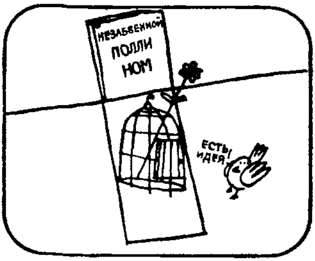


Проф. Слог. Добро пожаловать к нам в студию, Мари! Эти картины имеют самое непосредственное отношение к вашему первому заданию. На каждой из них изображено какое-нибудь известное математическое понятие. Разумеется, я имею в виду не «портрет», а скорее «скрытое изображение».



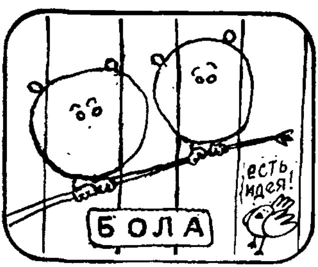
Проф. Слог. Позвольте мне пояснить, что я имею в виду, на примере. На этой картине изображено число π.

Мари. Кажется, я начинаю понимать, в чем дело. Официант подает, хотя и не очень вежливо, на стол *пи*рог, и в первом слоге слова «пирог» скрыто «изображение» числа π.



Проф. Слог. Совершенно верно. А вот перед вами 3 картинки-загадки. За каждую отгадку вы получаете приз в 10 долларов. Начнем с первой картинки. Что это?

Мари. Мне кажется, я отгадала. На этой картинке изображен «полли ном», то есть «полином», или «многочлен».

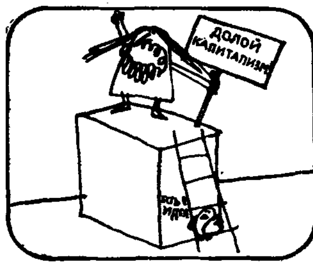


Проф. Слог. Правильно! А что изображено на второй картинке?

Мари. На ней изображена пара редких животных «бола». Значит, в этой картинке скрыто «изображение» параболы?

Проф. Слог. Против этого трудно что-нибудь возразить, Мари. Посмотрим, как вы справитесь с последней картинкой.

Мари. Это совсем просто. Перед нами «радикал».



1

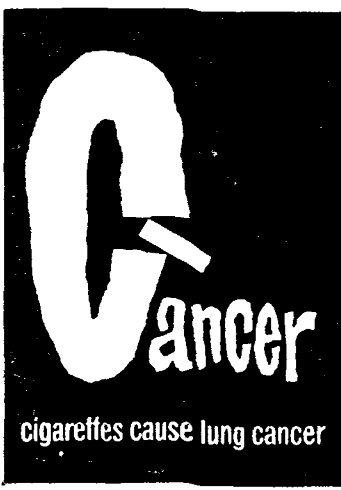
Рисуночное письмо

Загадочные картинки, в которых по определенным правилам «зашифровано» какое-нибудь слово, называются ребусами. Попробуйте придумать ребусы для нескольких математических терминов.

В близком родстве с ребусами состоит другая разновидность «рисуночного письма» — так называемые пиктограммы, изображающие то, что означает слово. Сущность пиктограмм отчетливо ясна из приводимых нами примеров (рис. *1*). Пиктограммы — новый, еще совсем юный вариант традиционных ребусов, успевших изрядно состариться.

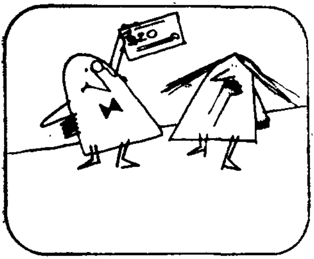
Пиктограммы, передающие образно смысл слов, давно стали неотъемлемой частью современной рекламы и плаката. Шрифты и надписи несут добавочную смысловую нагрузку, «рисуя» то, о чем должен говорить зрителю плакат (рис. **2**). Художники нередко используют этот прием при создании обложки. Пиктограммы находят также широкое применение в дорожных знаках, придавая им большую выразительность.

2



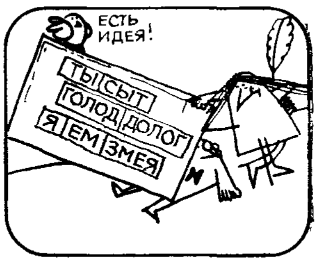
Британский плакат о вреде курения.

«Сумасшедшие» предложения

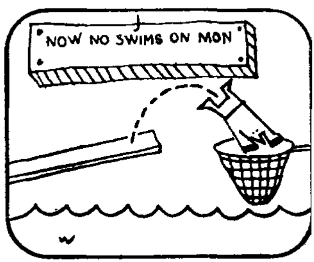


Проф. Слог. Следующее задание, дорогая Мари, посложнее. Вы должны сказать мне, что замечательного вам удастся заметить в трех надписях, которые я вам покажу. За каждую отгадку вы получаете приз в 20 долларов.

Проф. Слог. Вот первая надпись. Прочитайте ее внимательно и, пожалуйста, оставьте в покое мои уши. Не щекочите их перышком!
Мари. Не могу! Вы так умны и хороши собой, что я влюбилась в вас по уши.

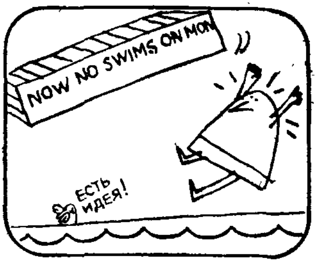


Проф. Слог. Никакие объяснения в любви не помогут вам получить приз.
Мари. Я все равно получу его, так как справилась с заданием. Первая надпись палиндром, как и мое имя, она читается одинаково в обе стороны.



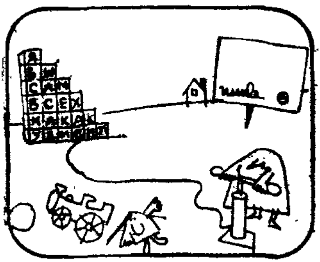
Проф. Слог. Очень хорошо, дорогая Мари. А что вы скажете об этой надписи? *

* Знание английского языка для выполнения этого задания не обязательно. — *Прим. перев.*

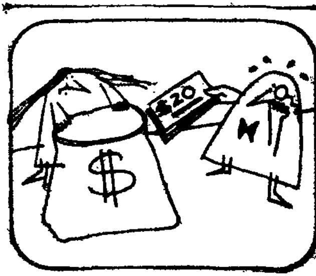


Мари. Позвольте взглянуть. Так! Это—почти палиндром, но не совсем. Минуточку! Поняла! Эта надпись читается одинаково в прямом и в перевернутом (вверх ногами или, если угодно, вниз головой) положении.

Проф. Слог. Вы снова правы, Мари! Переходим к последнему заданию.

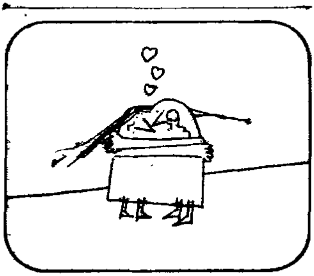


Мари. Я заметила закономерность. Каждое слово в этой надписи на 1 букву длиннее предыдущего.

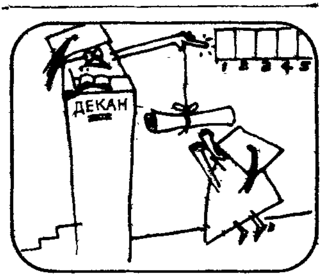


Проф. Слог. Великолепно! Вот еще 20 долларов, которые вы выиграли. Что вы собираетесь делать с этими деньгами?

Мари. Приглашу вас сегодня поужинать со мной, а затем покажу вам свою коллекцию словарей.



Проф. Слог. Согласен. До скорой встречи, Мари! А теперь, дорогие телезрители, пока наш следующий гость еще не пришел, мы воспользуемся свободной минутой, чтобы предложить вашему вниманию еще одну словесную задачку.



Проф. Слог. Какое слово из 5 букв все выпускники Гарвардского университета произносят плохо?

Еще немного о палиндромах

Тысячи замечательных палиндромов известны на всех основных языках. Придумать палиндром не так трудно, попробуйте и вы убедитесь в этом сами. Вот несколько известных примеров палиндромов на русском языке: «Кирилл лирик», «Ты сыт?», «Аргентина манит негра», «Я не реву — уверен я».

В классических палиндромах единицей служат буквы. Но можно составить и «крупноблочные» палиндромы, в которых единицами будут целые слова. Два замечательных примера таких палиндромов принадлежат Дж. А. Линдону:

1. «You can cage a swallow, can't you, but you can't swallow a cage, can you?» («Вы можете посадить ласточку в клетку, но проглотить клетку вы не можете, не так ли?»)

2. «Girl bathing on Bikini, eyeing boy, finds boy eyeing bikini on bathing girl» («Девушка, купающаяся на острове Бикини и украдкой поглядывающая на молодого человека, видит молодого человека, не отрывающего глаз от бикини на купающейся девушке»).

Существуют поэмы, которые читаются одинаково от начала к концу и от конца к началу либо по строкам, либо целиком.

Палиндромы — аналоги того, что математики называют двусторонней, или билатеральной, симметрией. Тела людей и многих животных обладают двусторонней симметрией. Многие творения человеческих рук также обладают двусторонней симметрией, например кресла, кофейные чашки и тысячи других предметов. Любые фигуры и тела, обладающие двусторонней симметрией, при отражении в зеркале переходят в себя. В этом и проявляется аналогия между билатеральной и палиндромной симметрией, при которой последовательность символов остается неизменной, если очередность символов изменить на противоположную.

Говоря о символах, мы имеем в виду не только буквы, но и цифры. Числовой палиндром — это число, которое читается одинаково слева направо и справа налево. Одна знаменитая гипотеза в теории чисел так и называется — «гипотеза о палиндромах». Возьмем любое число в десятичной системе счисления, вывернем его «наизнанку», записав от конца к началу, и сложим оба числа. То же самое проделаем с суммой и будем повторять всю процедуру до тех пор, пока не получим палиндром. Например, число 68 порождает палиндром в 3 шага:

$$
\begin{array}{r}
+\begin{array}{r}68\\86\end{array}\\ \hline
+\begin{array}{r}154\\451\end{array}\\ \hline
+\begin{array}{r}605\\506\end{array}\\ \hline
1111
\end{array}
$$

Гипотеза о палиндромах состоит в том, что независимо от того, какое число выбрано, после конечного числа шагов вы непременно получите палиндром.

Никто не знает, верна ли эта гипотеза. Доказано, что для двоичной системы и всех систем счисления с основанием, равным любой степени двойки, эта гипотеза не верна. Для систем счисления с другими основаниями доказать гипотезу о палиндромах пока не удалось.

Наименьшее десятичное число, которое может служить контрпримером, опровергающим гипотезу о палиндромах, равно, по-видимому, 196.

Математики проделали на ЭВМ сотни тысяч шагов, но получить палиндром так и не удалось, хотя никем не доказано, что он никогда не появится.

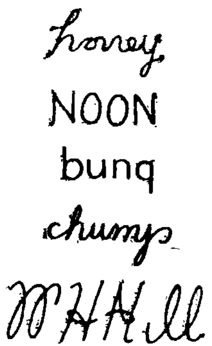
Математики исследовали также простые числа-палиндромы (которые делятся на 1 и на самих себя). Многие считают, что существует бесконечно много простых чисел-палиндромов, но эта гипотеза также пока не доказана. Высказывалось предположение и о том, что существует бесконечно много таких пар чисел-палиндромов, как, например, 30103 и 30203, в которых средние цифры отличаются на 1, а все остальные цифры совпадают.

Простое число-палиндром должно иметь нечеткое число знаков: каждое палиндромное число с четным числом знаков кратно 11 и, следовательно, не может быть простым. Можете ли вы доказать, что палиндромное число с четным числом знаков всегда делится на 11? (Указание: число делится на 11, если разность между суммой цифр, стоящих в разрядах с четными номерами, и суммой цифр, стоящих в разрядах с нечетными номерами, кратна 11.)

Много палиндромов среди квадратов, например $11 \times 11 = 121$. Квадраты оказываются палиндромами гораздо чаще, чем выбранные наугад целые числа. То же можно сказать и о кубах. Более того, если куб — палиндром, то можно почти с уверенностью сказать, что и кубический корень из него также будет палиндромом (например, $11 \times 11 \times 11 = 1331$). Поиск палиндромов среди четвертых степеней, проведенный с помощью ЭВМ, пока не дал ни одного палиндрома, корень четвертой степени из которого не был бы также палиндромом. Поиск палиндромов среди пятых степеней пока оказался безуспешным. Высказана гипотеза, согласно которой не существует чисел-палиндромов вида x^k при $k > 4$.

Надпись на плакате «NOW NO SWIMS ON MON» («Никто не плавает теперь по понедельникам») — самый длинный из известных текстов, обладающих симметрией относительно поворота на 180°. Существует довольно много примеров отдельных слов, обладающих такой симметрией либо в рукописном, либо в печатном виде. На рис. 3 вы видите некоторые из них.

3

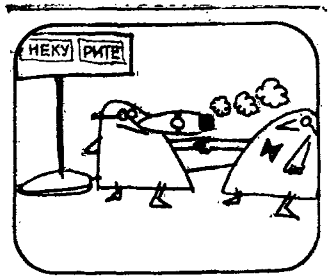


Предложение «Я бы сам всех макак удивил» можно было бы сравнить со снежным комом: каждое следующее слово на одну букву длиннее предыдущего, слова увеличиваются в размерах, как снежный ком, катящийся по склону. Существуют и более длинные предложения такого типа. Удастся ли вам придумать несколько таких предложений?

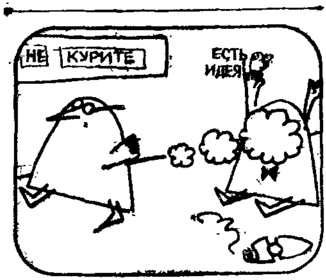
Ответ на последний вопрос проф. Слога: все выпускники Гарвардского университета произносят «плохо» слово «плоко» из 5 букв. Нетрудно придумать и другие вопросы того же типа.

Мистер Неку Рите

Следующим гостем телепередачи «Состязание любителей слова» был президент сигаретной компании из Хакеттстауна (штат Нью-Джерси) мистер Неку Рите. Почему проф. Слогу так понравилось имя нового гостя?



Если по-другому разбить имя и фамилию гостя, то получится «Не курите». Для президента сигаретной компании имя, что и говорить, весьма подходящее!



Дом от дыха

Хотя наш рассказ-загадка в картинках может показаться тривиальным, он показывает, что пробел как элемент алфавита имеет первостепенное значение для правильного понимания предложений. Пробелы между словами играют такую же роль, как скобки, пробелы и т. п. в математических выражениях. Смысл математического выражения нередко можно сильно изменить, «передвинув» одну-единственную скобку подобно тому, как сдвиг пробела почти до неузнаваемости изменил привычный призыв «НЕ КУРИТЕ».

Значения многих слов изменяются, если ввести пробел. Например, «штукатурка» превратится в словосочетание «штука турка», а «прохвост» — в безобидное «про хвост».

В старые времена, когда основным видом транспорта была лошадь, на улице одного американского городка над коновязью красовалась вывеска:

Д ЛЯЛОШ АДЕЙИМ УЛОВ

Можете ли вы, расставив по-другому пробелы, расшифровать таинственную надпись?

Близка по духу и другая игра в слова, известная еще нашим дедушкам и бабушкам: в предложении скрыто какое-то имя или географическое название, которое требуется найти. Например, название какого штата таится в следующем предложении: «Едва смолкли голоса, как кто-то восторженно воскликнул: «Ай, да хор! Молодцы!»

Нетрудно видеть, что подчеркнутые буквы образуют название американского штата Айдахо. Попробуйте теперь обнаружить название одной из частей света в предложении, взятом, должно быть, из какого-то фантастического романа: «За стеклом иллюминатора в резком свете прожектора, слезившем глаза, зияла пасть глубоководного чудовища».

Столь же легко замаскировать и математические термины. Например, название хорошо известного всем геометрического термина спрятано в предложении: «Изящный кувшин был выкован из меди, а на ручке мастер выгравировал свои инициалы».

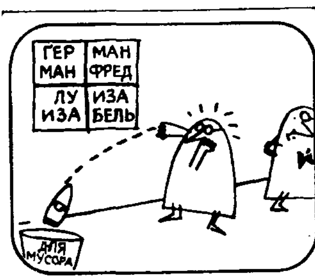
Существуют и всевозможные усложненные варианты. Например, одно предложение может быть скрыто в другом, вполне осмысленном. Для проявления «скрытого изображения» часть букв необходимо зачеркнуть. Особого искусства требует составление тройной фразы с «двойным дном», в которой осмысленные предложения образуют все буквы, зачеркнутые буквы и буквы, оставшиеся после зачеркивания. Приведем арифметический аналог такой тройной фразы: $15+11=26$. Последние цифры порождают равенство $5+1=6$, после их вычеркивания остается равенство $1+1=2$. Возможно, вам удастся придумать более сложные примеры.

Прямые люди

Проф. Слог. Ваше первое задание, мистер Рите, связано с этой таблицей, на которой выписаны четыре имени. Приз за успешное выполнение задания — 6 коробок превосходных кубинских сигар.

Проф. Слог. Проведя 3 линии, мы легко можем разделить таблицу на 4 графы так, чтобы в каждой из них было вписано только 1 имя. Нельзя ли добиться того же с помощью 2, а не 3 линий?
Мистер Рите молча попыхивал сигарой, пока его время не истекло.
Мистер Рите. Этого сделать нельзя!

Проф. Слог. Вы заблуждаетесь, мистер Рите. Задача решается очень просто. Должно быть, сигарный дым затуманил ясность вашего мышления.

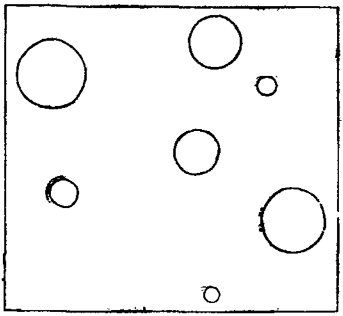


Честно и прямо

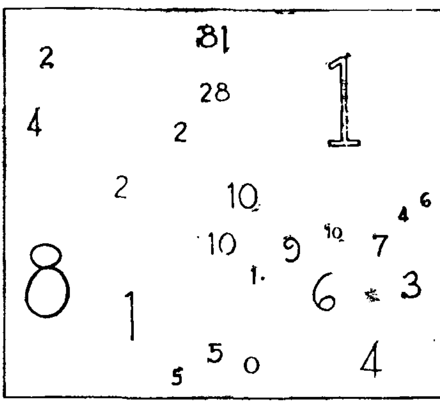
Задача проф. Слога решается сразу, стоит лишь догадаться, что каждое имя можно разбить на две части, а из «осколков», комбинируя их в других сочетаниях, составить те же четыре имя.

Идея разбиения на части прямыми встречается и во многих других головоломках. Обычно речь идет о том, чтобы несколькими прямыми разделить ту или иную картинку на части, каждая из которых содержала бы лишь одну деталь. Типичная головоломка такого рода изображена на рис. *4*. Можете ли вы провести 3 прямые так, чтобы каждый кружок оказался отрезанным от всех остальных? Решение оказывается неожиданно простым, если догадаться, что части, на которые рассекают квадрат 3 прямые, не обязательно должны быть прямоугольниками и что 3 прямыми квадрат можно разделить на 7 частей.

4



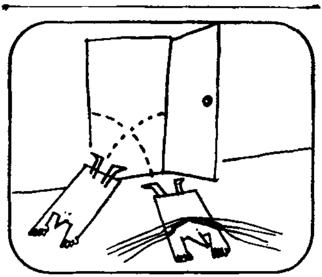
5



Интересные варианты той же идеи возникают, если вместо кружков взять числа. Требуется разделить квадрат прямыми на части так, чтобы в каждой части числа обладали каким-нибудь общим отличительным свойством. Свое искусство в решении задач этого типа вы можете испытать на следующей головоломке (рис. 5). Требуется провести 4 прямые так, чтобы они разделили квадрат на 11 частей и сумма чисел в каждой части была равна 10. Решение этой задачи приведено в конце книги.

Невразумительное объявление

Проф. Слог. Даю вам еще один шанс выиграть 6 коробок сигар. В одном городке на витрине небольшой гостиницы с рестораном красовался такой плакат.



Проф. Слог. Но когда несовершеннолетние юнцы зашли в ресторан и потребовали спиртные напитки, их вышвырнули вон.

Проф. Слог. По словам владельца гостиницы, художник, написавший плакат, пропустил два восклицательных знака. Расставьте их так, чтобы текст плаката обрел тот смысл, который хотел вложить в него хозяин гостиницы, человек строгих правил и безупречной репутации.

Мистер Рите не справился и с этим заданием. Проф. Слогу пришлось самому расставить восклицательные знаки.

Знаки и знаки препинания

Во многих старинных сборниках забав и развлечений можно найти примеры фраз, смысл которых существенно зависит от того, как расставлены знаки препинания. Вспомним хотя бы знаменитый пример с телеграммой «КАЗНИТЬ НЕЛЬЗЯ ПОМИЛОВАТЬ». От того, где должна стоять пропущенная телеграфистом точка, зависит судьба осужденного.

Головоломки этого типа также имеют многочисленные арифметические аналоги. Взять хотя бы следующее неверное равенство:

$$1+2+3+4+5+6+7+8+9=100.$$

Как сделать его верным, изменив «пунктуацию» в левой части (то есть расставив по-другому плюсы и минусы и, возможно, убрав или добавив пробелы между цифрами)? Одно из возможных решений, использующее только три знака, имеет вид:

$$123-45-67+89=100.$$

Другое решение потребовало больше плюсов и лишь один минус:

$$1+2+3-4+5+6+78+9=100.$$

Существует всего лишь девять решений:

$$\begin{gathered}
123-45-67+89=100,\\
123+4-5+67-89=100,\\
123+45-67+8-9=100,\\
123-4-5-6-7+8-9=100,\\
12-3-4+5-6+7+89=100,\\
12+3+4+5-6-7+89=100,\\
1+23-4+5+6+78-9=100,\\
1+2+34-5+67-8+9=100,\\
12+3-4+5+67+8+9=100,\\
1+23-4+56+7+8+9=100,\\
1+2+3-4+5+6+78+9=100.
\end{gathered}$$

Ту же задачу можно поставить несколько иначе, если потребовать, чтобы цифры шли не в порядке возрастания, а в порядке убывания. Если исключить (как мы делали в предыдущей задаче) случай, когда знак минус стоит перед первым числом, то задача допускает всего 15 решений:

$$
\begin{gathered}
98-76+54+3+21=100,\\
9-8+76+54-32+1=100,\\
98-7-6-5-4+3+21=100,\\
9-8+7+65-4+32-1=100,\\
9-8+76-5+4+3+21=100,\\
98-7+6+5+4-3-2-1=100,\\
98+7-6+5-4+3-2-1=100,\\
98+7+6-5-4-3+2-1=100,\\
98+7-6+5-4-3+2+1=100,\\
98-7+6+5-4+3-2+1=100,\\
98-7+6-5+4+3+2-1=100,\\
98+7-6-5+4+3-2+1=100,\\
98-7-6+5+4+3+2+1=100,\\
9+8+76+5+4-3+2-1=100,\\
9+8+76+5-4+3+2+1=100.
\end{gathered}
$$

Если мы условимся ставить минус и перед первым числом, то появится 3 новых решения в том случае, когда цифры расположены в порядке убывания, и одно новое решение, когда цифры расположены в порядке возрастания:

$$
\begin{gathered}
-9+8+76+5-4+3+21=100,\\
-9+8+7+65-4+32+1=100,\\
-9-8+76-5+43+2+1=100,\\
-1+2-3+4+5+6+78+9=100.
\end{gathered}
$$

Разумеется, знаки «пунктуации» не обязательно ограничивать плюсами и минусами, а сумму, стоящую в правой части равенства, числом 100. Сумма может быть равна, например, двум последним цифрам текущего года или любому другому числу, какое вам больше нравится.

Можете ли вы расставить знаки так, чтобы левая часть «равенства»

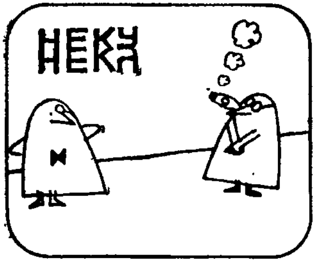
$$1-2-3+4-5+6=9$$

действительно стала равно 9?

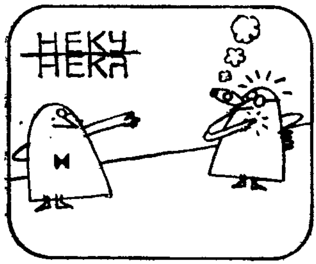
Ответ приведен в конце книги.

Загадочные знаки

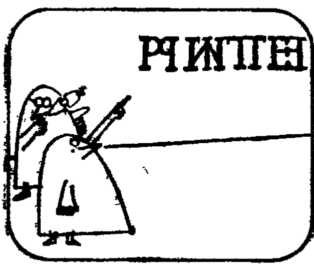
Проф. Слог. А теперь, мистер Рите, мы покажем вам три загадочные надписи. В каждой из них зашифровано какое-то слово. Раскройте тайный смысл любой из надписей, и вы получите сигары. Вот первая надпись. Каков ее тайный смысл?



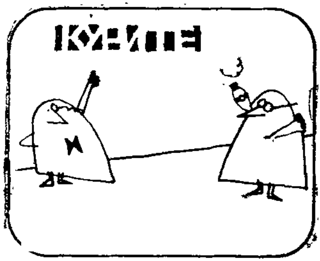
Мистер Рите. Не знаю. Не могу сказать. А что в ней зашифровано?
Проф. Слог. Ваше имя — Неку. Таинственные символы получены при отражении букв от горизонтальной прямой, как от поверхности озера.



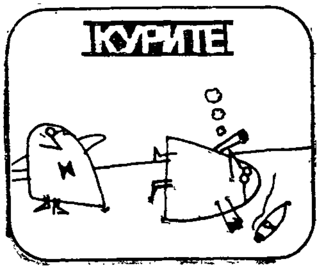
Проф. Слог. Может быть, разгадать эту надпись вам будет легче?



Слушая объяснения проф. Слога, мистер Рите только крутил головой.
Проф. Слог. Каждый символ был получен из соответствующей буквы при отражении от вертикальной прямой, проходящей слева от буквы. Не правда ли, все очень просто?
Мистер Рите. Мне это задание совсем не кажется простым.



Проф. Слог. Не будем спорить. Вот последнее ваше задание. У вас еще есть шанс получить сигары.



Мистер Рите не смог н с этим заданнем справиться. Когда же проф. Слог провел по жирной черте иад надписью и под ней, оказалось, что в ией было скрыто слово «курите».

Занимательио о симметрии

В первой серии загадочных знаков буквы НЕКУ отражены от оси симметрии, проходящей через их основания. Заметим, что некоторые буквы при такой операции переходят в себя (например, буквы Н, Е и К, обладающие горизонтальной осью симметрии).

Во второй серии каждый загадочный знак получен при отражении букв РИТЕ относительно вертикальных осей симметрии. Заметим, что такие буквы, как Т и О (не входящая в имя и фамилию мистера Рите), при отражении относительно вертикальных прямых переходят в себя (они обладают вертикальной осью симметрии). Буква О, обладающая и вертикальной, и горизонтальной осью симметрии, не изменяется при отражениях в зеркале, поставленном, как перпендикулярно, так и параллельно строке. Возьмите зеркало и выясните, какой симметрией обладают все буквы алфавита, как строчные, так и прописные.

Можете ли вы придумать слово, которое бы не изменялось при отражении в зеркале, параллельном строке? Отражение в зеркале, поставленном параллельно строке, выдерживает в числе многих, например, слово «ОКНО». А существуют ли слова, способные выдержать отражение в зеркале, приставленном сбоку перпендикулярно строке? Да, одним из многочисленных примеров может служить слово «ТОПОТ».

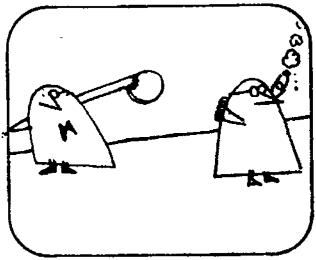
Любая плоская фигура, обладающая по крайней мере одной осью симметрии, совместима со своим зеркальным отражением, хотя последнее может быть повернуто под некоторым углом. Любое геометрическое тело, обладающее плоскостью симметрии, также совместимо со своим зеркальным отражением. Глядя в зеркало, мы видим своих двойников именно потому, что наше тело обладает плоскостью симметрии, которая делит его от макушки до пят.

Наши зеркальные головоломки допускают многочисленные вариации. Например, что это такое?

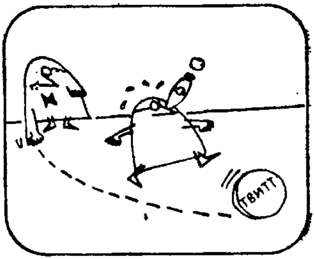
Угадать, что это такое, еще труднее:

В последней головоломке проф. Слога буквы КУРИТЕ замаскированы совершенно иначе. Глаз стремится уловить какую-то закономерность в очертаниях черных фигурок и не обращает внимания на белые зазоры между ними, хотя именно эти зазоры имеют форму букв, которые выглядят, как на негативе. Увидеть слово без вертикальных черных полос, ограничивающих его сверху и снизу, довольно трудно. Попытайтесь замаскировать аналогичным образом другие слова.

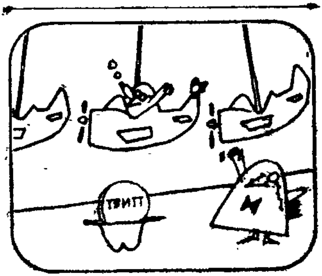
Золотой твитт



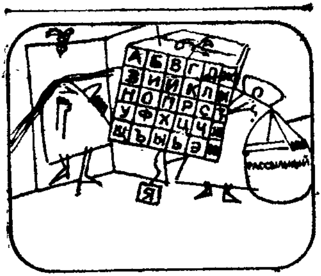
Проф. Слог. Жаль, что сигары вам не достались, мистер Рите. Но вы вели себя так спортивно и не падали духом при неудачах, что я хочу вручить вам этот позолоченный «твитт».



Мистер Рите. Благодарю вас, профессор. А что означает слово «твитт»?
Проф. Слог. Нет ли у вас какого-нибудь заветного желания, мистер Рите?

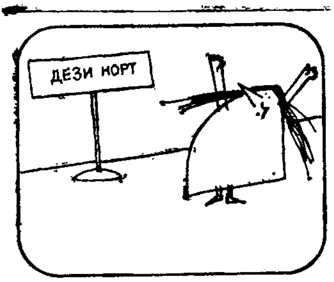


Мистер Рите. Есть, конечно! Я всегда мечтал научиться летать на самолете.
Проф. Слог. Вот ваша мечта и сбылась! Ваш «твитт» в шляпе! Всего доброго, мистер Рите! Спасибо за то, что смогли выбраться к нам!

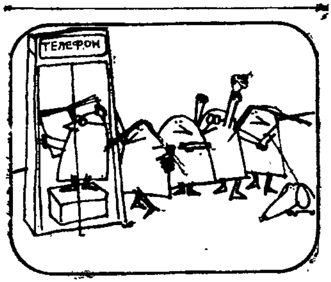


Проф. Слог. Пока наш следующий гость готовится к выходу, я хочу предложить вам, дорогие телезрители, небольшую задачку. Этот подарок я послал своей доброй знакомой на день рождения. Не могли бы вы назвать, какого сорта торт я выбрал для нее?

Дези Норт



Последним гостем передачи была мисс Дези Норт. Как, по-вашему, почему проф. Слог пригласил ее принять участие в телепередаче?

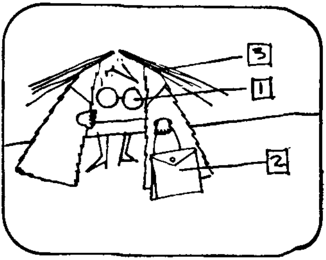


Буквы в имени и фамилии Дези Норт расположены в алфавитном порядке. Такое встречается не слишком часто. Раскройте телефонный справочник, и вы убедитесь, что фамилии, в которых все буквы идут в алфавитном порядке, встречаются редко.

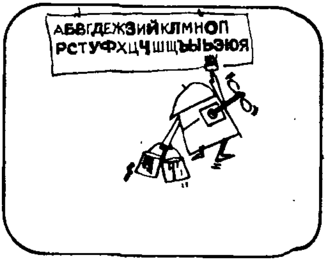
Август

Найти имена, в которых все буквы расположены в алфавитном порядке, как, например, в имени АВГУСТ, не легко. А можете ли вы привести пример какого-нибудь слова, состоящего не менее чем из 6—7 букв, которые были бы расположены в алфавитном порядке? Коротких слов такого типа довольно много, например туф, бинт, абвер и т. д., но найти длинные слова значительно труднее.

Загадочные последовательности



Проф. Слог. Мисс Норт, Вам предстоит решить 3 задачки. Решив правильно первую задачу, вы получите в качестве приза купальный костюм, за решение второй задачи — сумочку. Наконец, правильио решив третью задачу, вы станете обладательницей норкового манто.



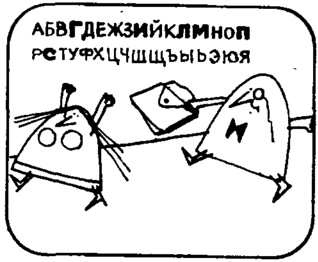
Проф. Слог. Итак, первая задача. Художник нарисовал одни буквы более жирно, чем другие. По какому признаку он разделил алфавит на жирные и тонкие буквы?

Мисс Норт с минуту молча разглядывала надпись.

Мисс Норт. Эврика! У жирных букв по крайней мере один элемент искривлен, а тонкие буквы составлены из отрезков прямых.

Проф. Слог. Вы выиграли купальный костюм, мисс Норт. Постарайтесь выиграть и сумочку. По какому признаку буквы этого алфавита разделены на жирные и тонкие?

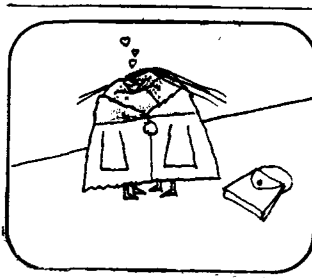
Мисс Норт. Посмотрим. Так, это не кривые и не отверстия, не глухие и звонкие согласные. Что же за признак? Стоп! Все понятно! Жирные буквы топологически эквивалентны. Все они получены непрерывной деформацией отрезка прямой.



Проф. Слог. Великолепно, Дези! Еще немного усилий, и норковое манто ваше! Вы должны вычеркнуть шесть букв так, чтобы оставшиеся буквы образовали имя и фамилию известного английского поэта.

Мисс Норт немного подумала и нашла ключ к решению задачи. Вычеркнув «Ш-Е-С-Т-Ь Б-У-К-В», она получила надпись: Джон Мильтон.

Мисс Дези Норт так обрадовалась полученным призам, что на прощание обняла и крепко поцеловала проф. Слога.



Топология алфавита

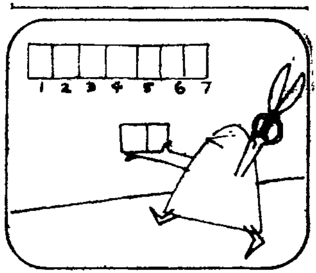
В первой задаче буквы алфавита разделены на основе геометрических различий между прямыми и кривыми (жирно обведены буквы, содержащие криволинейные элементы). Во второй задаче буквы разделены по топологическому признаку (жирно обведены буквы алфавита, топологически эквивалентные отрезку прямой, не имеющие точек самопересечения и незамкнутые).

Представим себе, что заглавные буквы сделаны из упругого материала и их можно сжимать, растягивать и даже выводить из плоскости и переносить в другое место. Две буквы называются топологически эквивалентными, если их можно перевести друг в друга такими непрерывными деформациями (разрезать буквы или склеивать их не разрешается). Попробуйте разбить все буквы алфавита на классы топологически эквивалентных букв.

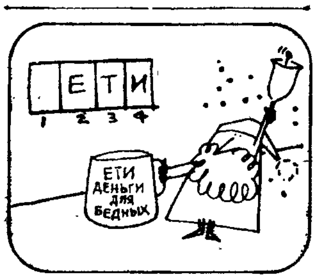
Например буквы Е и Т топологически эквивалентны, но ни одна из них не эквивалентна буквам Х и К, хотя последние эквивалентны друг другу. Аналогичным образом можно классифицировать не только заглавные, но и строчные буквы, цифры и любые другие знаки. Производя классификацию печатных букв, необходимо учитывать, что в различных типографских гарнитурах буквы могут отличаться по форме.

Слова прощания

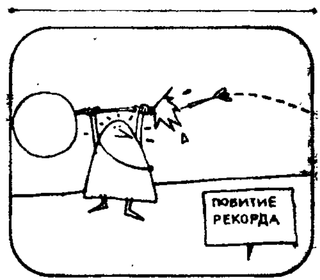
Проф. Слог. Дорогие телезрители! Прежде чем мы расстанемся, я хотел бы задать вам 3 задачки. Задача первая: какое слово из 7 букв станет длиннее, если 2 его последние буквы заменить другими?



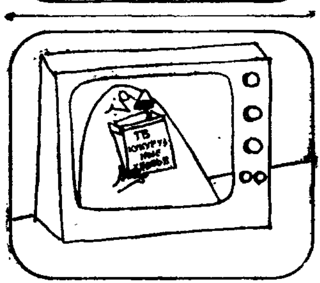
Вторая задача: какие 3 слова из 4 букв заканчиваются на «ети»?



Третья, и последняя, задача: в каком слове сто «н»?



Проф. Слог. Наша передача подошла к концу, уважаемые любители слова. Благодарю вас за внимание. До нашей встречи на следующей неделе в то же время по той же программе! Всего вам доброго!



Последние слова

Ответы на последние вопросы проф. Слога:

1. «Длинный» становится «длиннее», если две последние буквы заменить на «ее».

2. На «ети» оканчиваются такие четырехбуквенные слова, как «дети», «сети» и «нети» (быть «в нетях»).

3. В слове «стон» сто «н».

А вот еще несколько задач того же типа:

1. Перед вами слово АЙВА. Какую букву следует добавить к нему, чтобы получилось название одного из штатов США?

2. Какое слово здесь «инородно»?

ДЯДЮШКА
РОДИЧ
МАТЬ
СЕСТРА
ОТЕЦ
ТЕТУШКА

3. Что означают эти буквы:

О Д Т Ч ?

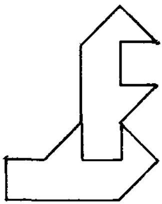
4. Что здесь написано:

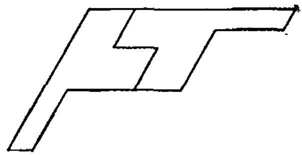
$$\frac{\text{ВО}}{\text{ДА}},\ \frac{\text{ОЙ}}{\text{Д}}\ ?$$

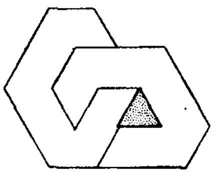
Ответы и решения

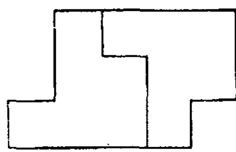
Глава 2. Геометрические находки

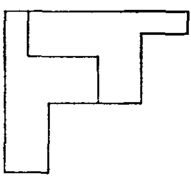
Хитроумные разбиения. Задачи на разрезание.

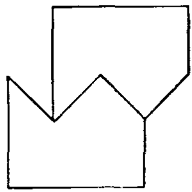


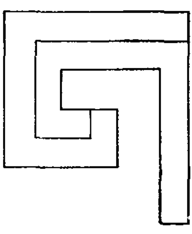


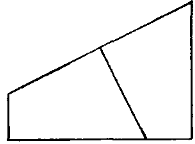












Разбитые грампластинки. Половинки целого.

42 доллара.

Глаза и ноги. Двуногие и четвероногие.

Решить задачу сумеет тот, кто догадается, что у некоторых животных вообще нет ног — речь идет о змеях. После этого ответ получается легко и просто: в зверинце цирка 4 четвероногих животных, 2 двуногих и 5 змей.

Столкновение на полном ходу.
От конца к началу.

Вы думаете, что контейнер наполнится втрое быстрее, чем прежде, а именно за $12/3=4$ часа? Если вы действительно так думаете, то заблуждаетесь: новая задача сводится к предыдущей.

В исходном варианте задачи число бактерий в контейнере достигает 3 к концу первого часа — в нашем новом варианте 3 бактерии оказываются в контейнере в момент, когда начинается отсчет времени. Следовательно, если в исходной задаче контейнер наполнился за 12 часов, то в новом варианте задачи он наполнится на 1 ч быстрее, то есть за 11 ч.

Часы дядюшки Генри. Проверьте ваши часы.

Если часы успевают пробить 6 ударов за 5 с, то интервал между отдельными ударами составляет 1 с. Следовательно, 12 ударов часы пробьют за 11 с.

Дядюшка Генри успеет проспать 40 мин.

Истина в вине. Арифметика вычетов.

Как и две предыдущие задачи, эта головоломка легко решается, если догадаться обратить последовательность операций. Возьмите всю стопку отобранных карт в левую руку и держите вверх рубашкой. Найдите короля и подложите под стопку снизу. Затем найдите даму (12 очков), подложите под стопку снизу и, отсчитав снизу 12 карт, перенесите их в том же порядке, в каком они лежали в стопке, снизу наверх. Найдите валета (11 очков), подложите его под стопку снизу, и, отсчитав 11 карт снизу, перенесите их наверх. Эта процедура, которую необходимо продолжать, пока вы не дойдете до туза, представляет собой не что иное, как обращение процедуры Иосифа Флавия. Закончив манипуляции, вы получите стопку с картами, разложенными в нужном порядке.

«Счет» Иосифа Флавия не обязательно ограничивать последовательными числами. Описанная нами процедура позволяет подготовить стопку карт для счета Флавия с произвольными числами, расположенных в каком угодно порядке!

Продемонстрировать это можно с помощью следующего карточного фокуса, для которого нам понадобиться та же стопка из 13 карт пиковой масти. Вместо того чтобы считать, будем называть по буквам каждую карту, перенося по одной карте сверху вниз на каждой букве. Карты в стопке должны быть уложены в следующем порядке (сверху вниз): дама, четверка, туз, восьмерка, король, двойка, семерка, пятерка, десятка, валет, тройка, шестерка, девятка. Вы произносите Т — У — З, перенося по одной карте сверху вниз на каждой букве. На букве З вы поворачиваете карту вверх лицом и показываете всем, что это туз. Отложив туз в сторону, вы произносите затем Д — В — А и продолжаете так до тех пор, пока не назовете вслух по буквам все 13 карт.

Начальное расположение карт в стопке получается с помощью уже описанной нами процедуры обращения последовательности операций. Эта же процедура позволяет подготовить для демонстрации фокуса полную колоду в 52 листа даже в том случае, если вы будете произносить название каждой карты по буквам полностью, например, Т — У — З — П — И — К, и показывать их зрителям в заранее объявленной последовательности мастей, например в последовательности: пики, черви, трефы и бубны.

«Счет» Иосифа Флавия как процедура обладает такой общностью, что позволяет произносить по буквам любые слова, например названия знаков зодиака, фамилии знаменитостей и т. д. Процедура обращения последовательности операций позволяет вам в любом случае подготовить колоду к безотказной демонстрации фокуса: какие бы слова вы ни выбрали, с последней буквой каждого слова у вас в руках неизменно будет оказываться нужная карта.

Глава 4. Логические находки

Каверзные загадки. Каверзные разгадки.

1. Посетитель ресторана успел посолить суп прежде, чем заметил муху.

2. Вода никогда не достигнет иллюминатора, так как вместе с приливом поднимается и судно.

3. Река Гудзон покрылась льдом у берега, и на него-то и ступил преподобный Сол Луни.

4. Один поезд влетел в туннель с одной стороны, а через час, когда первый поезд был уже далеко, в туннель с противоположной стороны на полной скорости влетел другой поезд.

5. Когда показалась полицейская машина, беглый преступник находился у конца большого моста. Прежде чем попытаться скрыться в лесу, ему пришлось пробежать 10 м по мосту навстречу полиции.

6. Потому, что сумма в 1977 долларов на 1 доллар больше суммы в 1976 долларов.

Ограбление века. Недостающие данные.

Если вам когда-нибудь приходилось иметь дело с кассетным магнитофоном, то вы поймете, что если бы Джонс остановил запись, когда Смит вошел в комнату, то лента не была бы перемотана. Истинный убийца несколько раз прослушал запись, чтобы убедиться в правдоподобности звучания, а затем совершил роковую ошибку, перемотав ленту.

Аховы тесты. Аховы решения.

1. Чтобы картонная спичка упала на ребро, ее нужно согнуть посредине.

2. Нужно осторожно подсыпать песок в канал до тех пор, пока он не наполнится доверху.

3. Сделайте на нити небольшую петлю, завязав ее у основания, после чего перережьте петлю сбоку.

4. Отрезок шеста длиной в 20 см имеет продольное сечение в форме прямоугольника 20 см $\times$ 5 см, и,

следовательно, им можно плотно заделать брешь в плотине.

5. Измерьте линейкой внутренний диаметр бутылки и уровень жидкости в ней. Столб жидкости имеет форму цилиндра, поэтому объем его вычисляется без труда. Переверните затем бутылку. Находящийся в ней воздух образует другой цилиндр, объем которого вы также легко измерите. Сумма объемов даст вам полный объем бутылки, после чего не составит никакого труда вычислить, какую часть объема занимает жидкость.

В кресле у парикмахера.
Удивительные разгадки.

1. Сообразительный гонщик предложил всем участникам заезда обменяться машинами, после чего гонка проходила, как обычно: по условию, приз выигрывал тот, чья *машина* придет последней. О том, чтобы гонщик был последним на финише, ничего не говорилось.
2. Достаточно поднести горящую спичку снизу к стакану с водой.
3. Действие происходило в кинотеатре, где зрители смотрят картины, не вылезая из своих машин.
4. Для этого проф. Квибблу достаточно выйти в другую комнату и, встав на четвереньки, «вползти» обратно.
5. До начала встречи счет всегда бывает 0 : 0.
6. Человек работал в городском магистрате в отделе регистрации бракосочетаний.
7. Редкая птица была глухой.

Убийство в Солнечной долине.
Билет в один конец.

1. Дежурный хирург был матерью мальчика.
2. Француз поцеловал свою собственную руку, после чего ударил нацистского офицера.

Сцена у фонтана. Видение в зеркале.

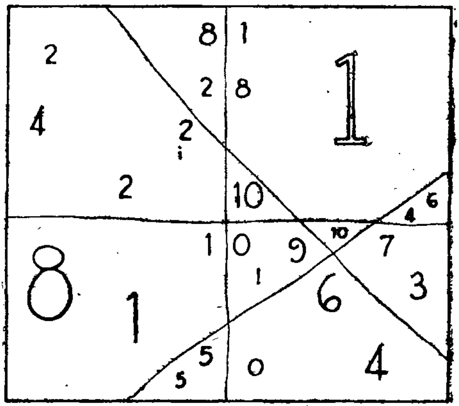
1. Раб Клеопатры перевернул шкатулку вверх дном и чуть сдвинул крышку ровно настолько, чтобы из нее выкатились несколько бриллиантов.
2. Дама шла пешком.

Глава 6. Словесные находки

Мини-кроссворд проф. Слога.
Магические квадраты и анаграммы.

Ответ на вопрос проф. Квиббла: из букв, образующих слова «волос на локон», можно составить слова «слово колонна».

Прямые люди. Честно и прямо.



На рисунке показаны 11 частей, на которые 4 прямые делят квадрат, изображенный на рис. 5 в гл. 6.

Невразумительное объявление.
Знаки и знаки препинания.

$$1-(2-3+4-5)+6=9.$$

Слова прощания. Последние слова.

1. Букву О. Слово АЙВА превратится в название штата Айова.
2. Все слова, кроме слова «родич», указывают на пол своего «носителя».
3. Это — первые буквы слов один, два, три, четыре.
4. «Подвода», «надой».

Литература

Глава 1. КОМБИНАТОРНЫЕ НАХОДКИ

Общие сведения

Виленкин Н. Я. Комбинаторика. — М.: Наука, 1969.

Виленкин Н. Я. Популярная комбинаторика. — М.: Наука, 1975.

Игровые головоломки

Дьюдени Г. Э. 520 головоломок. — М.: Мир, 1975, с. 184—188.

Треугольник Паскаля

Гарднер М. Математические новеллы. — М.: Мир, 1974, гл. 17.

Проверка на четность

Гарднер М. Математические досуги. — М.: Мир, 1972, гл. 32.

Определение фальшивых монет взвешиванием

Яглом А. М., Яглом И. М. Вероятность и информация. — М.: Наука, 1973.

Фигуры полимино

Голомб С. В. Полимино. — М.: Мир, 1975.

Глава 2. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ НАХОДКИ

Общие сведения

Кокстер Г. С. М. Введение в геометрию. — М.: Наука, 1966.

Исчисление конечных разностей

Гарднер М. Математические досуги. — М.: Мир, 1972, гл. 7.

Игровые головоломки

Дьюдени Г. Э. 520 головоломок. — М.: Мир, 1975, с. 184—188.

Винтовая линия

Гарднер М. Математические досуги. — М.: Мир, 1972, гл. 26.

Реп-плитки

Гарднер М. Математические досуги. — М.: Мир, 1972, гл. 24.

Задачи на разрезание

Ландгрен Г. Занимательные задачи на разрезание. — М.: Мир, 1977.

Разрезание куба

Гарднер М. Математические головоломки и развлечения. — М.: Мир, 1971, гл. 3.

Глава 3. НАХОДКИ В МИРЕ ЧИСЕЛ

Общие сведения
Оре О. Приглашение в теорию чисел. — М.: Наука, 1980.

Мартышка и кокосовые орехи
Гарднер М. Математические головоломки и развлечения. — М.: Мир, 1971, гл. 24.

Китайская теорема об остатках
Серпинский В. О решении уравнений в целых числах. — М.: Физматгиз, 1961, с. 16—17.

Карточки для угадывания чисел
Гарднер М. Математические чудеса и тайны. — М.: Наука, 1964.

Задачи на движение
Дьюдени Г. Э. 520 головоломок. — М.: Мир, 1975.

Задачи с часами
Дьюдени Г. Э. 520 головоломок. — М.: Мир, 1975.

Глава 4. ЛОГИЧЕСКИЕ НАХОДКИ

Общие сведения
Бизам Д., Герцег Я. Игра и логика. — М.: Мир, 1975.
Бизам Д., Герцег Я. Многоцветная логика. — М.: Мир, 1978.

Глава 5. ПРОЦЕДУРНЫЕ НАХОДКИ

Общие сведения
Кнут Д. Искусство программирования для ЭВМ, Т. 1. Основные алгоритмы. — М.: Мир, 1976.

Магические квадраты
Гуревич Е. Я. Тайна древнего талисмана. — М.: Наука, 1969.

Задача о честном разделе
Бизам Д., Герцег Я. Многоцветная логика. — М.: Мир, 1978.

Глава 6. СЛОВЕСНЫЕ НАХОДКИ

Общие сведения
Фолсом Ф. Книга о языке. — М.: Прогресс, 1974.

Оглавление